

Równania i nierówności kwadratowe, równania wielomianowe w postaci iloczynowej

Nierówność kwadratowa za 2 punkty jest w każdym arkuszu podstawowym i należy do najłatwiejszych zadań otwartych, pod warunkiem że algorytm doprowadzi się do końca. Obok niej stoją równania w postaci iloczynowej, w których trzeba policzyć rozwiązania i nie dać się złapać na czynnik bez pierwiastków, oraz równania wymierne, które po wymnożeniu dają równanie kwadratowe.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
III.4, III.5

W TEJ LEKCJI

- 0 Cztery czynniki, dwa rozwiązania
- 1 Równanie kwadratowe
- 2 Nierówność kwadratowa: pięć kroków
- 3 Równanie w postaci iloczynowej
- 4 Równanie wymierne prowadzące do kwadratowego
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Cztery czynniki, dwa rozwiązania

Ile rozwiązań ma równanie $3x(x-2)(x^2+9)=0$? Iloczyn jest zerem, gdy zeruje się któryś czynnik. $3x=0$ daje 0, $x-2=0$ daje 2, a $x^2+9=0$ nie ma rozwiązań, bo $x^2+9 \geq 9$. Odpowiedź: dwa rozwiązania. Kto „rozwiąże” $x^2+9=0$ jako $x=\pm 3$, dostaje cztery. Ten sam błąd na odwrót dotyczy pierwiastka podwójnego: $(x-1)^2=0$ ma jedno rozwiązanie, nie dwa.

Równanie kwadratowe

 TRZY DROGI DO PIERWIĄSTKÓW $ax^2+bx+c=0$

- **Wyłączenie** (gdy $c=0$): $ax^2+bx=x(ax+b)$.
- **Wzory skróconego mnożenia** (gdy $b=0$ albo widać kwadrat): $x^2-9=(x-3)(x+3)$.
- **Wyróżnik**: $\Delta=b^2-4ac$; dla $\Delta>0$: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$; dla $\Delta=0$: $x_0=-\frac{b}{2a}$; dla $\Delta<0$ brak pierwiastków.

Przykład 1.1

Bez wyróżnika

Rozwiąż równania: a) $5x^2=15x$; b) $4x^2-25=0$.

- 1 a) $5x^2-15x=5x(x-3)=0$, więc $x=0$ albo $x=3$. Dzielenie przez x zgubiłoby rozwiązanie 0.
- 2 b) $(2x-5)(2x+5)=0$, więc $x=\pm\frac{5}{2}$.

Wynik: a) $\{0, 3\}$; b) $\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Rozwiąż równanie $x^2-5x-14=0$.

- 2 Rozwiąż równanie $9x^2-6x+1=0$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Nierówność kwadratowa: pięć kroków

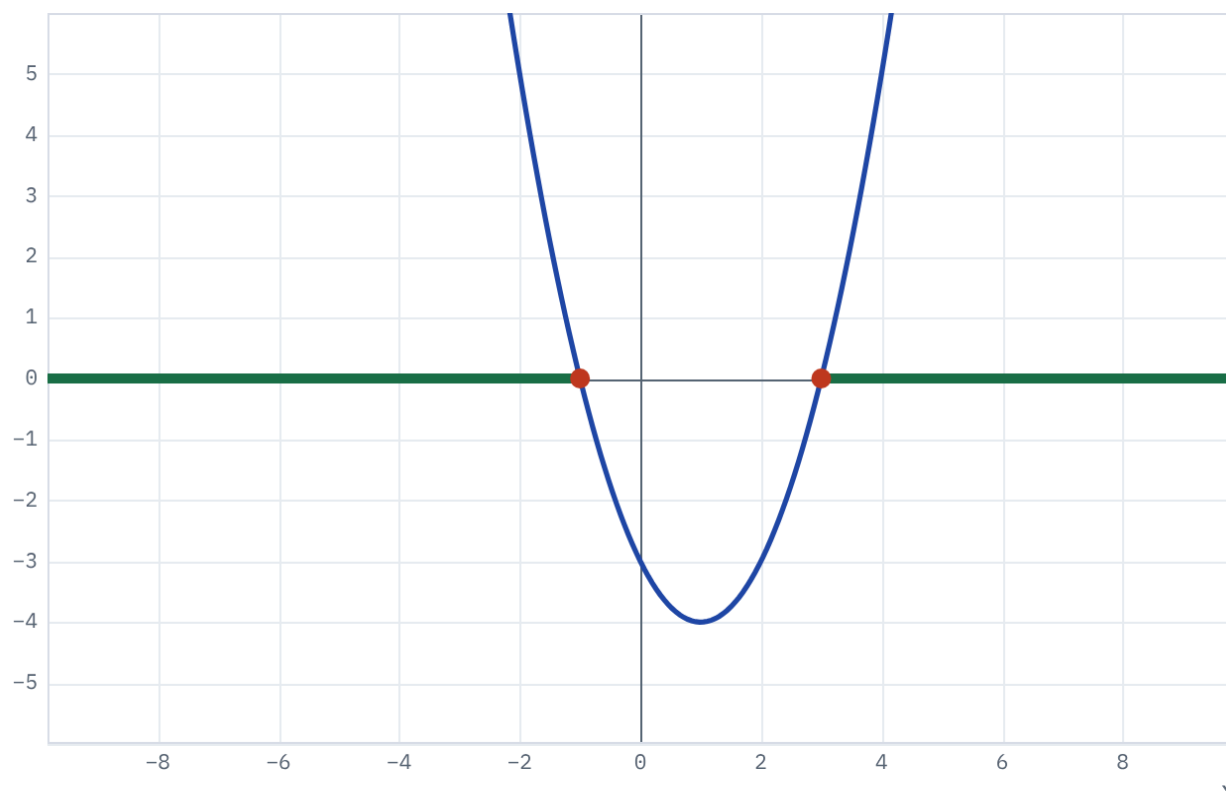
🔑 ALGORYTM (DOKŁADNIE TAK PUNKTUJE KLUCZ)

1. Przenieś wszystko na jedną stronę: $ax^2 + bx + c \geq 0$.
2. Policz pierwiastki trójmianu (wyłączenie, wzory albo Δ). *Za to jest 1 punkt.*
3. Naszkicuj parabolę: ramiona w górę dla $a > 0$, w dół dla $a < 0$, przez pierwiastki.
4. Odczytaj, gdzie parabola jest nad osią (> 0) albo pod nią (< 0).
5. Zapisz zbiór z właściwymi nawiasami: przy $\geq, \leq$ pierwiastki należą do zbioru. *Za to jest drugi punkt.*

Nigdy nie dziel obu stron przez wyrażenie z x : klucz daje za to 0 punktów.

SYMULACJA 1

Nierówność $ax^2 + bx + c \geq 0$. Zmieniaj współczynniki i zwrot. Kropki na osi Ox to pierwiastki, zielony zbiór to rozwiązania. Porównaj $a = 1$ i $a = -1$ przy tym samym zwrocie: zbiór przechodzi z „na zewnątrz” do „między”. Ustaw $\Delta \leq 0$ i zobacz, kiedy rozwiązaniem jest $\mathbb{R}$, a kiedy zbiór pusty.



— $y = ax^2 + bx + c$ — miejsca zerowe — zbiór rozwiązań

nierówność $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Δ 16

pierwiastki -1; 3

zbiór rozwiązań $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

Ramiona w górę ($a > 0$). Parabola leży nad osią Ox na zewnątrz pierwiastków. Nierówność nieostra: pierwiastki należą do zbioru.

Stan na rysunku: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$; zbiór rozwiązań $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

Przykład 2.1

Pełne rozwiązanie za 2 punkty

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 3x \geq x + 6$.

- 1 $2x^2 - 4x - 6 \geq 0$, czyli (po podzieleniu przez $2 > 0$) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.
- 2 $\Delta = 4 + 12 = 16$, $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$, $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$.
- 3 Ramiona w górę: parabola jest nad osią na zewnątrz pierwiastków.

Wynik: $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Rozwiąż nierówność $x(x - 4) \leq 12$.



- 2 Rozwiąż nierówność $-x^2 + 6x - 9 < 0$.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Równanie w postaci iloczynowej

 $W(x) = 0$, GDY W JEST ILOCZYNEM

Iloczyn jest równy zero $\iff$ któryś czynnik jest równy zero. Rozwiązania to suma rozwiązań poszczególnych czynników, przy czym:

- stała różna od zera (np. 3) nie daje rozwiązań;
- czynnik bez pierwiastków ($x^2 + 9$, $x^2 + 2x + 5$ z $\Delta < 0$) nie daje rozwiązań;
- ten sam pierwiastek z dwóch czynników liczymy raz.

Przykład 3.1

Suma rozwiązań z parametrem

Równanie $2(x - 4)(x + m)(3x + 6) = 0$ ma trzy różne rozwiązania, których suma jest równa 0. Wyznacz m .

- 1 Rozwiązania: $4, -m, -2$.
- 2 $4 - m - 2 = 0$, więc $m = 2$. Wtedy rozwiązania to $4, -2, -2$: tylko dwa różne!
- 3 Warunek „trzy różne” wymaga $-m \neq 4$ i $-m \neq -2$. Dla $m = 2$ nie jest spełniony.

Wynik: nie ma takiego m . Gdyby pominąć słowo „różne”, wynik $m = 2$ też nie byłby poprawny, bo suma rozwiązań $\{4, -2\}$ wynosi 2, a nie 0.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Ile rozwiązań ma równanie $5(x + 1)^2(x^2 - 16) = 0$?

- 2 Ile rozwiązań ma równanie $x(x^2 - 5)(x^2 + x + 1) = 0$?

- 3 Równanie $(x - 3)(x + m)(2x - 4) = 0$ ma rozwiązania, których suma jest równa 10.
 Wyznacz m (rozwiązania liczymy bez powtórzeń).

 podstawowe  średnie  trudniejsze

4

Równanie wymierne prowadzące do kwadratowego

Przykład 4.1

Rozwiązanie z przedziału

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{x+1}{x}$ należące do przedziału $(-\infty, 0)$.

- 1 Dziedzina: $x \neq 2, x \neq 0$.
- 2 Na krzyż: $x(2x+3) = (x+1)(x-2)$, czyli $2x^2 + 3x = x^2 - x - 2$.
- 3 $x^2 + 4x + 2 = 0$, $\Delta = 8$, $x = -2 \mp \sqrt{2}$.
- 4 Oba są ujemne: $-2 - \sqrt{2} \approx -3,41$ i $-2 + \sqrt{2} \approx -0,59$.

Wynik: $x = -2 - \sqrt{2}$ albo $x = -2 + \sqrt{2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 5 min

- 1 Rozwiąż równanie $\frac{x+2}{x-1} = \frac{2x}{x+1}$ i wybierz rozwiązania z przedziału $(1, +\infty)$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

5

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 31 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · RÓWNANIA

ZESTAWY A

- 1 Rozwiąż równanie.

▢▢▢

a) $3x^2 = 12x$

b) $x^2 + 2x - 15 = 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM B · NIERÓWNOŚCI

ZESTAWY B

1 Rozwiąż nierówność.



a) $x^2 - 3x - 10 < 0$

b) $x^2 + 4x + 4 > 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Przenieś na jedną stronę i rozwiąż.



a) $x(x + 3) \leq 10$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM C · ILOCZYN I RÓWNANIA WYMIERNE

ZESTAWY C

1 Podaj liczbę rozwiązań (albo ich sumę, gdy napisano „suma”).



a) $2x(x - 3)(x^2 + 4) = 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Rozwiąż (z dziedziną).



a) $\frac{x + 3}{x} = \frac{x}{2}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

Pełny trening (31 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W każdej sesji z lat 2024–2026 była dokładnie jedna nierówność kwadratowa za 2 punkty. Według sprawozdań CKE zdający uzyskali za nią średnio 68% punktów w 2025 i 73% w 2026, kiedy była

najłatwiejszym zadaniem otwartym arkusza. Najczęstsze błędy to zakończenie na pierwiastkach, zły kierunek przy odczycie z paraboli i pomyłki w Δ . Zadania zamknięte z równaniem w postaci iloczynowej miały łatwość 62–64%: gubiono czynnik bez pierwiastków albo liczono podwójny pierwiastek dwa razy. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 8 pkt · ok. 20 min

1 (0–2 pkt) Rozwiąż nierówność $2x^2 + 5x \leq 3x + 12$.



2 (0–1 pkt) Równanie $4x(x+2)^2(x^2+16) = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych dokładnie



- A. dwa rozwiązania B. trzy rozwiązania C. cztery D. pięć rozwiązań
rozwiązania

3 (0–1 pkt) Równanie $(x+5)(x-m)(3x-6) = 0$ ma trzy różne rozwiązania, których suma jest równa 4. Wtedy



- A. $m = -7$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 7$

4 (0–1 pkt) Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-x^2 + 4 > 0$ jest



- A. $(-2, 2)$ B. C. $(-4, 4)$ D. $(-\infty, 2)$
 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

5 (0–3 pkt) Rozwiąż równanie $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{x+1}{2x}$. Podaj rozwiązania należące do przedziału $(0, +\infty)$.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „Policzyłem pierwiastki, więc koniec.”

To 1 punkt z 2. Zbiór rozwiązań nierówności trzeba zapisać.

× „ $x^2 \leq 9$, więc $x \leq 3$.”

$x^2 \leq 9 \iff -3 \leq x \leq 3$. Pierwiastkowanie nierówności gubi ujemne liczby.

× „ $5x^2 = 15x$, dzielę przez x : $x = 3$.”

Zgubione rozwiązanie $x = 0$. Wyłączaj, nie dziel.

× „ $x^2 + 9 = 0$ daje $x = \pm 3$.”

$x^2 = -9$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

× „ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, więc $A \cdot C = B \cdot D$.”

Na krzyż to $A \cdot D = B \cdot C$. Pomyłka jest błędem metody: 0 punktów.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Dla $a > 0$ i $\Delta > 0$: gdzie jest zbiór rozwiązań $ax^2 + bx + c < 0$?

Miedzy pierwiastkami.

2 Jaki jest zbiór rozwiązań $x^2 + 1 > 0$?

$\mathbb{R}$.

3 Ile rozwiązań ma $(x - 2)^2(x + 2) = 0$?

Dwa: 2 i -2 .

4 Co trzeba zrobić z rozwiązaniami równania wymiernego?

Sprawdzić, czy należą do dziedziny (i do przedziału, jeśli zadanie go podaje).

KWADRATOWE

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$a > 0$: > 0 na zewnątrz, < 0 między

ILOCZYN

zero, gdy któryś czynnik zero

$x^2 + k, k > 0$: brak pierwiastków

pierwiastek podwójny liczymy raz

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na Δ , pierwiastki i postać iloczynową trójmianu. Algorytmu nierówności broszura nie podaje.

Dalej: dla rozszerzenia nierówności wielomianowe (lekcja 3.3 Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe) i wzory Viète'a z parametrem (3.6 Wzory Viète'a i równania z parametrem); funkcję kwadratową opisuje lekcja 5.3 Funkcja kwadratowa: trzy postacie i wykres.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\Delta = 25 + 56 = 81$
2. $x = \frac{5 \mp 9}{2}$: -2 i 7 .
2. $(3x - 1)^2 = 0$: jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{3}$.

Zadania • część 2

1. $x^2 - 4x - 12 \leq 0$
2. $\Delta = 64$, pierwiastki -2 i 6 .
3. $x \in [-2, 6]$.
1. $-(x - 3)^2 < 0 \iff (x - 3)^2 > 0$
2. $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Zadania • część 3

1. $-1, -4, 4$: trzy rozwiązania.
1. $0, \pm\sqrt{5}$; $x^2 + x + 1$ ma $\Delta = -3 < 0$.
2. Trzy rozwiązania.
1. Rozwiązania $3, 2, -m$.
2. Jeśli $-m \notin \{2, 3\}$: $5 - m = 10$, więc $m = -5$ ($-m = 5 \checkmark$).

Zadania • część 4

1. Dziedzina $x \neq \pm 1$.
2. $(x + 2)(x + 1) = 2x(x - 1)$, czyli $x^2 + 3x + 2 = 2x^2 - 2x$.
3. $x^2 - 5x - 2 = 0$, $x = \frac{5 \mp \sqrt{33}}{2}$.
4. Do $(1, +\infty)$ należy tylko $\frac{5 + \sqrt{33}}{2} \approx 5,37$.

Zestawy A

1. a) $0, 4$ b) $-5, 3$

Zestawy B

1. a) $(-2, 5)$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
2. a) $[-5, 2]$

Zestawy C

1. a) 2
2. a) $x \neq 0; 1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Jedna strona. $2x^2 + 2x - 12 \leq 0$, czyli $x^2 + x - 6 \leq 0$.
2. Pierwiastki. $\Delta = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
3. Zbiór. ramiona w górę, parabola pod osią między pierwiastkami: $x \in [-3, 2]$.
1 pkt za pierwiastki -3 i 2 . 2 pkt za zbiór $[-3, 2]$ (albo za poprawny rysunek z zaznaczonym zbiorem).

Uwaga: zapis zbioru musi jednoznacznie pokazywać domknięcie końców.

2. A.

1. 0 i -2 ; czynnik $x^2 + 16$ nie ma pierwiastków.
2. D to „pięć czynników liniowych”, C to ± 4 z $x^2 + 16$.

3. D.

1. Rozwiązania -5 , m , 2 .
2. $-3 + m = 4$, więc $m = 7$ (różne od -5 i $2 \checkmark$).

4. A.

1. $x^2 < 4$
2. $-2 < x < 2$.

5. 1. Dziedzina. $x \neq -2$, $x \neq 0$.

2. Na krzyż. $2x(3x - 1) = (x + 1)(x + 2)$, czyli $6x^2 - 2x = x^2 + 3x + 2$.

3. Kwadratowe. $5x^2 - 5x - 2 = 0$, $\Delta = 25 + 40 = 65$:

$$x = \frac{5 \mp \sqrt{65}}{10}.$$

4. Wybór. $\frac{5 - \sqrt{65}}{10} < 0$, $\frac{5 + \sqrt{65}}{10} \approx 1,31 > 0$.

1 pkt za równanie kwadratowe $5x^2 - 5x - 2 = 0$. 2 pkt za oba rozwiązania. 3 pkt za wybór $x = \frac{5 + \sqrt{65}}{10}$.

Uwaga: błędne wymnożenie, np. $(3x - 1)(x + 1) = (x + 2) \cdot 2x$, to błąd metody i daje 0 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 3.2: Równania i nierówności kwadratowe · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości, błędy i punktacja według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt3_2.py).