

Równania i nierówności liniowe, przekształcenia równoważne

Równanie liniowe rozwiąże każdy, ale na maturze punkty giną w trzech miejscach: przy minusie przed ułamkiem, przy dzieleniu nierówności przez liczbę ujemną i przy równaniu z niewiadomą w mianowniku, gdy nie zapisano dziedziny. Ta lekcja dotyczy tych trzech miejsc oraz pytań o największą albo najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
III.1, III.2, III.3

W TEJ LEKCJI

- 0 Jeden minus, dwa wyniki
- 1 Przekształcenia równoważne
- 2 Nierówności liniowe
- 3 Równania sprzeczne i tożsamościowe
- 4 Proste równania wymierne
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Jeden minus, dwa wyniki

Nierówność $5 - \frac{x-3}{2} \geq x$. Po pomnożeniu przez 2 trzeba napisać $10 - (x-3) \geq 2x$, czyli $10 - x + 3 \geq 2x$, i wychodzi $x \leq \frac{13}{3}$. Kto zgubi nawias, dostanie $10 - x - 3 \geq 2x$, czyli $x \leq \frac{7}{3}$. Różnica to jeden znak, ale w zadaniu „podaj największą liczbę całkowitą” daje odpowiedź 2 zamiast 4. Kreska ułamkowa działa jak nawias, więc minus przed ułamkiem zmienia znak **całego** licznika.

Przekształcenia równoważne

CO WOLNO ZROBIĆ, NIE ZMIENIAJĄC ZBIORU ROZWIĄZAŃ

- Dodać lub odjąć to samo wyrażenie po obu stronach (przenieść wyraz na drugą stronę ze zmienionym znakiem).
- Pomnożyć lub podzielić obie strony przez tę samą liczbę **różną od zera**. W nierówności: przez liczbę dodatnią zwrot zostaje, przez **ujemną się odwraca**.
- Mnożenie przez wyrażenie z niewiadomą (np. $x - 1$) jest równoważne tylko tam, gdzie to wyrażenie jest różne od zera. Stąd dziedzina równania wymiernego.

Przykład 1.1

Równanie z uławkami

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{4} = 2$.

- 1 Mnożymy przez 12: $4(2x+1) - 3(x-2) = 24$.
- 2 $8x + 4 - 3x + 6 = 24$, czyli $5x = 14$.

Wynik: $x = \frac{14}{5}$.

Sprawdzenie: $\frac{33/5}{3} - \frac{4/5}{4} = \frac{11}{5} - \frac{1}{5} = 2 \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

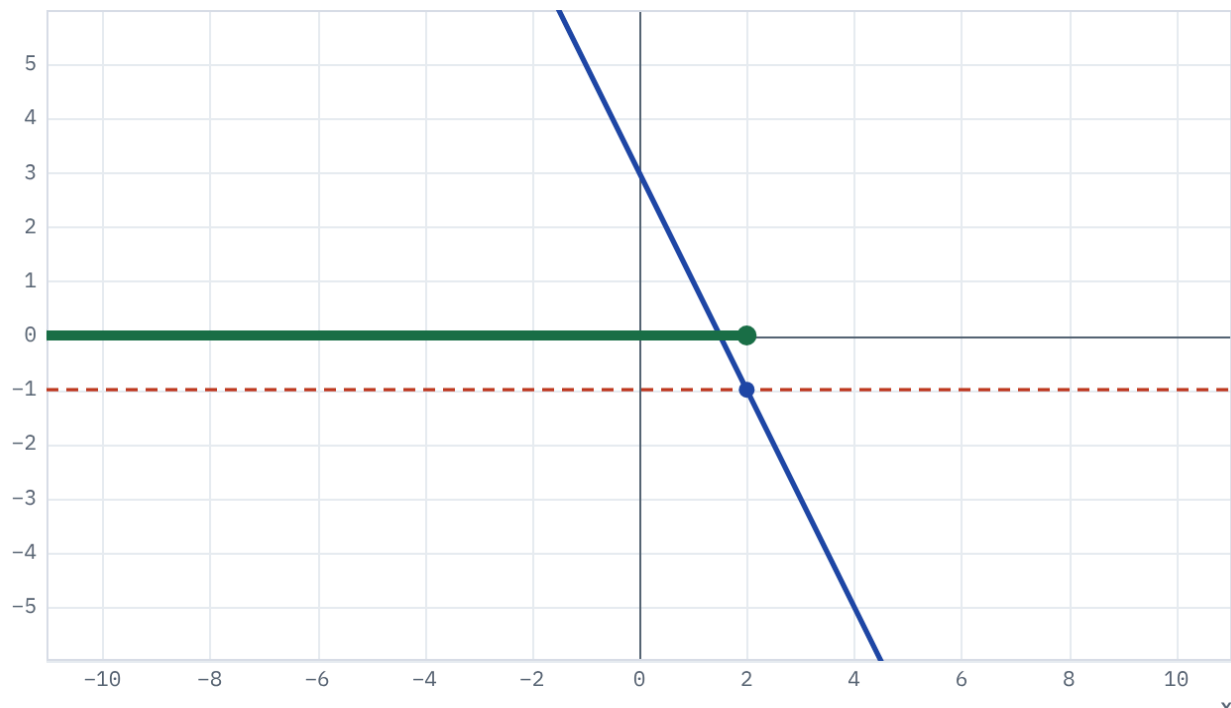
- 1 Rozwiąż równanie $3(x-2) - 2(1-x) = 7$.

- 2 Rozwiąż równanie $\frac{x}{2} - \frac{3-x}{6} = 1$.

2 Nierówności liniowe

Nierówność $ax + b \geq c$ to pytanie, gdzie prosta $y = ax + b$ leży nad prostą poziomą $y = c$. Gdy $a < 0$, prosta opada, więc leży nad $y = c$ na lewo od punktu przecięcia. Zmiana zwrotu po podzieleniu przez liczbę ujemną odpowiada temu, co widać na wykresie.

SYMULACJA 1 Nierówność $ax + b \geq c$ na wykresie. Zmieniaj a, b, c i zwrot. Zielony zbiór na osi Ox to rozwiązania; puste kółko oznacza nierówność ostrą. Przetaw a z dodatniego na ujemne i zobacz, jak zbiór „przeskakuje” na drugą stronę. Ustaw $a = 0$: nierówność staje się sprzeczna albo tożsamościowa.



— $y = ax + b$ — $y = c$ — zbiór rozwiązań

nierówność $-2x + 3 \geq -1$

krok $-2x \geq -4 \rightarrow x \leq 2$ (dzielenie przez liczbę ujemną zmienia zwrot)

zbiór rozwiązań $(-\infty, 2]$

Prosta opada ($a < 0$): po prawej stronie punktu przecięcia jest pod prostą $y = c$. Dlatego po podzieleniu przez $a < 0$ zwrot nierówności się odwraca.

Stan na rysunku: $-2x + 3 \geq -1$; zbiór rozwiązań $(-\infty, 2]$.

Przykład 2.1

Największa liczba całkowita

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{3-2x}{4} > \frac{x}{3} - 1$.

- 1 Mnożymy przez 12: $3(3-2x) > 4x-12$.
- 2 $9-6x > 4x-12$, czyli $-10x > -21$.
- 3 Dzielimy przez -10 , zwrot się odwraca: $x < \frac{21}{10} = 2,1$.

Wynik: zbiór rozwiązań $(-\infty, \frac{21}{10})$, największa liczba całkowita to 2.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Rozwiąż nierówność $4-3x \leq 2x+14$.

- 2 Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x+5}{3} \geq \frac{1-x}{2}$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

3 Równania sprzeczne i tożsamościowe

🔔 GDY x ZNIKA

Po uproszczeniu może zostać równość bez niewiadomej. Jeśli jest prawdziwa (np. $0=0$), równanie jest **tożsamościowe**: każda liczba je spełnia. Jeśli fałszywa (np. $0=5$), równanie jest **sprzeczne**: zbiór rozwiązań jest pusty. Tak samo z nierównościami.

Przykład 3.1

Parametr, przy którym równanie jest sprzeczne

Dla jakiej wartości m równanie $(m - 2)x = m + 1$ nie ma rozwiązań?

- 1 Dla $m \neq 2$ jest jedno rozwiązanie $x = \frac{m+1}{m-2}$.
- 2 Dla $m = 2$: $0 \cdot x = 3$, sprzeczność.

Wynik: $m = 2$. (Tożsamościowe byłoby, gdyby jednocześnie $m - 2 = 0$ i $m + 1 = 0$, co jest niemożliwe.)

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Rozwiąż równanie $2(x + 3) - x = x + 6$.

- 2 Rozwiąż nierówność $3(x - 1) > 3x + 2$.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

4

Proste równania wymierne

 **RÓWNANIE** $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

1. Zapisz **założenie**: $B \neq 0$ i $D \neq 0$ (wyznacz wykluczone liczby).
2. Pomnóż „na krzyż”: $A \cdot D = B \cdot C$.
3. Rozwiąż i **odrzuć** rozwiązania spoza dziedziny.

Przykład 4.1

Z założeniem

Rozwiąż równanie $\frac{x+6}{x-2} = \frac{x}{3x-6}$. Zapisz konieczne założenie.

- 1 Założenie: $x - 2 \neq 0$ i $3x - 6 \neq 0$, czyli $x \neq 2$.
- 2 $3x - 6 = 3(x - 2)$, więc mnożymy obie strony przez $3(x - 2)$: $3(x + 6) = x$.
- 3 $3x + 18 = x$, więc $x = -9$, i $-9 \neq 2$ ✓.

Wynik: $x = -9$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 6 min

1 Rozwiąż równanie $\frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{3}$.

2 Rozwiąż równanie $\frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 30 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · RÓWNANIA

ZESTAWY A

1 Rozwiąż równanie.

a) $5x - 7 = 2x + 8$ b) $\frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{5}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

ZESTAWY B

1 Rozwiąż nierówność.



a) $3 - 2x > 7$

b) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} < 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podaj największą (N) albo najmniejszą (M) liczbę całkowitą spełniającą nierówność.



a) N: $7 - \frac{1-3x}{2} \geq 4x$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

ZESTAWY C

1 Podaj zbiór rozwiązań.



a) $3(x-2) = 3x-6$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zapisz założenie i rozwiąż.



a) $\frac{3}{x-2} = 1$

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

Pełny trening (30 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach z lat 2024–2026 ten dział to zadania zamknięte (największa albo najmniejsza liczba całkowita spełniająca nierówność, wybór przedziału, proste równanie z niewiadomą w mianowniku) i zadania otwarte za 3 punkty z równaniem wymiernym, w których osobno punktuje się zapisane założenie. Według sprawozdań CKE zadanie zamknięte z tego działu w maju

2025 rozwiązało 73% zdających, a proste równanie wymierne w maju 2026 było najłatwiejszym zadaniem arkusza (85%). Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

- 1 (0-1 pkt) Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $6 - \frac{2-3x}{4} \geq 2x$ jest
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

- 2 (0-1 pkt) Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{1-4x}{3} \geq 2-x$ jest przedział
- A. $(-\infty, -5]$ B. $[-5, +\infty)$ C. $(-\infty, 5]$ D. $[5, +\infty)$

- 3 (0-1 pkt) Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{3}{7}$ jest liczba
- A. -24 B. $-\frac{1}{2}$ C. 3 D. 24

- 4 (0-1 pkt) Równanie $(2m+6)x = m+3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla
- A. $m = -6$ B. $m = -3$ C. $m = 0$ D. $m = 3$

- 5 (0-3 pkt) Rozwiąż równanie $\frac{x+5}{x+2} = \frac{2x}{2x+4}$. Zapisz konieczne założenie.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $-\frac{x-3}{2}$ po pomnożeniu przez 2 to $-x-3$.”

To $-(x-3) = -x+3$. Kreska ułamkowa jest nawiasem.

× „ $-2x > 6$, więc $x > -3$.”

Dzielenie przez -2 odwraca zwrot: $x < -3$.

× „Założenie w równaniu wymiernym to formalność.”

Za samo założenie jest punkt w kluczu, a bez niego można przyjąć rozwiązanie, które zeruje mianownik.

× „ $0 = 0$, więc $x = 0$.”

Równość prawdziwa bez x oznacza, że każda liczba (z dziedziny) jest rozwiązaniem.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Przez jaką liczbę nie wolno mnożyć równania?

Przez zero (i przez wyrażenie, które może być zerem, bez założenia).

2 Ile wynosi najmniejsza liczba całkowita spełniająca $x > -2,5$?

-2 .

3 Kiedy równanie $ax = b$ jest sprzeczne?

Gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

4 Jakie założenie ma równanie $\frac{3}{2x-5} = 1$?

$x \neq \frac{5}{2}$.

NIERÓWNOŚCI

mnożenie przez $k < 0$ odwraca zwrot

minus przed ułamkiem zmienia cały
licznik

$$0 \cdot x = 0: \mathbb{R}; 0 \cdot x = 5: \emptyset$$

RÓWNANIE WYMIERNE

1. założenie, 2. na krzyż, 3. odrzuć

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie zawiera reguł z tej lekcji.

Dalej: równania i nierówności kwadratowe (lekcja 3.2 Równania i nierówności kwadratowe, równania wielomianowe w postaci iloczynowej) i układy równań (4.1 Układy równań liniowych i zadania tekstowe).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $3x - 6 - 2 + 2x = 7$
2. $5x = 15$, więc $x = 3$.
1. $3x - (3 - x) = 6$
2. $4x = 9$, więc $x = \frac{9}{4}$.

Zadania • część 2

1. $-5x \leq 10$
2. $x \geq -2$, czyli $x \in [-2, +\infty)$.
1. $2(x + 5) \geq 3(1 - x)$
2. $2x + 10 \geq 3 - 3x$, czyli $5x \geq -7$, $x \geq -\frac{7}{5}$.
3. Najmniejsza całkowita: -1 .

Zadania • część 3

- $x + 6 = x + 6$: tożsamość, każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem.
- $3x - 3 > 3x + 2$, czyli $-3 > 2$: fałsz. Zbiór rozwiązań pusty.

Zadania • część 4

1. Założenie $x \neq -\frac{3}{2}$.
2. $3(x - 1) = 2x + 3$, więc $x = 6$.
1. Założenie $x \neq -1$.
2. Mnożymy przez $x + 1$: $2x = 2(x + 1) - 2 = 2x$.
3. Tożsamość dla $x \neq -1$: zbiór rozwiązań $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zestawy A

- a) 5 b) $\frac{11}{2}$

Zestawy B

- a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, 3)$
- a) 2

Zestawy C

- a) $\mathbb{R}$
- a) $x \neq 2$; $x = 5$ b) $x \neq 1$; brak rozwiązań

Zadania w stylu maturalnym

- B.
1. $24 - (2 - 3x) \geq 8x$

2. $22 + 3x \geq 8x$, czyli $5x \leq 22$

3. $x \leq 4,4$: największa całkowita 4.

2. A.

1. $1 - 4x \geq 6 - 3x$

2. $-x \geq 5$, czyli $x \leq -5$.

3. D.

1. $7(x - 3) = 3(2x + 1)$

2. $7x - 21 = 6x + 3$, więc $x = 24$.

4. B.

1. Dla $m = -3$: $0 \cdot x = 0$, tożsamość.

5. 1. **Założenie.** $x + 2 \neq 0$, czyli $x \neq -2$ (wtedy też $2x + 4 \neq 0$).

2. **Przekształcenie.** $2x + 4 = 2(x + 2)$; mnożymy przez $2(x + 2)$: $2(x + 5) = 2x$.

3. **Wynik.** $2x + 10 = 2x$, czyli $10 = 0$: sprzeczność. Równanie nie ma rozwiązań.

1 pkt za założenie $x \neq -2$ ALBO za przekształcenie do równania liniowego. **2 pkt** za oba. **3 pkt** za stwierdzenie, że równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: wynik „ $x = 0$ ” albo „każda liczba” to sygnał, że zgubiono czynnik 2 przy wymnażaniu.

Matura z matematyki · Lekcja 3.1: Równania i nierówności liniowe · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i punktacja według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt3_1.py).