

Wielomiany: dzielenie, rozkład na czynniki, pierwiastki całkowite

Na poziomie rozszerzonym wielomiany są narzędziem: do rozwiązywania równań i nierówności wyższych stopni, do zadań z parametrem i do dowodów nierówności. Ta lekcja to dzielenie przez dwumian, twierdzenie o reszcie, szukanie pierwiastków całkowitych i wzory na sześciany, którymi kończy się większość dowodów.

CZAS

ok. 40 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
II.R1, II.R2, II.R3,
II.R5

W TEJ LEKCJI

- 0 Zgadnij jeden pierwiastek
- 1 Wielomian i równość wielomianów
- 2 Dzielenie przez dwumian i twierdzenie o reszcie
- 3 Pierwiastki całkowite i rozkład
- 4 Wzory na sześciany i dowody nierówności
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Zgadnij jeden pierwiastek

Równania $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ nie rozwiąże się deltą. Ale jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego, tu liczby 6. Kandydatów jest osiem: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Pierwszy działa: $1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Po podzieleniu przez $x - 1$ zostaje trójmian:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2).$$

Jeden zgadnięty pierwiastek obniża stopień o jeden, a z trójmianem już sobie radzimy. Na tym schemacie opiera się cała lekcja.

Wielomian i równość wielomianów

WIELOMIAN

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$: wielomian stopnia n ; a_0 to wyraz wolny, $W(0) = a_0$.

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam stopień i równe współczynniki przy tych samych potęgach.

Liczba a jest pierwiastkiem W , gdy $W(a) = 0$.

Przykład 1.1

Porównanie współczynników

Wyznacz a i b , dla których $(x - 2)(x^2 + ax + b) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

- 1 Lewa strona: $x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 2a)x - 2b$.
- 2 Porównanie: $a - 2 = -5$, $b - 2a = 8$, $-2b = -4$.
- 3 $a = -3$, $b = 2$ (i wszystkie trzy równania się zgadzają: $2 + 6 = 8 \checkmark$).

Wynik: $a = -3$, $b = 2$, czyli $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(x^2 - 3x + 2) = (x - 2)^2(x - 1)$.

- 1 Wyznacz a i b , dla których $(x+1)(x^2+ax+b) = x^3+4x^2+5x+2$.

podstawowe średnie trudniejsze

2 Dzielenie przez dwumian i twierdzenie o reszcie

DZIELENIE Z RESZTĄ I TWIERDZENIE BÉZOUTA

Dla wielomianu W i liczby a : $W(x) = (x-a)Q(x) + r$, gdzie Q ma stopień o jeden mniejszy, a reszta r jest liczbą.

Twierdzenie o reszcie: $r = W(a)$. W szczególności W dzieli się przez $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$.

Schemat Hornera (dzielenie przez $x-a$): przepisz pierwszy współczynnik, potem kolejno „pomnóż przez a i dodaj następny współczynnik”. Ostatnia liczba to reszta.

Przykład 2.1

Schemat Hornera

Podziel $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ przez $x-2$.

- 1 Współczynniki 2, -3, 4, -5; $a = 2$.
- 2 2; $2 \cdot 2 - 3 = 1$; $1 \cdot 2 + 4 = 6$; $6 \cdot 2 - 5 = 7$.

Wynik: $W(x) = (x-2)(2x^2 + x + 6) + 7$.

Sprawdzenie: $W(2) = 16 - 12 + 8 - 5 = 7 \checkmark$ (twierdzenie o reszcie).

Przykład 2.2

Parametr z twierdzenia o reszcie

Dla jakiej wartości m wielomian $x^3 + mx^2 - 4x + 4$ jest podzielny przez $x - 2$?

- 1 Warunek: $W(2) = 8 + 4m - 8 + 4 = 4m + 4 = 0$.

Wynik: $m = -1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Oblicz resztę z dzielenia $W(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ przez $x + 1$.

- 2 Podziel $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ przez $x - 3$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

3 Pierwiastki całkowite i rozkład

🔑 PIERWIASTKI WYMIERNE WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH

Pierwiastek całkowity jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 . Ogólniej: pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$ (nieskracalny) ma $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Przepis: wypisz kandydatów, znajdź jeden pierwiastek a , podziel przez $x - a$, rozłóż iloraz. Pierwiastek wielokrotny: a jest k -krotny, gdy $(x - a)^k$ dzieli W .

Przykład 3.1

Trzy pierwiastki całkowite

Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$.

- 1 Kandydaci: dzielniki 8, czyli $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. $W(1) = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$.
- 2 Horner przez $x - 1$: 1; 2; -8; 0. Iloraz $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$.

Wynik: $x \in \{-4, 1, 2\}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Rozłóż na czynniki $x^3 - 7x + 6$.



- 2 Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Wzory na sześciiany i dowody nierówności

WZORY NA SZEŚCIANY

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Strategia dowodu nierówności $L \geq P$: przenieś wszystko na jedną stronę, rozłóż $L - P$ na czynniki (grupowanie, wzory) i ustal znak każdego czynnika z założeń. Kwadrat jest nieujemny, a $a^2 + ab + b^2 > 0$ dla $(a, b) \neq (0, 0)$.

Przykład 4.1

Dowód nierówności (typ za 3 punkty)

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

- 1 $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)(a^2 - b^2)$.
- 2 $(a - b)(a - b)(a + b) = (a - b)^2(a + b)$.
- 3 $(a - b)^2 \geq 0$ i $a + b > 0$, więc iloczyn jest nieujemny.

Wniosek: $a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2) \geq 0$, co kończy dowód. Równość zachodzi tylko dla $a = b$.

Punktacja w takich zadaniach: 1 pkt za przeniesienie na jedną stronę i grupowanie; 2 pkt za postać iloczynową z kwadratem; 3 pkt za uzasadnienie znaku wszystkich czynników.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 12 min

- 1 Rozłóż na czynniki $27x^3 - 8$.

- 2 Wykaż, że $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6x^2 + 2$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

- 3 Wykaż, że dla każdej liczby $x \geq -1$ prawdziwa jest nierówność $x^3 + 1 \geq x^2 + x$.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 43 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · RESZTA I DZIELENIE

ZESTAWY A

1 Oblicz resztę z dzielenia $W(x)$ przez podany dwumian.



a) $x^3 - 2x + 5$, $x - 2$ b) $x^5 - 1$, $x - 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podziel schematem Hornera (podaj iloraz i resztę).



a) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ przez $x - 2$ b) $x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ przez $x - 3$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe ▣▣□ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM B · PIERWIASTKI I ROZKŁAD

ZESTAWY B

1 Rozłóż na czynniki liniowe.



a) $x^3 - 3x^2 - x + 3$ b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Rozwiąż równanie.



a) $x^3 - 7x - 6 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

3 Wyznacz parametr.



a) $x^3 + mx - 6$ jest
podzielny przez $x - 2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe ▣▣□ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM C · SZEŚCIANY I DOWODY

ZESTAWY C

1 Rozwiń albo rozłóż.



a) $(x + 2)^3$

b) $x^3 + 27$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zapisz $L - P$ w postaci iloczynu, z którego widać znak.



a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$,

b) $a^2 + \frac{2}{a} \geq 3$, $a > 0$

$a, b > 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Pełny trening (43 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych z lat 2025–2026 wielomiany pojawiały się głównie w dowodach nierówności za 3 punkty, w których kluczem był wzór na sześcian i rozkład na czynniki z kwadratem (łatwość 35% w 2025 i 44% w 2026). Szukanie pierwiastków całkowitych i dzielenie przez dwumian było w informatorze CKE i jest potrzebne w nierównościach wielomianowych (3.3 Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe) oraz zadaniach z parametrem. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 12 pkt · ok. 30 min

1 (0–2 pkt) Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{10} + x^5 + 1$ przez dwumian $x + 1$. Zapisz obliczenia.

2 (0–3 pkt) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $(a + b)^3 \geq 4ab(a + b)$.

3 (0–3 pkt) Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

4 (0–4 pkt) Wielomian $W(x) = x^3 + px^2 + qx - 6$ ma pierwiastek 1, a reszta z dzielenia W przez $x + 1$ jest równa -8 . Wyznacz p i q oraz wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu W .

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Najczęstsze błędy

- × „Reszta z dzielenia przez $x + 2$ to $W(2)$.”

$x + 2 = x - (-2)$, więc reszta to $W(-2)$.

- × „W schemacie Hornera pomijam zerowe współczynniki.”

Każda potęga musi mieć swoje miejsce: $x^4 - 1$ to współczynniki $1, 0, 0, 0, -1$.

- × „ $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.”

Brakuje $3a^2b + 3ab^2$. Sprawdź: $(1 + 1)^3 = 8 \neq 2$.

- × „Mam $(a - b)^2(a + b)$, więc to jest dodatnie.”

Trzeba to uzasadnić z założeń: $(a - b)^2 \geq 0$ zawsze, a $a + b > 0$, bo $a, b > 0$. Bez tego zdania nie ma ostatniego punktu.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaka jest reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x - a$?

$W(a)$.

- 2 Którzy kandydaci na pierwiastki całkowite ma $x^3 + \dots + 10$?

Dzielniki 10: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.

- 3 Jak rozłożyć $x^3 + 8$?

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

- 4 Dlaczego $x^2 + x + 1 > 0$ dla każdego x ?

$\Delta = 1 - 4 < 0$ i współczynnik przy x^2 dodatni.

DZIELENIE I PIERWIASTKI

$$W(x) = (x - a)Q(x) + W(a)$$

pierwiastek całkowity $| a_0$

Horner: mnoż przez a , dodaj następny

SZEŚCIANY

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Wzory na sześciiany są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”. Twierdzenia o reszcie, schematu Hornera i twierdzenia o pierwiastkach wymiernych broszura nie zawiera.

Dalej: nierówności wielomianowe (lekcja 3.3 Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe) i wyrażenia wymierne na poziomie rozszerzonym (3.4 Wyrażenia, równania i nierówności wymierne).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$
2. $a+1=4, a+b=5, b=2$
3. $a=3, b=2$.

Zadania • część 2

1. $x+1 = x - (-1)$, więc $r = W(-1)$
2. $= 1 - 3 - 1 - 2 = -5$.
1. Horner: $1; 1 \cdot 3 - 6 = -3; -3 \cdot 3 + 11 = 2; 2 \cdot 3 - 6 = 0$.
2. Iloraz $x^2 - 3x + 2$, reszta 0.

Zadania • część 3

1. $W(1) = 0$; Horner: $1; 1; -6; 0$.
2. $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$
3. $W(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$.
1. $W(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$.
2. Horner przez $x-2$: $2; 1; -1; 0$, iloraz $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1)$.
3. Pierwiastki $2, \frac{1}{2}, -1$.

Zadania • część 4

- $(3x)^3 - 2^3 = (3x-2)(9x^2 + 6x + 4)$.
1. $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$
2. $= 6x^2 + 2$.
1. $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2 - 1)$
2. $= (x-1)^2(x+1)$.
3. $(x-1)^2 \geq 0$ i $x+1 \geq 0$, więc iloczyn jest nieujemny.

Zestawy A

- a) 9 b) 0
- a) $x^2 - 2x - 3, r = 0$ b) $x^3 + 2, r = 1$

Zestawy B

- a) $(x-3)(x-1)(x+1)$ b) $(x-2)^3$
- a) $-2, -1, 3$ b) $1, 2$
- a) $m = -1$

Zestawy C

- a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

2. a) $(a-b)^2(a+b)$ b) $\frac{(a-1)^2(a+2)}{a}$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. **Twierdzenie o reszcie.** $r = W(-1)$.

2. **Wynik.** $(-1)^{10} + (-1)^5 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$.

1 pkt za zapis $r = W(-1)$. 2 pkt za $r = 1$.

2. 1. **Jedna strona.** $(a+b)^3 - 4ab(a+b) = (a+b)((a+b)^2 - 4ab)$.

2. **Kwadrat.** $(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

3. **Znak.** $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, bo $a+b > 0$ i $(a-b)^2 \geq 0$.

1 pkt za wyłączenie $a+b$ (albo rozwinięcie sześcianu i uporządkowanie). 2 pkt za postać $(a+b)(a-b)^2$. 3 pkt za uzasadnienie znaku i wniosek.

3. 1. **Kandydaci.** dzielniki 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

2. **Pierwiastek.** $W(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$.

3. **Dzielenie.** Horner przez $x+1$: 1; -5; 6; 0, iloraz $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

4. **Odpowiedź.** pierwiastki -1, 2, 3.

1 pkt za wskazanie jednego pierwiastka z uzasadnieniem ($W(-1) = 0$). 2 pkt za podzielenie przez $x+1$ (albo rozkład przez grupowanie). 3 pkt za wszystkie pierwiastki.

4. 1. **Warunki.** $W(1) = 1 + p + q - 6 = 0$ i $W(-1) = -1 + p - q - 6 = -8$.

2. **Układ.** $p + q = 5$, $p - q = -1$, więc $p = 2$, $q = 3$.

3. **Dzielenie.** $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x-1)(x^2 + 3x + 6)$.

4. **Trójmian.** $\Delta = 9 - 24 < 0$: brak pierwiastków.

5. **Odpowiedź.** $p = 2$, $q = 3$; jedyny pierwiastek rzeczywisty to 1.

1 pkt za jeden z warunków $W(1) = 0$ albo $W(-1) = -8$. 2 pkt za p i q . 3 pkt za rozkład $(x-1)(x^2 + 3x + 6)$. 4 pkt za uzasadnienie, że innych pierwiastków nie ma.

Matura z matematyki · Lekcja 2.2: Wielomiany · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt2_2.py).