

Trening: wielomiany

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 2.2 Wielomiany: dzielenie, rozkład na czynniki, pierwiastki całkowite: reszta z dzielenia, schemat Hornera, pierwiastki całkowite, rozkład na czynniki i wzory na sześciiany. Na końcu zadania w stylu arkusza rozszerzonego.

POZIOM A · RESZTA I DZIELENIE

ZESTAWY A

2 zestawy

1 Oblicz resztę z dzielenia $W(x)$ przez podany dwumian.



a) $x^3 - 2x + 5$, $x - 2$

b) $x^4 + x^3 - x - 1$, $x + 1$

c) $2x^3 - x^2 + 3$, $x + 2$

d) $x^5 - 1$, $x - 1$

e) $x^4 - 2x^2 + 7$, $x - 3$

f) $3x^3 + 2x - 4$, $x + 1$

2 Podziel schematem Hornera (podaj iloraz i resztę).



a) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ przez $x - 2$

b) $2x^3 + 3x^2 - 1$ przez $x + 1$

c) $x^3 - 8$ przez $x - 2$

d) $x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ przez $x - 3$

e) $x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ przez $x - 1$

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · PIERWIASTKI I ROZKŁAD

ZESTAWY B

3 zestawy

1 Rozłóż na czynniki liniowe.



a) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

b) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

c) $x^3 - 3x + 2$

d) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

e) $x^4 - 5x^2 + 4$

f) $2x^3 + x^2 - 8x - 4$

2 Rozwiąż równanie.



a) $x^3 - 7x - 6 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

c) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$

e) $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$

3 Wyznacz parametr.



a) $x^3 + mx - 6$ jest
podzielny przez $x - 2$

b) reszta z dzielenia
 $x^3 - 2x^2 + m$ przez $x + 1$
jest równa 4

c) $x = -3$ jest
pierwiastkiem
 $2x^3 + mx^2 - 9$

d) $x^3 + ax^2 + bx + 2$ dzieli
się przez $x - 1$ i przez $x + 2$

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

POZIOM C · SZEŚCIANY I DOWODY

ZESTAWY C

2 zestawy

1 Rozwiń albo rozłóż.



a) $(x + 2)^3$

b) $(2a - b)^3$

c) $x^3 + 27$

d) $8a^3 - 1$

e) $(1 + \sqrt{2})^3$

f) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2 Zapisz $L - P$ w postaci iloczynu, z którego widać znak.



a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$,
 $a, b > 0$

b) $x^3 + 1 \geq x^2 + x$, $x \geq -1$

c) $(a + b)^3 \geq 4ab(a + b)$,
 $a, b > 0$

d) $x^3 - 3x + 2 \geq 0$, $x \geq -2$

e) $a^2 + \frac{2}{a} \geq 3$, $a > 0$

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu rozszerzonym CKE: krótkie zadania zamknięte i zadania otwarte z pełnym rozwiązaniem. W dowodach ostatni punkt jest zawsze za uzasadnienie znaku każdego czynnika.

ZADANIA W STYLU ARKUSZA

6 zadań · 14 pkt

1 (0-1 pkt) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ przez dwumian $x - 2$ jest równa

A. -31

B. 1

C. 5

D. 9

2 (0-1 pkt) Wielomian $x^3 + mx^2 + 3x - 2$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$ dla

A. $m = -6$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = 6$

3 (0-2 pkt) Wielomian $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 3$.
Oblicz a i podaj iloraz z dzielenia W przez $x - 3$.

4 (0-3 pkt) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $a \neq 3b$, prawdziwa jest nierówność $(a + 3b)^3 > 12ab(a + 3b)$.

5 (0-3 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a prawdziwa jest nierówność $a^2 + \frac{54}{a} \geq 27$.

6 (0-4 pkt) Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 4$.

podstawowe średnie trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) 9 b) 0 c) -17 d) 0 e) 70 f) -9

2. a) $x^2 - 2x - 3, r = 0$ b) $2x^2 + x - 1, r = 0$ c) $x^2 + 2x + 4, r = 0$ d) $x^3 + 2, r = 1$ e) $x^2 + 3x - 2, r = -1$

Zestawy B

1. a) $(x-3)(x-1)(x+1)$ b) $(x+3)(x+1)(x-2)$ c) $(x-1)^2(x+2)$ d) $(x-2)^3$ e) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$ f) $(2x+1)(x-2)(x+2)$

2. a) $-2, -1, 3$ b) $-2, -1, 2$ c) 3 (trójmian $x^2 + x + 1$ bez pierwiastków) d) $1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ e) $1, 2$

3. a) $m = -1$ b) $m = 7$ c) $m = 7$ d) $a = 0, b = -3$

Zestawy C

1. a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$ c) $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$ d) $(2a-1)(4a^2 + 2a + 1)$ e) $7 + 5\sqrt{2}$ f) $(a-b)^3$

2. a) $(a-b)^2(a+b)$ b) $(x-1)^2(x+1)$ c) $(a+b)(a-b)^2$ d) $(x-1)^2(x+2)$ e) $\frac{(a-1)^2(a+2)}{a}$

Zadania w stylu arkusza

1. C.

1. $r = W(2)$

2. $= 8 - 12 + 10 - 1 = 5$.

3. A to $W(-2)$: znak pomyłony przy $x - 2$.

2. D.

1. $W(-1) = -1 + m - 3 - 2 = m - 6$

2. $m - 6 = 0$, więc $m = 6$.

3. 1. Warunek. $W(3) = 54 - 45 + 3a + 6 = 3a + 15 = 0$, więc $a = -5$.

2. Horner. współczynniki $2, -5, -5, 6$ i $a = 3: 2; 1; -2; 0$.

3. Iloraz. $2x^2 + x - 2$.

1 pkt za $a = -5$. 2 pkt za iloraz $2x^2 + x - 2$.

4. 1. Jedna strona. $(a+3b)^3 - 12ab(a+3b) = (a+3b)((a+3b)^2 - 12ab)$.

2. Kwadrat. $(a+3b)^2 - 12ab = a^2 - 6ab + 9b^2 = (a-3b)^2$.

3. Znak. $a+3b > 0$, bo $a, b > 0$; $(a-3b)^2 > 0$, bo $a \neq 3b$. Iloczyn jest dodatni.

1 pkt za wyłączenie $a+3b$ albo rozwinięcie sześcianu i uporządkowanie. 2 pkt za postać $(a+3b)(a-3b)^2 > 0$. 3 pkt za uzasadnienie znaku obu czynników, z wykorzystaniem $a \neq 3b$.

Uwaga: bez założenia $a \neq 3b$ nierówność byłaby tylko nieostra; ostrość wynika właśnie z tego założenia i trzeba to napisać.

5. 1. **Mnożenie przez $a > 0$.** $a^3 + 54 \geq 27a$, czyli $a^3 - 27a + 54 \geq 0$.
2. **Pierwiastek.** dla $a = 3$: $27 - 81 + 54 = 0$; Horner przez $a - 3$: 1; 3; -18; 0.
3. **Rozkład.** $a^2 + 3a - 18 = (a - 3)(a + 6)$, więc $a^3 - 27a + 54 = (a - 3)^2(a + 6)$.
4. **Znak.** $(a - 3)^2 \geq 0$ i $a + 6 > 0$, więc wyrażenie jest nieujemne.
1 pkt za przekształcenie do $a^3 - 27a + 54 \geq 0$ (z uzasadnieniem, że $a > 0$). 2 pkt za rozkład $(a - 3)^2(a + 6)$. 3 pkt za uzasadnienie znaku.

6. 1. **Kandydaci.** dzielniki 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
2. **Pierwiastek.** $W(2) = 8 - 24 + 12 + 4 = 0$.
3. **Dzielenie.** Horner przez $x - 2$: 1; -4; -2; 0, iloraz $x^2 - 4x - 2$.
4. **Trójmian.** $\Delta = 16 + 8 = 24$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}.$$

5. **Odpowiedź.** pierwiastki 2, $2 - \sqrt{6}$, $2 + \sqrt{6}$.

1 pkt za listę kandydatów albo wskazanie pierwiastka 2. 2 pkt za sprawdzenie $W(2) = 0$ i podzielenie.
3 pkt za poprawny iloraz i Δ . 4 pkt za wszystkie trzy pierwiastki.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 2.2 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na arkuszach, informatorze i zasadach oceniania CKE z lat 2025–2026. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt2_2.py).