

Wzory skróconego mnożenia i wyrażenia wymierne

Trzy wzory: kwadrat sumy, kwadrat różnicy i różnica kwadratów. Rozwija się nimi nawiasy, ale ważniejsze jest czytanie ich od tyłu: rozkład na czynniki, skracanie ułamków i liczenie wartości wyrażeń w głowie. Na nich opiera się też połowa dowodów z lekcji o podzielności.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

10 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 6
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: II.1,
II.2, II.3, II.4

W TEJ LEKCJI

- 0 $101^2 - 99^2$ w głowie
- 1 Trzy wzory w obie strony
- 2 Rozkład na czynniki
- 3 Wyrażenia wymierne
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

101² – 99² w głowie

Ile to jest $101^2 - 99^2$? Można podnieść do kwadratu i odjąć ($10\,201 - 9801$), ale prościej skorzystać z różnicy kwadratów:

$$101^2 - 99^2 = (101 - 99)(101 + 99) = 2 \cdot 200 = 400.$$

Ta sama sztuczka działa na wyrażeniach z literami: rozkład na czynniki pozwala skracać ułamki, liczyć wartości dla liczb z pierwiastkami i dowodzić podzielności. W maju 2025 i 2026 roku zadania z tej lekcji rozwiązało od 60% do 78% zdających; najtrudniejsze było działanie na wyrażeniach wymiernych.

Trzy wzory w obie strony

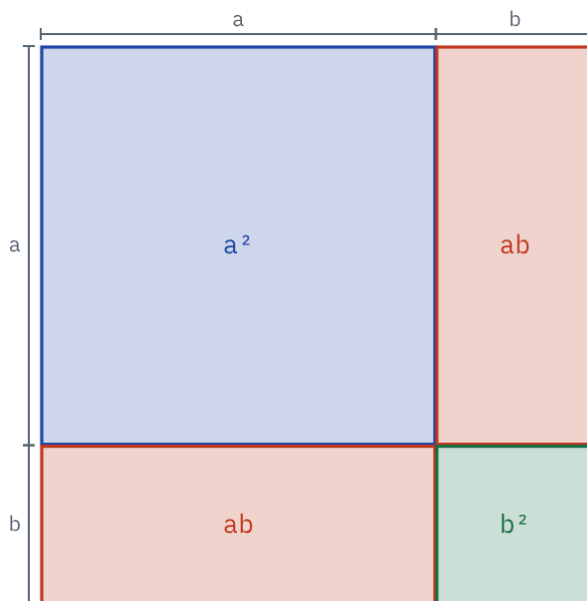
WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Czytane od lewej do prawej rozwijają nawiasy; od prawej do lewej *zwijają* wyrażenie w kwadrat albo iloczyn. Trójmian jest kwadratem, gdy środkowy wyraz to podwojony iloczyn: $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$.

SYMULACJA 1

Wzory jako pola. Kwadrat o boku $a + b$ dzieli się na a^2 , b^2 i dwa prostokąty ab . W trybie „ $a^2 - b^2$ ” z kwadratu wycinamy róg i przekładamy pasek tak, że powstaje prostokąt $(a + b) \times (a - b)$.



— a^2 — ab — b^2

$$(a + b)^2 \quad 49$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad 25 + 20 + 4$$

$$a^2 + b^2 \quad 29$$

Kwadrat o boku $a + b$ składa się z kwadratów a^2 i b^2 oraz dwóch prostokątów ab . Dlatego $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a nie $a^2 + b^2$: brakowałoby 20.

Stan na rysunku: $a = 5$, $b = 2$; $(a + b)^2 = 49 = 25 + 20 + 4$.

Przykład 1.1**Różnica dwóch kwadratów sum**

Zapisz w postaci ogólnej $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2$.

1 $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

2 $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

3 Różnica (uwaga na minus przed nawiasem): $4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 4x - 4$.

Wynik: $3x^2 + 16x + 5$.

Sprawdzenie dla $x = 1$: $25 - 1 = 24$ i $3 + 16 + 5 = 24$ ✓. Inna droga: różnica kwadratów, $((2x + 3) - (x - 2))((2x + 3) + (x - 2)) = (x + 5)(3x + 1)$.

Przykład 1.2

Zwijanie w kwadrat

Oblicz wartość $x^2 - 6x + 9$ dla $x = 3 + \sqrt{5}$.

1 $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

2 $(3 + \sqrt{5} - 3)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Wynik: 5. Bez zwijania trzeba by liczyć $(3 + \sqrt{5})^2 - 6(3 + \sqrt{5}) + 9$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 8 min

1 Rozwiń $(\sqrt{3} - 2)^2$.

2 Wymnóż $(2a + 5b)(2a - 5b)$.

3 Zapisz jako kwadrat: $x^2 + 14x + 49$ i $9y^2 - 12y + 4$.

4 Oblicz w pamięci $52 \cdot 48$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Rozkład na czynniki

KOLEJNOŚĆ PRZY ROZKŁADZIE

- Wyłącz wspólny czynnik przed nawias: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.
- Zastosuj wzór skróconego mnożenia: $x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$.
- Przy czterech wyrazach spróbuj grupowania: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1)$.

Przykład 2.1

Wyłączenie i wzór

Rozłóż na czynniki $x^3 - 6x^2 + 9x$.

- 1 $x(x^2 - 6x + 9)$.
- 2 $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Wynik: $x(x - 3)^2$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 8 min

- 1 Rozłóż na czynniki $2x^2 - 18$.

- 2 Rozłóż na czynniki $5x^3 - 10x^2 + 5x$.

- 3 Rozłóż na czynniki $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Wyrażenia wymierne

WYRAŻENIE WYMIERNE

To iloraz dwóch wielomianów, np. $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$. **Dziedzina:** wszystkie liczby, dla których mianownik nie jest zerem.

Skracać można tylko czynniki (po rozłożeniu licznika i mianownika), nigdy składniki sumy.

Mnożenie: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$; dzielenie: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$ (wtedy także $C \neq 0$).

Przykład 3.1

Iloczyn

Uprość $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x - 3}{x + 1}$ i podaj, dla jakich x wyrażenie ma sens.

- 1 Rozkład: $\frac{x(x - 3)}{(x - 3)^2} \cdot \frac{x - 3}{x + 1}$.
- 2 Dziedzina: $x \neq 3$ i $x \neq -1$.
- 3 Skracanie: $(x - 3)^2$ w mianowniku i $(x - 3) \cdot (x - 3)$ w liczniku.

Wynik: $\frac{x}{x + 1}$ dla $x \neq 3, x \neq -1$.

Przykład 3.2

Iloraz

Uprość $\frac{3}{x^2 - x} : \frac{6}{x^2 - 1}$.

- 1 Dzielenie to mnożenie przez odwrotność: $\frac{3}{x(x - 1)} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{6}$.
- 2 Dziedzina: $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$.

Wynik: $\frac{x + 1}{2x}$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 10 min

1 Skróć $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 5x}$ i podaj dziedzinę.

2 Uprość $\frac{2x + 6}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x}{4}$.

3 Uprość $\frac{x^2 - 4}{3x} : \frac{x - 2}{6x^2}$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 34 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WZORY

ZESTAWY A

1 Rozwiń i uprość.



a) $(x + 4)^2$

b) $(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zapisz jako kwadrat albo iloczyn.



a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

POZIOM B · ROZKŁAD I WARTOŚCI

ZESTAWY B

1 Rozłóż na czynniki.



a) $3x^2 - 12$

b) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Oblicz wartość wyrażenia (najpierw je zwiń).



a) $x^2 + 8x + 16$ dla

b) $x^2 - 2xy + y^2$ dla

$x = \sqrt{3} - 4$

$x = \sqrt{5} + 1, y = \sqrt{5} - 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

POZIOM C · WYRAŻENIA WYMIERNE

- 1 Uprość i podaj, dla jakich x wyrażenie ma sens.



a) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

b) $\frac{5x}{x^2 - 9} : \frac{10}{x - 3}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

Pełny trening (34 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach podstawowych z lat 2025–2026 tematy tej lekcji to zwykle jedno lub dwa zadania zamknięte: różnica dwóch kwadratów sum do zapisania w postaci ogólnej (72% w maju 2025), wartość trójmianu dla liczby z pierwiastkiem po zwinięciu w kwadrat (78% w maju 2026), rozkład wielomianu na czynniki, iloczyn lub iloraz wyrażeń wymiernych (60%). Wzory skróconego mnożenia są też potrzebne w każdym dowodzie podzielności. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

6 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

- 1 (0–1 pkt) Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2$ jest równe



A. $3x^2 + 16x + 5$

B. $3x^2 + 5$

C. $3x^2 + 8x + 5$

D. $5x^2 + 8x + 13$

- 2 (0–1 pkt) Wartość wyrażenia $x^2 - 6x + 9$ dla $x = 3 + \sqrt{5}$ jest równa



A. 5

B. $\sqrt{5}$

C. $14 + 6\sqrt{5}$

D. 9

- 3 (0–1 pkt) Wielomian $x^3 - 8x^2 + 16x$ jest równy



A. $x(x - 4)^2$

B. $x(x + 4)^2$

C. $x(x - 4)(x + 4)$

D. $(x - 4)^3$

- 4 (0–1 pkt) Dla każdej liczby $x \neq 3$, $x \neq -1$ wyrażenie $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x - 3}{x + 1}$ jest równe



A. $\frac{x}{x + 1}$

B. $\frac{x - 3}{x + 1}$

C. $\frac{x(x - 3)}{x + 1}$

D. $\frac{1}{x + 1}$

- 5 (0-1 pkt) Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. Dla każdej liczby rzeczywistej x : $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$. P / F

2. Dla każdej liczby $x \neq 1$: $\frac{x^2-1}{x-1} = x-1$. P / F

- 6 (0-2 pkt) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ dla $x = \sqrt{2} - 2$. Zapisz obliczenia.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

× „ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.”

Brakuje $2ab$, czyli dwóch prostokątów z symulacji. $(3+4)^2 = 49$, a $9+16 = 25$.

× „ $-(x-2)^2 = -x^2 - 4x + 4$.”

Minus przed nawiasem zmienia znak *każdego* wyrazu: $-(x^2 - 4x + 4) = -x^2 + 4x - 4$.

× „ $\frac{x+3}{x+5} = \frac{3}{5}$, bo skracam x .”

Skraca się tylko czynniki, a tu x jest składnikiem sumy. Ten ułamek nie da się uprościć.

× „Po skróceniu dziedyna przestaje mieć znaczenie.”

Wyrażenie po skróceniu jest równe wyjściowemu tylko w dziedzinie wyjściowego:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \text{ dla } x \neq 1.$$

× „ $x^2 + 6x + 9 = (x+9)^2$.”

Ostatni wyraz to b^2 , więc $b = 3$: $(x+3)^2$. Sprawdzaj środkowy wyraz: $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ ✓.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile to $(x - 5)^2$?

$$x^2 - 10x + 25.$$

2 Jak rozłożyć $x^2 - 49$?

$$(x - 7)(x + 7).$$

3 Kiedy trójmian $x^2 + bx + c$ jest kwadratem $(x + k)^2$?

$$\text{Gdy } b = 2k \text{ i } c = k^2.$$

4 Co trzeba zrobić przed skracaniem ułamka?

Rozłożyć licznik i mianownik na czynniki (i zapisać dziedzinę).

5 Ile to $201 \cdot 199$?

$$200^2 - 1 = 39\,999.$$

WZORY

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

WYRAŻENIA WYMIERNE

dzielność: mianownik $\neq 0$

skraca się czynniki, nie składniki

dzielenie: mnożenie przez odwrotność

Wzory skróconego mnożenia (także na sześciiany, potrzebne na poziomie rozszerzonym) są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”. Rozpoznawania ich „od tyłu” i reguły skracania broszura nie zawiera.

Dalej: na poziomie rozszerzonym wielomiany (2.2 Wielomiany: dzielenie, rozkład na czynniki, pierwiastki całkowite); na podstawowym funkcje (5.1 Funkcja i jej wykres: odczytywanie własności), a później równania wymierne w lekcji 3.1 Równania i nierówności liniowe, przekształcenia równoważne.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. 1. $3 - 4\sqrt{3} + 4$
2. $= 7 - 4\sqrt{3}$.
2. $4a^2 - 25b^2$.
3. 1. $(x + 7)^2$
2. $(3y - 2)^2$.
4. 1. $(50 + 2)(50 - 2) = 2500 - 4$
2. $= 2496$.

Zadania • część 2

1. 1. $2(x^2 - 9)$
2. $= 2(x - 3)(x + 3)$.
2. 1. $5x(x^2 - 2x + 1)$
2. $= 5x(x - 1)^2$.
3. 1. $x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4)$
2. $= (x - 3)(x - 2)(x + 2)$.

Zadania • część 3

1. 1. $\frac{(x - 5)(x + 5)}{x(x + 5)}$, dziedzina $x \neq 0, x \neq -5$.
2. $= \frac{x - 5}{x}$.
2. 1. $\frac{2(x + 3)}{x(x + 3)} \cdot \frac{x}{4}$ dla $x \neq 0, x \neq -3$
2. $= \frac{1}{2}$.
3. 1. $\frac{(x - 2)(x + 2)}{3x} \cdot \frac{6x^2}{x - 2}$ dla $x \neq 0, x \neq 2$
2. $= 2x(x + 2)$.

Zestawy A

1. a) $x^2 + 8x + 16$ b) $4x^2 - 3$
2. a) $(2x + 3)^2$ b) $(x - \sqrt{2})^2$

Zestawy B

1. a) $3(x - 2)(x + 2)$ b) $(x + 1)(x - 3)(x + 3)$
2. a) 3 b) 4

Zestawy C

1. a) $\frac{x + 4}{x}; x \neq 0, x \neq 4$ b) $\frac{x}{2(x + 3)}; x \neq \pm 3$

Zadania w stylu maturalnym

1. A.

1. $4x^2 + 12x + 9 - (x^2 - 4x + 4)$

2. $= 3x^2 + 16x + 5.$

3. C to zgubiona zmiana znaku przy $-4x$.

2. A.

1. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

2. $= (\sqrt{5})^2 = 5.$

3. A.

1. $x(x^2 - 8x + 16)$

2. $= x(x - 4)^2.$

4. A.

1. $\frac{x(x-3)}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x+1}$

2. $= \frac{x}{x+1}.$

5. PF.

1. $x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = 4x.$

2. $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, a nie $x-1$.

6. 1. Uproszczenie.

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2} \quad (x \neq -2).$$

2. Podstawienie. $\frac{\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}.$

3. Wynik. $\frac{\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}.$

1 pkt za uproszczenie do $\frac{x-2}{x+2}$ ALBO za poprawne podstawienie do wyrażenia wyjściowego. **2 pkt** za wynik $1 - 2\sqrt{2}$ (lub równoważny, np. $\frac{2-4\sqrt{2}}{2}$).

Matura z matematyki · Lekcja 2.1: Wzory skróconego mnożenia i wyrażenia wymierne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt2_1.py).