

# Arkusz próbny: poziom rozszerzony

Pełny arkusz w formie egzaminu rozszerzonego z lat 2025–2026: 13 zadań otwartych, 50 punktów, 180 minut, na końcu wiązka optymalizacyjna. Są w nim stałe punkty każdej sesji: wartość bezwzględna, parametr z wzorami Viète'a, równanie trygonometryczne, prawdopodobieństwo warunkowe, dowód, przekrój albo kąt w ostrosłupie i pochodna. Rozwiązuj na wersji do druku (strona treningu tej lekcji), a potem oceniaj się według podanej punktacji.

**CZAS**

180 min (jak na egzaminie) + ok. 60 min sprawdzania

**ZADANIA**

13 zadań otwartych · 50 pkt (od 2 do 7 pkt za zadanie)

**WYMAGANIA**

podstawa programowa, zakres rozszerzony: cały

**W TEJ LEKCJI**

- 0 Jak pracować z arkuszem
- 1 Zadania 1–13
- 2 Wynik i plan powtórki

## WARUNKI JAK NA EGZAMINIE

- 180 minut, broszura „Wybrane wzory matematyczne”, linijka, cyrkiel, prosty kalkulator.
- Średnio 3,5 minuty na punkt. Zaczynij od zadań, które rozpoznajesz od razu (u większości zdających: wartość bezwzględna, trygonometria, prawdopodobieństwo), wiązkę optymalizacyjną zostaw na koniec, ale nie na ostatnie 10 minut.
- W każdym zadaniu zapisuj etapy: klucz punktuje postęp, nawet bez doprowadzenia do końca (lekcja 0.1 Jak działa matura z matematyki: arkusz, punktacja, karta wzorów).
- Sprawdzaj surowo: punkt za etap tylko wtedy, gdy ten etap jest zapisany i poprawny.

## 1

## Zadania 1–13

### ARKUSZ ROZSZERZONY

13 zadań · 50 pkt · 180 min

1 (0–2 pkt) Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ .

2 (0–3 pkt) Rozwiąż nierówność  $|x - 1| + |x + 2| \leq 5$ .

3 (0–3 pkt) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ .

4 (0–4 pkt) Rozwiąż równanie  $\sin 2x = \cos x$  w przedziale  $[0, 2\pi]$ .

5 (0–5 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1^2 + x_2^2 = 8$ .

6 (0–3 pkt) Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 tworzymy losowo liczbę sześciocyfrową o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo, że cyfry 1 i 2 nie stoją obok siebie.

- 7 (0–4 pkt) Maszyna I wytwarza 60%, a maszyna II 40% wszystkich detali. Wadliwych jest 3% detali z maszyny I i 5% z maszyny II. Losowo wybrany detal okazał się wadliwy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wytworzyła go maszyna II. Wynik podaj w zaokrągleniu do części setnych.
- 
- 8 (0–4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości  $m$ , dla których prosta  $y = x + m$  jest styczna do okręgu  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ .
- 
- 9 (0–3 pkt) Czworokąt wypukły  $ABCD$  jest wpisany w okrąg i  $|AB| = |BC|$ . Wykaż, że przekątna  $DB$  jest dwusieczną kąta  $ADC$ .
- 
- 10 (0–5 pkt) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCD S$  krawędź podstawy ma długość 6, a wysokość ostrosłupa jest równa 3. Oblicz miarę kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi  $ABS$  i  $BCS$ .
- 
- 11 (0–3 pkt) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$  w punkcie o odciętej 2.
- 
- 12 (0–4 pkt) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 12, a suma kwadratów wszystkich jego wyrazów jest równa 48. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
- 
- 13 (0–7 pkt) Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o podstawie kwadratowej, w których suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest równa 24.
- 13.1. (0–3 pkt) Wykaż, że objętość takiego prostopadłościanu o krawędzi podstawy  $a$  wyraża się wzorem  $V(a) = 6a^2 - 2a^3$  dla  $a \in (0, 3)$ .
- 13.2. (0–4 pkt) Wyznacz wymiary prostopadłościanu o największej objętości i tę objętość.

■□□ podstawowe    ■■■ średnie    ■■■■ trudniejsze

## 2 Wynik i plan powtórki

Na poziomie rozszerzonym nie ma progu zdania, ale uczelnie przeliczają wynik procentowy. Oceń, w których zadaniach straciłeś punkty za brak etapu (metoda), a w których za rachunek: na te pierwsze pomoże powtórka lekcji, na drugie tylko trening.

Plan powtórki: która lekcja do którego zadania

| zadanie | pkt | temat                                  | lekcja                                                                                                                                           |
|---------|-----|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | 2   | granica ciągu, sprzężenie              | 6.4 Granice ciągów i szereg geometryczny                                                                                                         |
| 2       | 3   | nierówność z wartością bezwzględną     | 3.5 Równania i nierówności z wartością bezwzględną                                                                                               |
| 3       | 3   | dowód nierówności                      | 2.1 Wzory skróconego mnożenia i wyrażenia wymierne, 2.2 Wielomiany: dzielenie, rozkład na czynniki, pierwiastki całkowite                        |
| 4       | 4   | równanie trygonometryczne              | 7.4 Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne                                                                                      |
| 5       | 5   | parametr, wzory Viète'a                | 3.6 Wzory Viète'a i równania z parametrem                                                                                                        |
| 6       | 3   | prawdopodobieństwo z permutacjami      | 11.2 Permutacje, wariacje, kombinacje i symbol Newtona, 12.1 Prawdopodobieństwo klasyczne                                                        |
| 7       | 4   | prawdopodobieństwo całkowite, Bayes    | 12.3 Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i wzór Bayesa                                                                                       |
| 8       | 4   | prosta styczna do okręgu               | 9.3 Prosta i okrąg, dwa okręgi, styczna i prosta prostopadła                                                                                     |
| 9       | 3   | dowód: kąty wpisane, czworokąt wpisany | 8.1 Okrąg: cięciwy, styczne, kąty wpisane i środkowe, wycinek koła, 8.6 Czworokąty wpisane i opisane, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa |
| 10      | 5   | kąt dwuścienny w ostrosłupie           | 10.1 Proste, płaszczyzny i kąty w przestrzeni, 10.3 Przekroje brył i twierdzenie o trzech prostopadłych                                          |
| 11      | 3   | pochodna, styczna                      | 13.2 Pochodna: definicja, interpretacja i obliczanie                                                                                             |
| 12      | 4   | szereg geometryczny                    | 6.4 Granice ciągów i szereg geometryczny                                                                                                         |
| 13      | 7   | wiązka optymalizacyjna                 | 13.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji, 13.4 Zadania optymalizacyjne z pochodną                                                                  |

*To ostatnia lekcja kursu. Wróć do lekcji z tabeli, w których straciłeś najwięcej punktów, i do ich treningów rachunkowych.*



# Odpowiedzi

## Arkusz rozszerzony

1. 1. **Sprzężenie.**  $\sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}.$

2. **Granica.**  $\frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$

1 pkt za przekształcenie przez sprzężenie. 2 pkt za  $\frac{3}{2}.$

2. 1. **Przedziały.** punkty zerowania  $-2$  i  $1$ .

2.  $x < -2$ .  $-(x-1) - (x+2) \leq 5$ :  $-2x-1 \leq 5$ ,  $x \geq -3$ :  $x \in [-3, -2)$ .

3.  $-2 \leq x < 1$ .  $-(x-1) + (x+2) = 3 \leq 5$ : cały przedział  $[-2, 1)$ .

4.  $x \geq 1$ .  $2x+1 \leq 5$ ,  $x \leq 2$ :  $x \in [1, 2]$ .

5. **Wynik.**  $x \in [-3, 2]$ .

1 pkt za rozpatrzenie przedziałów i poprawne rozwiązanie w jednym z nich. 2 pkt za poprawne rozwiązania w dwóch przedziałach. 3 pkt za zbiór  $[-3, 2]$ . (Albo: suma odległości od 1 i od  $-2$  wynosi co najmniej 3; równa 5 dla  $x = -3$  i  $x = 2$ .)

3. 1. **Różnica.**  $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)(a^2 - b^2).$

2. **Rozkład.**  $= (a-b)^2(a+b).$

3. **Znak.**  $(a-b)^2 \geq 0$  i  $a+b > 0$ , więc różnica jest nieujemna. ■

1 pkt za zapisanie różnicy i pogrupowanie. 2 pkt za postać  $(a-b)^2(a+b)$ . 3 pkt za uzasadnienie znaku.

4. 1. **Iloczyn.**  $2 \sin x \cos x - \cos x = 0$ ,  $\cos x(2 \sin x - 1) = 0$ .

2.  $\cos x = 0$ .  $x = \frac{\pi}{2}$  albo  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

3.  $\sin x = \frac{1}{2}$ .  $x = \frac{\pi}{6}$  albo  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

4. **Wynik.**  $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}.$

1 pkt za wzór na  $\sin 2x$  i postać iloczynową. 2 pkt za rozwiązania jednego z równań. 3 pkt za rozwiązanie drugiego. 4 pkt za komplet w przedziale. Dzielenie przez  $\cos x$  gubi dwa rozwiązania i daje najwyżej 2 pkt.

5. 1.  $\Delta > 0$ .  $4m^2 - 4(m+2) > 0 \iff m^2 - m - 2 > 0 \iff m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$

2. **Viète.**  $x_1 + x_2 = 2m$ ,  $x_1x_2 = m+2$ ;  $x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 2(m+2).$

3. **Równanie.**  $4m^2 - 2m - 4 = 8$ ,  $2m^2 - m - 6 = 0$ :  $m = 2$  albo  $m = -\frac{3}{2}$ .

4. **Część wspólna.**  $m = 2$  odpada (wtedy  $\Delta = 0$ ), zostaje  $m = -\frac{3}{2}$ .

1 pkt za warunek  $\Delta > 0$  i jego rozwiązanie. 2 pkt za zapis  $x_1^2 + x_2^2$  przez wzory Viète'a. 3 pkt za równanie z  $m$ . 4 pkt za jego rozwiązanie. 5 pkt za  $m = -\frac{3}{2}$  po uwzględnieniu warunku  $\Delta > 0$ .

6. 1.  **$\Omega$ .**  $|\Omega| = 6! = 720$ .

2. **Zdarzenie przeciwne.** 1 i 2 obok siebie: blok na 5! sposobów, w bloku 2 kolejności: 240.

3. **Wynik.**  $P = 1 - \frac{240}{720} = \frac{2}{3}.$

1 pkt za  $|\Omega| = 720$ . 2 pkt za liczbę ustawień sprzyjających albo przeciwnych. 3 pkt za  $\frac{2}{3}.$

7. 1. Dane.  $P(M_1) = 0,6$ ,  $P(M_2) = 0,4$ ,  $P(W|M_1) = 0,03$ ,  $P(W|M_2) = 0,05$ .

2. Całkowite.  $P(W) = 0,018 + 0,020 = 0,038$ .

3. Bayes.  $P(M_2|W) = \frac{0,020}{0,038} = \frac{10}{19}$ .

4. Wynik.  $\approx 0,53$ .

1 pkt za dane. 2 pkt za  $P(W)$ . 3 pkt za wzór Bayesa z liczbami. 4 pkt za  $\approx 0,53$ .

8. 1. Okrąg.  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ ;  $S = (2, -1)$ ,  $r = 5$ .

2. Odległość. prosta  $x - y + m = 0$ :  $d = \frac{|2+1+m|}{\sqrt{2}}$ .

3. Styczność.  $\frac{|m+3|}{\sqrt{2}} = 5$ ,  $|m+3| = 5\sqrt{2}$ .

4. Wynik.  $m = -3 + 5\sqrt{2}$  albo  $m = -3 - 5\sqrt{2}$ .

1 pkt za środek i promień. 2 pkt za wzór na odległość środka od prostej. 3 pkt za równanie  $|m+3| = 5\sqrt{2}$ . 4 pkt za obie wartości. (Albo: układ równań i warunek  $\Delta = 0$ .)

9. 1. Łuki. równe cięciwy  $AB$  i  $BC$  wyznaczają równe łuki  $AB$  i  $BC$  (te, które nie zawierają punktu  $D$ ).

2. Kąty wpisane.  $\angle ADB$  jest oparty na łuku  $AB$ , a  $\angle BDC$  na łuku  $BC$ ; kąty wpisane oparte na równych łukach są równe.

3. Wniosek.  $\angle ADB = \angle BDC$ , więc  $DB$  dzieli kąt  $ADC$  na połowy. ■

1 pkt za zauważenie równości łuków (albo kątów środkowych). 2 pkt za równość kątów wpisanych z uzasadnieniem. 3 pkt za wniosek.

10. 1. Krawędź boczna. połowa przekątnej podstawy  $3\sqrt{2}$ ;  $|SB| = \sqrt{9+18} = 3\sqrt{3}$ .

2. Wysokość ściany.  $h_s = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ ;  $P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ .

3. Wysokość na SB.  $|AK| = \frac{2 \cdot 9\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$ ; z symetrii  $|CK| = 2\sqrt{6}$ , a  $\angle AKC$  jest szukanym kątem.

4. Tw. cosinusów.  $|AC|^2 = 72 = 24 + 24 - 2 \cdot 24 \cos \varphi$ ,  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ .

5. Wynik.  $\varphi = 120^\circ$ .

1 pkt za  $|SB|$  i  $h_s$ . 2 pkt za wskazanie kąta  $AKC$  (wysokości ścian opuszczone na wspólną krawędź). 3 pkt za  $|AK| = 2\sqrt{6}$ . 4 pkt za  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ . 5 pkt za  $120^\circ$ .

11. 1. Wartość.  $f(2) = \frac{5}{2}$ .

2. Pochodna.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ,  $f'(2) = \frac{3}{4}$ .

3. Styczna.  $y = \frac{3}{4}(x-2) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + 1$ .

1 pkt za pochodną. 2 pkt za  $f'(2) = \frac{3}{4}$  i  $f(2) = \frac{5}{2}$ . 3 pkt za równanie stycznej.

12. 1. Układ.  $\frac{a_1}{1-q} = 12$ ,  $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 48$ ,  $|q| < 1$  (kwadraty tworzą ciąg o ilorazie  $q^2$ ).

2. Dzielenie. drugie przez kwadrat pierwszego:  $\frac{1-q}{1+q} = \frac{48}{144} = \frac{1}{3}$ .

3. Iloraz.  $3 - 3q = 1 + q$ ,  $q = \frac{1}{2}$ .

4. Wynik.  $a_1 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ .

1 pkt za oba równania z warunkiem  $|q| < 1$ . 2 pkt za równanie z jedną niewiadomą. 3 pkt za  $q = \frac{1}{2}$ . 4 pkt za  $a_1 = 6$ .

13. 1. 13.1 Więź.  $8a + 4H = 24$ ,  $H = 6 - 2a$ .

2. 13.1 Dziedzina.  $a > 0$  i  $H > 0 \iff a < 3$ .

3. 13.1 Wzór.  $V = a^2(6 - 2a) = 6a^2 - 2a^3$ .

4. 13.2 Pochodna.  $V'(a) = 12a - 6a^2 = 6a(2 - a)$ .

5. 13.2 Zero. w  $(0, 3)$  tylko  $a = 2$ .

6. 13.2 Uzasadnienie.  $V' > 0$  w  $(0, 2)$ ,  $V' < 0$  w  $(2, 3)$ : maksimum.

7. 13.2 Odpowiedź.  $a = 2$ ,  $H = 2$  (sześcián),  $V = 8$ .

13.1: 1 pkt za  $H = 6 - 2a$ , 2 pkt za dziedzinę, 3 pkt za wzór. 13.2: 1 pkt za pochodną, 2 pkt za  $a = 2$ , 3 pkt za uzasadnienie maksimum, 4 pkt za wymiary i  $V = 8$ .

---

Matura z matematyki · Lekcja 14.2: Arkusz próbny, poziom rozszerzony · Forma arkusza i punktacja wzorowane na arkuszach CKE z lat 2025–2026 i informatorze dla poziomu rozszerzonego. Wszystkie zadania są autorskie. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt14\_2.py).