

Zadania optymalizacyjne z pochodną

Ostatnie zadanie każdego arkusza rozszerzonego z lat 2025–2026 to wiązka: część pierwsza „wykaż, że wielkość wyraża się wzorem ...” za 2–3 punkty i część druga „wyznacz wartość największą (najmniejszą)” za 4 punkty. Drugą część zdający rozwiązują wyraźnie lepiej (łatwość 42% i 47%) niż pierwszą (22% i 16%). Oznacza to, że pochodną liczyć umieją; trudniej jest im zbudować model i przejść cały, punktowany krok po kroku rytuał. Ta lekcja to oba elementy: jak dojść do wzoru funkcji i jak zapisać rozwiązanie, które dostaje komplet punktów.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

5 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 2
zadania w stylu
maturalnym (w
tym wiązka);
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
XIII.6R

W TEJ LEKCJI

- 0 Od opisu do funkcji jednej zmiennej
- 1 Rytuał w sześciu krokach
- 2 Część pierwsza: wyprowadzenie wzoru
- 3 Skróty: kwadrat odległości, stałe czynniki
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Od opisu do funkcji jednej zmiennej

Zadanie optymalizacyjne opisuje rodzinę obiektów (puszki o danej objętości, prostokąty wpisane w figurę, stożki opisane na kuli) i pyta, który z nich jest „najlepszy”. Rozwiązanie zawsze ma ten sam szkielet: wybierz jedną zmienną, wyraż przez nią badaną wielkość, wyznacz dziedzinę, a potem znajdź ekstremum tej funkcji jak w lekcji 13.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji. Na poziomie podstawowym robiło się to samo z funkcją kwadratową i wierzchołkiem paraboli (lekcja 5.4 Funkcja kwadratowa w przedziale i zadania optymalizacyjne); pochodna pozwala zrobić to dla dowolnej funkcji.

Rytuał w sześciu krokach

PEŁNE ROZWIĄZANIE

1. **Zmienna i dziedzina:** co oznacza x i z jakiego przedziału jest (wymiarzy dodatnie, punkt w danej ćwiartce).
2. **Wzór funkcji $f(x)$** badanej wielkości (w wiązce zwykle podany w części pierwszej).
3. **Pochodna $f'(x)$** , z licznikiem rozłożonym na czynniki.
4. **Miejsca zerowe pochodnej w dziedzinie;** odrzuć pozostałe z uzasadnieniem.
5. **Uzasadnienie**, że to wartość największa (najmniejsza): znak f' i monotoniczność na lewo i na prawo, albo „jedyne ekstremum lokalne w przedziale, i to maksimum”.
6. **Odpowiedź na pytanie z treści:** nie tylko x , ale to, o co pytano (wymiarzy, objętość, współrzędne punktu, równanie prostej).

Klucz CKE punktuje kroki 3–6: 1 punkt za pochodną, 2 za zera w dziedzinie, 3 za uzasadnienie, 4 za odpowiedź. Błąd rachunkowy po poprawnym wzorze na pochodną kosztuje mniej, jeśli pochodna wciąż ma dokładnie jedno zero w dziedzinie (można dostać 3 punkty), a więcej, jeśli nie (najwyżej 2).

Przykład 1.1

Puszka o najmniejszej powierzchni

Puszka w kształcie walca ma objętość $16\pi \text{ cm}^3$. Wyznacz promień i wysokość puszki, dla których jej pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

1. **Zmienna.** $r > 0$ – promień podstawy. Z objętości $\pi r^2 H = 16\pi$: $H = \frac{16}{r^2}$.
2. **Funkcja.** $P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}$, $r \in (0, +\infty)$.
3. **Pochodna.** $P'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} = \frac{4\pi(r^3 - 8)}{r^2}$.
4. **Zera.** $r^3 = 8$, $r = 2$.
5. **Uzasadnienie.** $P'(r) < 0$ dla $r \in (0, 2)$ i $P'(r) > 0$ dla $r > 2$: P maleje w $(0, 2]$ i rośnie w $[2, +\infty)$, więc $P(2)$ jest wartością najmniejszą.
6. **Odpowiedź.** $r = 2 \text{ cm}$, $H = 4 \text{ cm}$ (wysokość równa średnicy); $P = 24\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 1.2

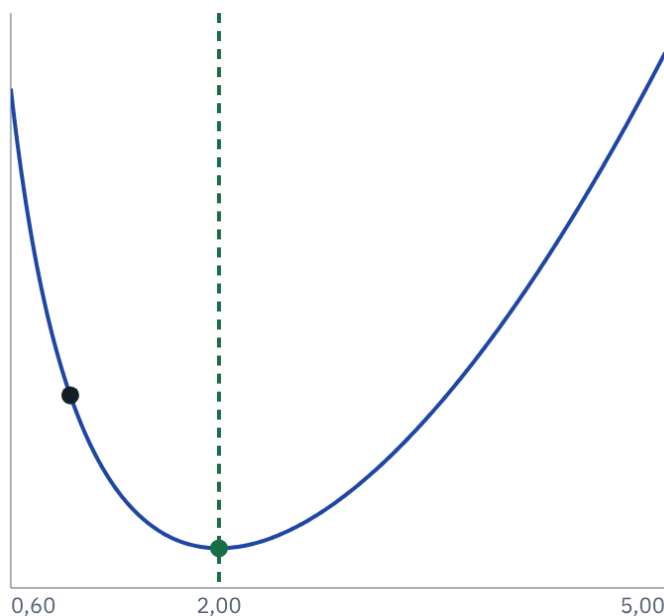
Prostokąt pod parabolą

Wierzchołki A i B prostokąta $ABCD$ leżą na osi Ox , a C i D na paraboli $y = 12 - x^2$ nad osią Ox . Wyznacz największe pole takiego prostokąta.

1. **Zmienna.** $C = (x, 12 - x^2)$, $D = (-x, 12 - x^2)$ z symetrii, $x \in (0, 2\sqrt{3})$.
2. **Funkcja.** $P(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$.
3. **Pochodna i zera.** $P'(x) = 24 - 6x^2 = 6(2 - x)(2 + x)$; w dziedzinie tylko $x = 2$.
4. **Uzasadnienie.** $P' > 0$ w $(0, 2)$, $P' < 0$ w $(2, 2\sqrt{3})$: maksimum, a zarazem wartość największa.
5. **Odpowiedź.** $P_{\max} = P(2) = 32$ (prostokąt 4×8).

SYMULACJA 1

Trzy zadania z lekcji. Przesuwaj zmienną i obserwuj figurę oraz wykres badanej funkcji. Kropka na wykresie to bieżący wybór; znak pochodnej mówi, w którą stronę opłaca się przesunąć zmienną. Optimum jest tam, gdzie pochodna zmienia znak.

 $r = 1,00, H = 16,00$ 

— figura — badana funkcja — optimum

promień r 1,00pole $P(r)$ 106,814

znak pochodnej -

optimum 2,00 → 75,398

Szukamy minimum. Przy bieżącym wyborze zwiększ zmienną. Pochodna zmienia znak w 2,00.

Stan na rysunku: puszka o objętości 16π , promień $r = 1,00$, pole $P(r) = 106,814$; optimum dla 2,00.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 10 min

1 Liczby x i y są dodatnie i $x + y = 12$. Wyznacz największą wartość wyrażenia x^2y .

2 Prostopadłościenne pudełko bez pokrywy ma kwadratowe dno i objętość 32. Wyznacz wymiary pudełka o najmniejszym polu powierzchni.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

JAK DOJŚĆ DO WZORU

- Narysuj figurę (przekrój osiowy bryły, układ współrzędnych) i nazwij zmienną tak, jak w treści.
- Znajdź **więź**, która usuwa drugą zmienną: dana objętość, dany obwód, punkt na krzywej, styczność, podobieństwo trójkątów, twierdzenie Pitagorasa.
- Podstaw więź do wzoru na badaną wielkość i uprość do postaci z treści. W „wykaż, że” wzór końcowy jest dany, więc liczy się każdy krok przejścia.
- Dziedzina wynika z geometrii: dodatnie długości, punkt w danej ćwiartce, warunek istnienia figury.

Przykład 2.1

Stożek opisany na kuli

Na kuli o promieniu 1 opisujemy stożki. a) Wykaż, że objętość stożka o wysokości h wyraża się wzorem $V(h) = \frac{\pi h^2}{3(h-2)}$ dla $h > 2$. b) Wyznacz najmniejszą objętość.

1. **Przekrój osiowy.** trójkąt równoramienny o wysokości h i podstawie $2r$, okrąg wpisany o promieniu 1; środek okręgu leży na wysokości, w odległości $h - 1$ od wierzchołka.
2. **Więź.** sinus połowy kąta rozwarcia na dwa sposoby: $\frac{1}{h-1} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$, więc $r^2(h-1)^2 = r^2 + h^2$, $r^2(h^2 - 2h) = h^2$, $r^2 = \frac{h}{h-2}$.
3. **Wzór.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^2}{3(h-2)}$; stożek istnieje dla $h > 2$ (średnica kuli).
4. **Pochodna.** $V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2h(h-2)-h^2}{(h-2)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h(h-4)}{(h-2)^2}$.
5. **Zera i znak.** w $(2, +\infty)$ tylko $h = 4$; $V' < 0$ w $(2, 4)$, $V' > 0$ dla $h > 4$: minimum.
6. **Odpowiedź.** $V_{\min} = V(4) = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$ (wtedy $r = \sqrt{2}$).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 12 min

- 1 Z prostokątnego arkusza 8×5 wycinamy w rogach cztery kwadraty o boku x i składamy otwarte pudełko. Wyznacz x , dla którego objętość pudełka jest największa, i tę objętość.
- 2 Wyznacz punkty paraboli $y = x^2$ leżące najbliżej punktu $(0, 2)$ i tę najmniejszą odległość.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

Skróty: kwadrat odległości, stałe czynniki

CO WOLNO UPROŚCIĆ

- Odległość $d = \sqrt{\dots}$ jest najmniejsza tam, gdzie najmniejszy jest d^2 (pierwiastek jest rosnący). Badaj d^2 : unikasz pochodnej pierwiastka.
- Stały dodatni czynnik $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ nie zmienia punktu, w którym jest ekstremum, ani znaku pochodnej. Można go wyłączyć przed nawias, ale w odpowiedzi wartość podaj z nim.
- Jeśli badana funkcja okaże się kwadratowa, pochodna nie jest konieczna: wystarczy wierzchołek paraboli. Klucz przyjmuje każdą poprawną metodę.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 8 min

- 1 Prosta przechodząca przez punkt $(1, 3)$ przecina dodatnie półosie układu w punktach $(a, 0)$ i $(0, b)$. Wyznacz równanie tej prostej, dla której pole trójkąta odciętego z pierwszej ćwiartki jest najmniejsze.

podstawowe średnie trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 10 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WZÓR FUNKCJI I DZIEDZINA

ZESTAWY A

- 1 Zapisz badaną wielkość jako funkcję jednej zmiennej i podaj dziedzinę.
- a) pole prostokąta o obwodzie 20 i boku x
- ... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM B · POCHODNA I OPTIMUM

ZESTAWY B

1 Dla funkcji z poziomu A wyznacz optimum.



a) $P(x) = x(10 - x)$:

największe pole

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

POZIOM C · KRÓTKIE ZADANIA

ZESTAWY C

1 Rozwiąż.



a) $x, y > 0, x + 2y = 12$:

największe xy

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

Pełny trening (10 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

Wiązka optymalizacyjna jest w każdej sesji rozszerzonej jako ostatnie zadanie. Przykłady z lat 2025–2026: pole kwietnika jako funkcja wymierna na przedziale $(4, 10]$, objętość stożków $V(h)$ dla $h > 5$, objętość wielomianowa $V(a)$ na przedziale otwartym, pole trójkąta odciętego przez prostą (z odpowiedzią w postaci równania prostej), punkt wykresu (z odpowiedzią w postaci współrzędnych). Brak dziedziny, brak uzasadnienia, że to wartość największa, albo odpowiedź „ $x = 4\sqrt{3}$ ” zamiast pola, o które pytano, kosztuje 1–2 punkty nawet przy dobrym rachunku. Sprawozdanie z 2025 roku wymienia pochodną ilorazu w optymalizacji wśród umiejętności opanowanych „stosunkowo łatwo”. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

2 zadania · 10 pkt · ok. 30 min

1 (0–6 pkt) Rozpatrujemy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 2.

■■■

1. (0–2 pkt) Wykaż, że pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o krawędzi podstawy a wyraża się wzorem $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{8\sqrt{3}}{a}$.

2. (0–4 pkt) Wyznacz długość krawędzi podstawy graniastosłupa o najmniejszym polu powierzchni całkowitej. Oblicz to pole.

2 (0–4 pkt) Punkt $P = (x_0, 3 - x_0^2)$, gdzie $x_0 \in (0, \sqrt{3})$, leży na paraboli $y = 3 - x^2$. Styczna do paraboli w punkcie P tworzy z osiami układu trójkąt. Wyznacz x_0 , dla którego pole tego trójkąta jest najmniejsze, i to pole.

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

× „ $P'(x) = 0$ dla $x = 2$, więc to minimum.”

Brak uzasadnienia kosztuje punkt. Dopisz znak pochodnej po obu stronach albo „jedyne ekstremum lokalne w przedziale, i jest to minimum”.

× „Odpowiedź: $x = 2$.”

Pytanie brzmiało: jakie pole, jakie wymiary, jaki punkt, jaka prosta. Odpowiedz na pytanie z treści.

× „Zera pochodnej: $x = 1$ i $x = \frac{10}{3}$.”

Sprawdź dziedzinę: $\frac{10}{3} > \frac{5}{2}$ nie daje pudełka. Odrzucenie trzeba zapisać.

× „Wykazałem wzór, bo podstawiałem $a = 1$ i się zgadza.”

Sprawdzenie na przykładzie nie jest dowodem. W części pierwszej trzeba wyprowadzić wzór dla dowolnego a z dziedziny.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Za które kroki rozwiązania klucz daje punkty w części drugiej wiązki?

Pochodna, zera w dziedzinie, uzasadnienie ekstremum, odpowiedź na pytanie.

- 2 Dlaczego odległość można zastąpić jej kwadratem?

Bo pierwiastek jest funkcją rosnącą: d i d^2 mają minimum w tym samym punkcie.

- 3 Puszka o danej objętości i najmniejszej powierzchni: jaka jest zależność między H i r ?

$$H = 2r.$$

- 4 Kiedy wystarczy porównać wartości na końcach przedziału?

Na przedziale domkniętym, razem z punktami krytycznymi w środku. Na otwartym potrzebny jest argument z monotoniczności.

RYTUAŁ

zmienna + dziedzina, wzór f f' , zera w dziedzinieznak $f' \Rightarrow$ ekstremum, odpowiedź na

pytanie

WIĘZI I SKRÓTY

objętość, obwód, punkt na krzywej,
stycznośćodległość: badaj d^2

stały czynnik: wyłącz przed nawias

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na pochodne i równanie stycznej (dział 16) oraz wzory na pola i objętości (działy 10 i 12), które dają więzi. Schematu rozwiązania zadania optymalizacyjnego w broszurze nie ma.

Dalej: arkusz próbny na poziomie rozszerzonym (lekcja 14.2 Arkusz próbny: poziom rozszerzony).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $f(x) = x^2(12 - x)$, $x \in (0, 12)$.
2. $f'(x) = 24x - 3x^2 = 3x(8 - x)$; w dziedzinie $x = 8$; f' zmienia znak z $+$ na $-$.
3. $f(8) = 64 \cdot 4 = 256$.
1. Dno $a \times a$, wysokość $\frac{32}{a^2}$: $P(a) = a^2 + \frac{128}{a}$, $a > 0$.
2. $P'(a) = 2a - \frac{128}{a^2} = \frac{2(a^3 - 64)}{a^2}$; zero $a = 4$, minimum.
3. Wymiary $4 \times 4 \times 2$, $P = 48$.

Zadania • część 2

1. $V(x) = x(8 - 2x)(5 - 2x)$, $x \in (0, \frac{5}{2})$.
2. $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x - 10)(x - 1)$; $\frac{10}{3}$ poza dziedziną, zostaje $x = 1$ (maksimum).
3. $V(1) = 1 \cdot 6 \cdot 3 = 18$.
1. Kwadrat odległości: $d^2(x) = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$.
2. $(d^2)' = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$; zera 0 (maksimum lokalne, $d^2 = 4$) i $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (minima).
3. $d^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}$, $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$; punkty $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$.

Zadania • część 3

1. Prosta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ przez $(1, 3)$: $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 1$, $b = \frac{3a}{a-1}$, $a > 1$.
2. $P(a) = \frac{ab}{2} = \frac{3a^2}{2(a-1)}$; $P'(a) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a(a-2)}{(a-1)^2}$; minimum dla $a = 2$.
3. $b = 6$, $P = 6$; prosta $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$, czyli $y = -3x + 6$.

Zestawy A

- a) $P(x) = x(10 - x)$, $x \in (0, 10)$

Zestawy B

- a) $x = 5$, $P = 25$

Zestawy C

- a) $y(12 - 2y)$: $y = 3$, $x = 6$, 18

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Wysokość. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 H = 2$, $H = \frac{8}{\sqrt{3}a^2}$.
2. 1. Pole. $P = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3aH = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{24}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{8\sqrt{3}}{a}$.
3. 2. Pochodna. $a > 0$; $P'(a) = \sqrt{3}a - \frac{8\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 8)}{a^2}$.
4. 2. Zero. $a = 2$.
5. 2. Uzasadnienie. $P' < 0$ w $(0, 2)$, $P' > 0$ w $(2, +\infty)$; wartość najmniejsza w $a = 2$.
6. 2. Odpowiedź. $a = 2$, $P(2) = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Część 1: 1 pkt za $H = \frac{8}{\sqrt{3}a^2}$, 2 pkt za doprowadzenie do wzoru. Część 2: 1 pkt za pochodną, 2 pkt za $a = 2$ jako jedyne zero w dziedzinie, 3 pkt za uzasadnienie minimum, 4 pkt za $a = 2$ i $P = 6\sqrt{3}$.

2. 1. **Styczna.** $y = -2x_0(x - x_0) + 3 - x_0^2 = -2x_0x + x_0^2 + 3$; przecina osie w $(0, x_0^2 + 3)$ i $\left(\frac{x_0^2 + 3}{2x_0}, 0\right)$.
2. **Pole.** $S(x_0) = \frac{(x_0^2 + 3)^2}{4x_0}$, $x_0 \in (0, \sqrt{3})$.
3. **Pochodna.** $S'(x_0) = \frac{2(x_0^2 + 3) \cdot 2x_0 - 4(x_0^2 + 3)^2}{16x_0^2} = \frac{(x_0^2 + 3) \cdot 12(x_0^2 - 1)}{16x_0^2}$.
4. **Zero i znak.** w dziedzinie $x_0 = 1$; $S' < 0$ w $(0, 1)$, $S' > 0$ w $(1, \sqrt{3})$.
5. **Odpowiedź.** $x_0 = 1$, punkt $P = (1, 2)$, $S_{\min} = \frac{16}{4} = 4$.

1 pkt za równanie stycznej i punkty przecięcia z osiami. **2 pkt** za wzór $S(x_0)$ z dziedziną. **3 pkt** za pochodną, zero $x_0 = 1$ i uzasadnienie minimum. **4 pkt** za $x_0 = 1$ i $S = 4$.

Matura z matematyki · Lekcja 13.4: Zadania optymalizacyjne z pochodną · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt13_4.py).