

Trening: optymalizacja z pochodną

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 13.4 Zadania optymalizacyjne z pochodną: budowanie wzoru funkcji z dziedziną, pochodna i jej zera w dziedzinie, krótkie zadania optymalizacyjne. Na końcu wiązka w stylu arkusza rozszerzonego.

POZIOM A · WZÓR FUNKCJI I DZIEDZINA

ZESTAWY A

1 zestaw

1 Zapisz badaną wielkość jako funkcję jednej zmiennej i podaj dziedzinę.



a) pole prostokąta o obwodzie 20 i boku x

b) pole całkowite walca o objętości 54π i promieniu r

c) objętość pudełka z kwadratowego arkusza 12×12 po wycięciu kwadratów x w rogach

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ trudniejsze

POZIOM B · POCHODNA I OPTIMUM

ZESTAWY B

1 zestaw

1 Dla funkcji z poziomu A wyznacz optimum.



a) $P(x) = x(10 - x)$:
największe pole

b) $P(r) = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r}$:
najmniejsze pole

c) $V(x) = x(12 - 2x)^2$:
największa objętość

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ trudniejsze

ZESTAWY C

1 zestaw

1 Rozwiąż.

a) $x, y > 0, x + 2y = 12$:
największe xy b) najmniejsza wartość
 $x^2 + \frac{16}{x}$ dla $x > 0$ c) najmniejsza odległość
punktu $(3, 0)$ od wykresu
 $y = \sqrt{x}$

podstawowe średnie trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Forma jak w arkuszu rozszerzonym CKE: wiązka „wykaż wzór” i „wyznacz optimum”.

ZADANIE W STYLU ARKUSZA

1 zadanie · 6 pkt

1 (0–6 pkt) Rozpatrujemy wszystkie stożki o tworzącej długości 6.

1. (0–2 pkt) Wykaż, że objętość stożka o wysokości h wyraża się wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3}(36h - h^3)$ dla $h \in (0, 6)$.

2. (0–4 pkt) Wyznacz wysokość stożka o największej objętości i tę objętość.

podstawowe średnie trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) $P(x) = x(10 - x)$, $x \in (0, 10)$ b) $P(r) = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r}$, $r > 0$ c) $V(x) = x(12 - 2x)^2$, $x \in (0, 6)$

Zestawy B

1. a) $x = 5$, $P = 25$ b) $r = 3$, $P = 54\pi$ c) $V' = (12 - 2x)(12 - 6x)$: $x = 2$, $V = 128$

Zestawy C

1. a) $y(12 - 2y)$: $y = 3$, $x = 6$, 18 b) $x = 2$: 12 c) $d^2 = x^2 - 5x + 9$: $x = \frac{5}{2}$, $d = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Zadanie w stylu arkusza

1. 1. **Więź.** $r^2 + h^2 = 36$, $r^2 = 36 - h^2$; $h \in (0, 6)$, bo $r > 0$.
2. **1. Wzór.** $V = \frac{1}{3}\pi(36 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(36h - h^3)$.
3. **2. Pochodna.** $V'(h) = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = \pi(12 - h^2)$.
4. **2. Zero.** w $(0, 6)$: $h = 2\sqrt{3}$.
5. **2. Uzasadnienie.** $V' > 0$ w $(0, 2\sqrt{3})$, $V' < 0$ w $(2\sqrt{3}, 6)$: maksimum.
6. **2. Odpowiedź.** $h = 2\sqrt{3}$, $V = \frac{\pi}{3}(72\sqrt{3} - 24\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}\pi$.

Część 1: 1 pkt za $r^2 = 36 - h^2$, 2 pkt za wzór z dziedziną. **Część 2:** 1 pkt za pochodną, 2 pkt za $h = 2\sqrt{3}$, 3 pkt za uzasadnienie, 4 pkt za $V = 16\sqrt{3}\pi$.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 13.4 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na arkuszach, informatorze i zasadach oceniania CKE dla poziomu rozszerzonego. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt13_4.py).