

Monotoniczność i ekstrema funkcji

Badanie monotoniczności pochodną to środek każdego zadania optymalizacyjnego (lekcja 13.4 Zadania optymalizacyjne z pochodną) i osobny typ zadania w informatorze: wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema, wykazać, że funkcja jest rosnąca, znaleźć najmniejszą wartość na przedziale. Narzędzie jest jedno: znak pochodnej w tabeli. Punkty traci się na trzech rzeczach: łączeniu przedziałów monotoniczności sumą, uznaniu każdego zera pochodnej za ekstremum i pomijaniu końców przedziału domkniętego.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

10 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
XIII.5R

W TEJ LEKCJI

- 0 Znak pochodnej mówi, dokąd idzie wykres
- 1 Przedziały monotoniczności
- 2 Ekstrema lokalne
- 3 Największa i najmniejsza wartość na przedziale
- 4 Dowód monotoniczności i liczba rozwiązań
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Znak pochodnej mówi, dokąd idzie wykres

Pochodna to nachylenie stycznej (lekcja 13.2 Pochodna: definicja, interpretacja i obliczanie). Gdzie styczna wznosi się, $f' > 0$, tam wykres rośnie; gdzie opada, $f' < 0$, wykres maleje. Wierzchołki „górek” i „dolin” wykresu funkcji różniczkowalnej są tam, gdzie styczna jest pozioma, $f' = 0$, i gdzie pochodna **zmienia znak**. Całe badanie funkcji sprowadza się więc do rozwiązywania nierówności $f'(x) > 0$, a do tego wystarcza metoda z lekcji 3.3 Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe (wężyk) i 3.4 Wyrażenia, równania i nierówności wymierne (funkcje wymierne).

Przedziały monotoniczności

🔑 TWIERDZENIE I METODA

Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego x z przedziału I , to f jest rosnąca w I ; jeśli $f'(x) < 0$, to malejąca. Metoda:

1. wyznacz dziedzinę f ;
2. oblicz f' i rozłóż na czynniki (w ilorazie mianownik $g^2 > 0$ nie wpływa na znak);
3. wyznacz miejsca zerowe f' i znak f' na przedziałach między nimi (tabela albo wężyk);
4. zapisz przedziały monotoniczności **osobno**, nie sumą.

Przykład 1.1

Wielomian

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 3x$.

1 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$; zera -1 i 1 .

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max 2	↘	min −2	↗

Wynik: f rośnie w $(-\infty, -1]$ i w $[1, +\infty)$, maleje w $[-1, 1]$.

Przykład 1.2

Funkcja z dziurą w dziedzinie

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

- 1 Dziedzina $x \neq 0$. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.
- 2 Znak zależy od licznika: $f' > 0$ dla $|x| > 2$, $f' < 0$ dla $0 < |x| < 2$.

Wynik: rośnie w $(-\infty, -2]$ i w $[2, +\infty)$; maleje w $[-2, 0)$ i w $(0, 2]$. Zapis „maleje w $[-2, 0) \cup (0, 2]$ ” jest błędny: $f(-1) = -5 < f(1) = 5$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 12x$.
- 2 Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
- 3 Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

2 Ekstrema lokalne

WARUNEK KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY

- **Konieczny:** jeśli f ma ekstremum w x_0 i jest tam różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.
- **Wystarczający:** jeśli $f'(x_0) = 0$ i f' zmienia znak w x_0 : z + na - to maksimum, z - na + to minimum.

Samo $f'(x_0) = 0$ nie wystarcza: $f(x) = x^3$ ma $f'(0) = 0$, ale jest rosnąca, bez ekstremum. W tabeli znaku widać to od razu.

Przykład 2.1

Zero pochodnej bez ekstremum

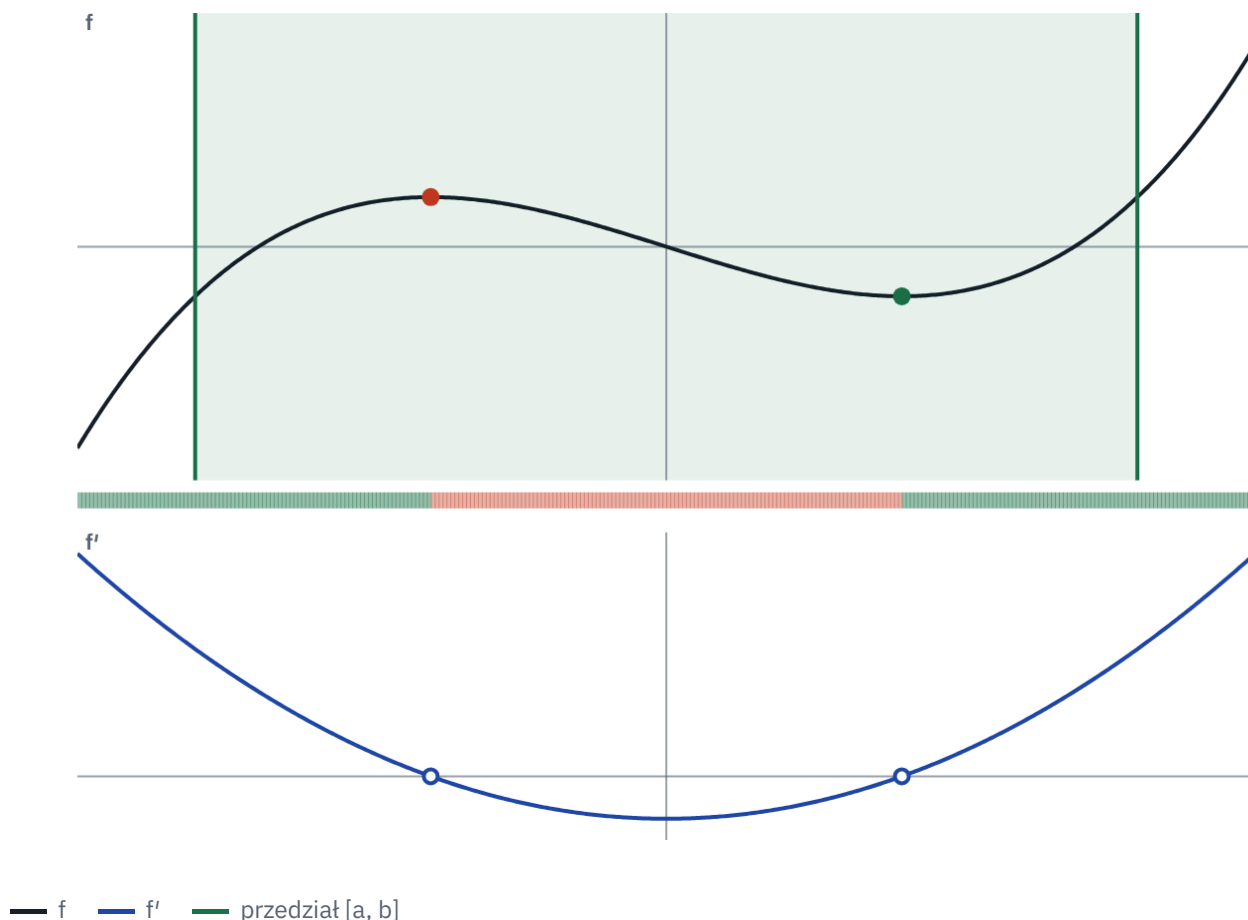
Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- 1 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$; zera 0 (podwójne) i 3.
- 2 Czynniki $x^2 \geq 0$ nie zmieniają znaku, więc znak f' to znak $x - 3$: ujemny dla $x < 3$ (także po obu stronach 0), dodatni dla $x > 3$.
- 3 W 0 brak ekstremum; w 3 minimum, $f(3) = 81 - 108$.

Wynik: jedno ekstremum: minimum $f(3) = -27$.

SYMULACJA 1

Górny wykres to f , dolny to f' . Pas pod osią pokazuje znak pochodnej: tam, gdzie $f' > 0$, funkcja rośnie, gdzie $f' < 0$, maleje. Kropki to ekstrema; zero pochodnej bez zmiany znaku jest zaznaczone pierścieniem. Suwakami ustaw przedział $[a, b]$: odczyt podaje najmniejszą i największą wartość f na nim, z porównaniem końców.



f(a) -2,000

f(b) 2,000

najmniejsza na $[a, b]$ -2,000 ($x = -2,00$)największa na $[a, b]$ 2,000 ($x = 2,00$)

Punkty krytyczne: -1,00: maksimum; 1,00: minimum. Na $[a, b]$ porównujemy wartości na końcach i w punktach krytycznych leżących w środku (4 kandydatów).

Stan na rysunku: $f(x) = x^3 - 3x$, $[a, b] = [-2,00, 2,00]$; najmniejsza -2,000, największa 2,000.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 5 min

1 Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2$.

2 Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = x^4 - 2x^2$.

3 Czy funkcja $f(x) = x^3 + 3x$ ma ekstrema?

■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

3 Największa i najmniejsza wartość na przedziale

PRZEDZIAŁ DOMKNIĘTY $[a, b]$

Funkcja ciągła na $[a, b]$ osiąga na nim wartość najmniejszą i największą. Kandydaci są tylko dwojakiiego rodzaju: **punkty krytyczne leżące wewnątrz** (a, b) (gdzie $f' = 0$) i **końce** a, b . Oblicz f we wszystkich kandydatach i porównaj.

Na przedziale otwartym albo na całej prostej porównanie końców nie jest możliwe. Wtedy argument brzmi: „ f maleje na lewo od x_0 i rośnie na prawo, więc $f(x_0)$ jest wartością najmniejszą” (jedyne ekstremum lokalne).

Przykład 3.1

Remis

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ na przedziale $[0, 4]$.

- 1 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$; oba zera leżą w $(0, 4)$.
- 2 $f(0) = 1, f(1) = 5, f(3) = 1, f(4) = 5$.

Wynik: najmniejsza 1 (dla $x = 0$ i $x = 3$), największa 5 (dla $x = 1$ i $x = 4$). Koniec przedziału może dać tę samą wartość co ekstremum, a w innych zadaniach większą.

Przykład 3.2

Przedział otwarty

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x + \frac{9}{x}$ dla $x > 0$.

- 1 $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$: na $(0, +\infty)$ ujemna dla $x < 3$, dodatnia dla $x > 3$.
- 2 f maleje w $(0, 3]$ i rośnie w $[3, +\infty)$.

Wynik: wartość najmniejsza $f(3) = 6$. Największej nie ma.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 8 min

- 1 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x$ na przedziale $[0, 2]$.

- 2 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ na przedziale $[\frac{1}{2}, 3]$.

- 3 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ na przedziale $[-1, 3]$.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Dowód monotoniczności i liczba rozwiązań

DWA ZASTOSOWANIA

- „Wykaż, że f jest rosnąca w przedziale I ”: oblicz f' i uzasadnij, że $f'(x) > 0$ dla $x \in I$. Zapisz wniosek z twierdzenia. Jeśli $f' \geq 0$ i zeruje się tylko w pojedynczych punktach, funkcja też jest rosnąca.
- **Liczba rozwiązań równania $f(x) = c$** : z przedziałów monotoniczności i wartości w ekstremach widać, ile razy wykres przecina prostą $y = c$. Funkcja rosnąca na całym przedziale przyjmuje każdą wartość co najwyżej raz; z własnością Darboux (lekcja 13.1 Granice i ciągłość funkcji, własność Darboux) daje to „dokładnie jedno rozwiązanie”.

Przykład 4.1

Dowód z pochodnej

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-3, +\infty)$.

1. $f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$.

2. Dla $x > -3$: licznik $7 > 0$, mianownik $(x+3)^2 > 0$, więc $f'(x) > 0$.

3. Zatem f jest rosnąca w $(-3, +\infty)$. ■

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 2 min

1 Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ jest malejąca w przedziale $(-1, +\infty)$.

■ □ □ podstawowe ■ ■ □ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 17 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · MONOTONICZNOŚĆ

ZESTAWY A

1 Wyznacz przedziały monotoniczności.

■ □ □

a) $x^2 - 4x$

b) $\sqrt{x} - x$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ □ □ podstawowe ■ ■ □ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM B · EKSTREMA

ZESTAWY B

1 Wyznacz ekstrema lokalne (rodzaj i wartość).



a) $x^3 - 6x^2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · WARTOŚCI NA PRZEDZIALE

ZESTAWY C

1 Podaj najmniejszą i największą wartość.



a) $x^2 - 2x$ na $[0, 3]$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM D · DOWODY I LICZBA ROZWIĄZAŃ

ZESTAWY D

1 Uzasadnij krótko.



a) $x^3 + 2x - 7 = 0$ ma
dokładnie jedno
rozwiązanie

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (17 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Na egzaminie ta lekcja jest częścią zadania optymalizacyjnego (x.2, 4 punkty), w którym punkty są za pochodną, za jej miejsca zerowe w dziedzinie, za uzasadnienie typu ekstremum (znak pochodnej i strzałki albo „jedyne ekstremum lokalne”) i za odpowiedź. Informator ma też samodzielne zadania: dowód monotoniczności za 3 punkty i najmniejszą wartość funkcji, w tym na przedziale domkniętym, gdzie trzeba porównać wartości na końcach. Łatwość zadań x.2 w maju: 42% (2025) i 47% (2026). Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

- 1 (0–4 pkt) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.
- 2 (0–3 pkt) Wykaż, że funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$.
- 3 (0–4 pkt) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 12x + 5$ na przedziale $[-1, 4]$.

▯▯▯ podstawowe ▯▯▯ średnie ▯▯▯ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „Maleje w $[-2, 0) \cup (0, 2]$.”

Monotoniczność na sumie przedziałów rozdzielonych dziurą w dziedzinie zwykle nie zachodzi. Zapisuj przedziały osobno.

× „ $f'(x_0) = 0$, więc ekstremum.”

Potrzebna zmiana znaku pochodnej. Czynniki w parzystej potęgce, np. x^2 , znaku nie zmienia.

× „Największa wartość na $[a, b]$ to maksimum lokalne.”

Trzeba porównać z wartościami na końcach; w zadaniu 3 największa wartość jest na końcu przedziału.

× „Krytyczny punkt -2 też liczę.”

Na przedziale $[a, b]$ bierzesz tylko punkty krytyczne leżące w tym przedziale.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co trzeba sprawdzić, żeby z $f'(x_0) = 0$ wywnioskować minimum?

Że f' zmienia znak w x_0 z $-$ na $+$.

2 Czy x^3 ma ekstremum w 0?

Nie: $3x^2 \geq 0$ nie zmienia znaku.

3 Którzy kandydaci wchodzi do porównania przy szukaniu wartości największej na $[a, b]$?

Punkty krytyczne leżące w (a, b) oraz końce a i b .

4 Ile rozwiązań ma $x^3 - 3x = 1$?

Trzy: maksimum lokalne 2 i minimum lokalne -2 , a 1 leży między nimi.

MONOTONICZNOŚĆ $f' > 0$ na I : rośnie; $f' < 0$: malejetabela: zera f' , znak, strzałki

przedziały osobno, nie sumą

EKSTREMA I WARTOŚCIekstremum: $f' = 0$ i zmiana znaku $[a, b]$: krytyczne w środku + końce

otwarty: jedyne ekstremum lokalne

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie ma twierdzeń o monotoniczności ani warunków istnienia ekstremum; są tylko wzory na pochodne (dział 16). Metodę trzeba znać.

Dalej: zadania optymalizacyjne (lekcja 13.4 Zadania optymalizacyjne z pochodną).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $f' = 3(x-2)(x+2)$: rośnie w $(-\infty, -2]$ i $[2, +\infty)$, maleje w $[-2, 2]$.
2. $f' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$: maleje w $(-\infty, -1]$, rośnie w $[-1, 1]$, maleje w $[1, +\infty)$.
3. $f' = 6(x+2)(x-1)$: rośnie w $(-\infty, -2]$ i $[1, +\infty)$, maleje w $[-2, 1]$.

Zadania • część 2

1. $f' = 3x(x-2)$: maksimum $f(0) = 0$, minimum $f(2) = -4$.
2. $f' = 4x(x-1)(x+1)$: minima $f(-1) = f(1) = -1$, maksimum $f(0) = 0$.
3. Nie: $f' = 3x^2 + 3 > 0$ dla każdego x .

Zadania • część 3

1. Krytyczny w środku: $x = 1$. $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$: najmniejsza -2 , największa 2 .
2. $f' = \frac{x^2-1}{x^2}$, krytyczny 1. $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$, $f(1) = 2$, $f(3) = \frac{10}{3}$: najmniejsza 2 , największa $\frac{10}{3}$.
3. $f' = 4x(x-2)(x+2)$; w $(-1, 3)$ leżą 0 i 2 (-2 odpada). $f(-1) = -4$, $f(0) = 3$, $f(2) = -13$, $f(3) = 12$: najmniejsza -13 , największa 12 .

Zadania • część 4

1. $f' = \frac{(x+1)-(x+5)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2} < 0$ dla $x > -1$.

Zestawy A

1. a) maleje w $(-\infty, 2]$, rośnie w $[2, +\infty)$ b) $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$: rośnie w $[0, \frac{1}{4}]$, maleje w $[\frac{1}{4}, +\infty)$

Zestawy B

1. a) $\max f(0) = 0$, $\min f(4) = -32$

Zestawy C

1. a) -1 i 3

Zestawy D

1. a) $f' = 3x^2 + 2 > 0$, $f(1) = -4$, $f(2) = 5$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Pochodna. dziedzina $x \neq 1$; $f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.
2. Znak. $f' > 0$ dla $x < -1$ i $x > 3$; $f' < 0$ dla $-1 < x < 1$ i $1 < x < 3$.
3. Monotoniczność. rośnie w $(-\infty, -1]$ i w $[3, +\infty)$; maleje w $[-1, 1]$ i w $(1, 3]$.
4. Ekstrema. maksimum $f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$, minimum $f(3) = \frac{12}{2} = 6$.

1 pkt za pochodną. **2 pkt** za miejsca zerowe i znak pochodnej. **3 pkt** za przedziały monotoniczności zapisane osobno. **4 pkt** za oba ekstrema z wartościami. Maksimum mniejsze od minimum nie jest błędem: to ekstrema lokalne na dwóch różnych gałęziach.

2. 1. **Pochodna.** $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$.

2. **Znak.** $f'(x) > 0$ dla $x \neq 1$ i $f'(1) = 0$; pochodna nie zmienia znaku.

3. **Wniosek.** f jest rosnąca w $(-\infty, 1]$ i w $[1, +\infty)$, a przedziały mają wspólny punkt, więc rośnie w $\mathbb{R}$.

(Inaczej: $f(x) = (x - 1)^3 - 4$, przesunięcie funkcji rosnącej x^3 .) ■

1 pkt za pochodną. **2 pkt** za postać $3(x - 1)^2$ i znak. **3 pkt** za poprawny wniosek uwzględniający punkt $x = 1$.

3. 1. **Pochodna.** $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$.

2. **Punkty krytyczne w przedziale.** tylko $x = 2$ ($-2 \notin [-1, 4]$).

3. **Wartości.** $f(-1) = 16$, $f(2) = -11$, $f(4) = 21$.

4. **Wynik.** najmniejsza -11 (dla $x = 2$), największa 21 (dla $x = 4$).

1 pkt za pochodną. **2 pkt** za punkt krytyczny w przedziale z odrzuceniem -2 . **3 pkt** za wartości w 2 i na obu końcach. **4 pkt** za obie odpowiedzi.

Matura z matematyki · Lekcja 13.3: Monotoniczność i ekstrema funkcji · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt13_3.py).