

Trening: monotoniczność i ekstrema

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 13.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji: przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, największa i najmniejsza wartość na przedziale, dowody i liczba rozwiązań. Na końcu zadania w stylu arkusza rozszerzonego.

POZIOM A · MONOTONICZNOŚĆ

ZESTAWY A

1 zestaw

1 Wyznacz przedziały monotoniczności.



a) $x^2 - 4x$

b) $x^3 - 27x$

c) $\frac{1}{x^2+1}$

d) $\sqrt{x} - x$

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM B · EKSTREMA

ZESTAWY B

1 zestaw

1 Wyznacz ekstrema lokalne (rodzaj i wartość).



a) $x^3 - 6x^2$

b) $x + \frac{1}{x}$

c) $x^4 - 4x$

d) x^3

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

ZESTAWY C

1 zestaw

1 Podaj najmniejszą i największą wartość.



a) $x^2 - 2x$ na $[0, 3]$

b) $x^3 - 3x^2$ na $[-1, 3]$

c) $x + \frac{4}{x}$ na $[1, 4]$

d) $2x^3 - 3x^2$ na $[-1, 2]$

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

POZIOM D · DOWODY I LICZBA ROZWIĄZAŃ

ZESTAWY D

1 zestaw

1 Uzasadnij krótko.



a) $x^3 + 2x - 7 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie

b) $\frac{3x+1}{x+2}$ rośnie w $(-2, +\infty)$

c) liczba rozwiązań $x^3 - 3x = 1$

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu rozszerzonym CKE: zadania otwarte z punktowanymi etapami.

ZADANIA W STYLU ARKUSZA

2 zadania · 7 pkt

1 (0-4 pkt) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.2 (0-3 pkt) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ na przedziale $[0, 2]$.

podstawowe
 średnie
 trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) maleje w $(-\infty, 2]$, rośnie w $[2, +\infty)$ b) rośnie w $(-\infty, -3]$ i $[3, +\infty)$, maleje w $[-3, 3]$ c) rośnie w $(-\infty, 0]$, maleje w $[0, +\infty)$ d) $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$: rośnie w $[0, \frac{1}{4}]$, maleje w $[\frac{1}{4}, +\infty)$

Zestawy B

1. a) $\max f(0) = 0$, $\min f(4) = -32$ b) $\max f(-1) = -2$, $\min f(1) = 2$ c) $\min f(1) = -3$ d) brak

Zestawy C

1. a) -1 i 3 b) -4 i 0 c) 4 i 5 d) -5 i 4

Zestawy D

1. a) $f' = 3x^2 + 2 > 0$, $f(1) = -4$, $f(2) = 5$ b) $f' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$ c) 3: $\max 2$, $\min -2$

Zadania w stylu arkusza

1. 1. **Pochodna.** $x \neq -1$; $f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.
2. **Znak.** dodatnia dla $x < -2$ i $x > 0$, ujemna dla $-2 < x < -1$ i $-1 < x < 0$.
3. **Monotoniczność.** rośnie w $(-\infty, -2]$ i $[0, +\infty)$; maleje w $[-2, -1]$ i $(-1, 0]$.
4. **Ekstrema.** $\max f(-2) = -4$, $\min f(0) = 0$.
1 pkt za pochodną. 2 pkt za zera i znak. 3 pkt za przedziały. 4 pkt za ekstrema.
2. 1. **Pochodna.** $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$; w $(0, 2)$ tylko $x = 1$.
2. **Wartości.** $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 11$.
3. **Wynik.** najmniejsza 2, największa 11.
1 pkt za pochodną i punkt krytyczny. 2 pkt za wartości w kandydatach. 3 pkt za obie odpowiedzi.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 13.3 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na informatorze i zasadach oceniania CKE dla poziomu rozszerzonego. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt13_3.py).