

Pochodna: definicja, interpretacja i obliczanie

Pochodna pojawia się w każdym arkuszu rozszerzonym, najczęściej w zadaniu optymalizacyjnym za 4 punkty (lekcja 13.4 Zadania optymalizacyjne z pochodną), ale też w zadaniach za 3–4 punkty z parametrem i ze styczną. We wszystkich pierwszy punkt jest za poprawnie policzoną pochodną. Najczęstszą przyczyną utraty wszystkich punktów jest błąd w pochodnej ilorazu. Ta lekcja to definicja (jedno zdanie i jeden rachunek), wzory z broszury i ich bezpieczne użycie oraz równanie stycznej.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

11 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
XIII.3R, XIII.4R

W TEJ LEKCJI

- 0 Nachylenie stycznej, prędkość chwilowa
- 1 Definicja: granica ilorazu różnicowego
- 2 Wzory: potęgi, suma, iloczyn, iloraz, złożenie
- 3 Styczna i zadania z parametrem
- 4 Pochodna jako prędkość
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Nachylenie stycznej, prędkość chwilowa

Sieczna przez dwa punkty wykresu, $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, ma współczynnik kierunkowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Gdy $h \rightarrow 0$, sieczna obraca się wokół punktu $(x_0, f(x_0))$ i w granicy staje się styczną.

Granica tego ilorazu to **pochodna** $f'(x_0)$: współczynnik kierunkowy stycznej (interpretacja geometryczna). Jeśli $f(t)$ to droga przebyta do chwili t , ten sam iloraz to prędkość średnia na odcinku czasu długości h , a jego granica to prędkość chwilowa (interpretacja fizyczna).

1

Definicja: granica ilorazu różnicowego

DEFINICJA

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona. W rachunku z definicji licznik zawsze ma czynnik h , który się skraca: to granica typu $\frac{0}{0}$ z lekcji 13.1 Granice i ciągłość funkcji, własność Darboux.

Przykład 1.1

$$x^2$$

w punkcie

3

Korzystając z definicji, oblicz $f'(3)$ dla $f(x) = x^2$.

1 $f(3 + h) - f(3) = 9 + 6h + h^2 - 9 = 6h + h^2.$

2 $\frac{6h+h^2}{h} = 6 + h \rightarrow 6.$

Wynik: $f'(3) = 6$, zgodnie ze wzorem $(x^2)' = 2x$.

Przykład 1.2

$$\frac{1}{x}$$

w punkcie

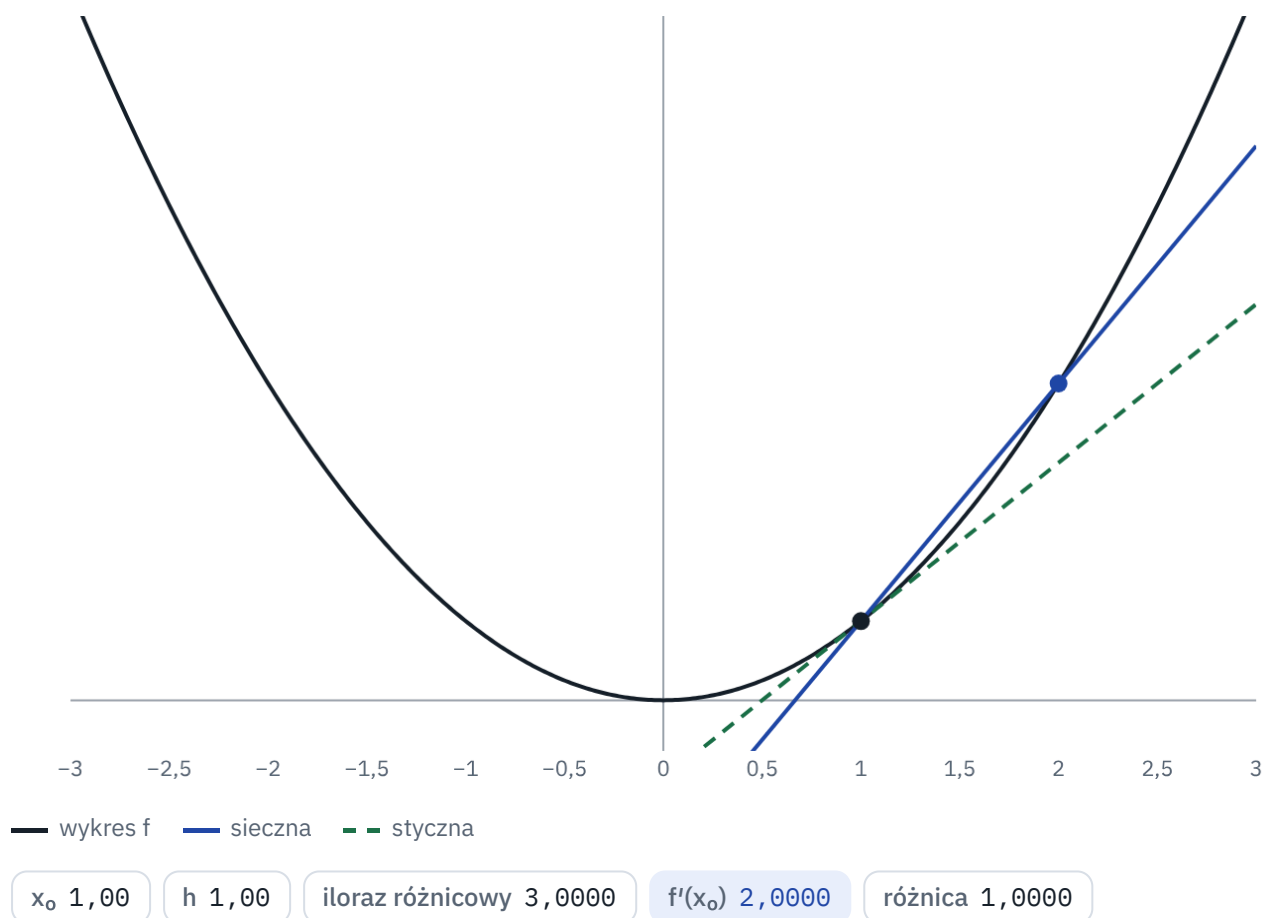
2

Korzystając z definicji, oblicz $f'(2)$ dla $f(x) = \frac{1}{x}$.

- 1 $\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2-(2+h)}{2(2+h)} = \frac{-h}{2(2+h)}.$
- 2 Po podzieleniu przez h : $\frac{-1}{2(2+h)} \rightarrow -\frac{1}{4}.$

Wynik: $-\frac{1}{4}$, zgodnie ze wzorem $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

SYMULACJA 1 Sieczna przez punkty o odciętych x_0 i $x_0 + h$. Zmniejszaj h (także do wartości ujemnych) i porównaj iloraz różnicowy z pochodną: sieczna przechodzi w styczną, a jej współczynnik kierunkowy dąży do $f'(x_0)$.



$[f(x_0 + h) - f(x_0)] : h = 3,0000$, a $f'(x_0) = 2,0000$. Im mniejsze $|h|$, tym mniejsza różnica; przy $h \rightarrow 0$ sieczna przechodzi w styczną.

Stan na rysunku: $f(x) = x^2$, $x_0 = 1,00$, $h = 1,00$; iloraz różnicowy $3,0000$, $f'(x_0) = 2,0000$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

1 Korzystając z definicji, oblicz $f'(1)$ dla $f(x) = 2x^2$.

2 Korzystając z definicji, oblicz $f'(2)$ dla $f(x) = x^3$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Wzory: potęgi, suma, iloczyn, iloraz, złożenie

WZORY (W BROSZURZE CKE)

- $(x^r)' = r x^{r-1}$ dla każdego rzeczywistego r ; w szczególności $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$: w liczniku najpierw pochodna licznika, minus, mianownik do kwadratu.
- $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$: pochodna „zewnętrznej” razy pochodna „wewnętrznej”.

Zanim zaczniesz różniczkować, uprość: pierwiastki i ułamki zamień na potęgi ($\frac{5}{x} = 5x^{-1}$, $x\sqrt{x} = x^{3/2}$), wymnóż krótkie iloczyny. W ilorazie **nie** wymnażaj mianownika g^2 : jego znak jest od razu widoczny, co przyda się przy monotoniczności.

Przykład 2.1

Potęgi

Oblicz pochodną $f(x) = 3x^4 - 2\sqrt{x} + \frac{5}{x}$.

- 1 $f(x) = 3x^4 - 2x^{1/2} + 5x^{-1}$.
- 2 $f'(x) = 12x^3 - x^{-1/2} - 5x^{-2}$.

Wynik: $f'(x) = 12x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$.

Przykład 2.2

Iloraz

Oblicz pochodną $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

- 1 $f' = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$.
- 2 Licznik: $2x^2 - 2x - x^2 - 1 = x^2 - 2x - 1$.

Wynik: $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

Przykład 2.3

Złożenie

Oblicz pochodne: a) $(2x + 1)^5$, b) $\sqrt{x^2 + 9}$.

1 a) $5(2x + 1)^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$.

2 b) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Wynik: czynniki 2 i $2x$ to pochodne funkcji wewnętrznych; bez nich wynik jest błędny.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 8 min

1 Oblicz pochodną $x^3 - 4x + 7$.

2 Oblicz pochodną $\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$.

3 Oblicz pochodną $\frac{x^2-3}{x+2}$.

4 Oblicz pochodną $(3x - 1)^4$.

5 Oblicz pochodną $x\sqrt{x}$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

3 Styczna i zadania z parametrem

📌 RÓWNANIE STYCZNEJ (W BROSZURZE CKE)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Dany punkt styczności x_0 : policz $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, podstaw.
- Dany kierunek („styczna równoległa do $y = 4x - 1$ ”): rozwiąż $f'(x_0) = 4$.
- Dany punkt *poza* wykresem, przez który styczna przechodzi: zapisz styczną w punkcie x_0 z niewiadomym x_0 , podstaw współrzędne punktu, rozwiąż równanie z x_0 .

Przykład 3.1

Styczna w punkcie

Wyznacz równanie stycznej do wykresu $f(x) = x^3 - 2x$ w punkcie o odciętej 1.

- 1 $f(1) = -1$; $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$.
- 2 $y = 1 \cdot (x - 1) - 1$.

Wynik: $y = x - 2$.

Przykład 3.2

Styczna o danym kierunku

Wyznacz równanie stycznej do wykresu $f(x) = x^2 + x$ równoległej do prostej $y = 4x - 1$.

- 1 $f'(x_0) = 2x_0 + 1 = 4$, $x_0 = \frac{3}{2}$; $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$.
- 2 $y = 4(x - \frac{3}{2}) + \frac{15}{4}$.

Wynik: $y = 4x - \frac{9}{4}$.

Przykład 3.3

Parametr z warunku na pochodną

Funkcja $f(x) = \frac{x^2+a}{x+1}$ spełnia $f'(1) = \frac{1}{2}$. Wyznacz a .

- 1 $f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+a)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}$.
- 2 $f'(1) = \frac{3-a}{4} = \frac{1}{2}$.

Wynik: $a = 1$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Wyznacz równanie stycznej do wykresu $f(x) = x^2 - 3x$ w punkcie o odciętej 2.

- 2 Wyznacz równanie stycznej do wykresu $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie o odciętej $\frac{1}{2}$.

- 3 Wyznacz punkty wykresu $f(x) = x^3$, w których styczna jest równoległa do prostej $y = 12x$.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

4 Pochodna jako prędkość

Jeśli $s(t)$ to położenie ciała poruszającego się po prostej w chwili t , to $v(t) = s'(t)$ jest prędkością chwilową. Jednostki: metry na sekundę, gdy s jest w metrach, a t w sekundach. Prędkość ujemna oznacza ruch w przeciwną stronę.

Przykład 4.1

Prędkość w chwili

$$t = 2$$

Ciało porusza się po prostej, a jego położenie w chwili t (w sekundach) to $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$ (w metrach). Oblicz prędkość w chwili $t = 2$.

- 1 $v(t) = 6t^2 - 6t + 4$.
- 2 $v(2) = 24 - 12 + 4$.

Wynik: $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 1 min

- 1 $s(t) = t^2 + 3t$ (metry, sekundy). Oblicz prędkość w chwili $t = 4$.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 21 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

 ZESTAWY A

1 Oblicz pochodną.



a) $5x^3$

b) $x^2 \sqrt[3]{x}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe
  średnie
  trudniejsze

 ZESTAWY B

1 Oblicz pochodną.



a) $x^2(x-1)$

b) $\frac{1}{x^2+4}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe
  średnie
  trudniejsze

 ZESTAWY C

1 Wyznacz.



a) styczna do x^2 w $x_0 = 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe
  średnie
  trudniejsze

 ZESTAWY D

1 Oblicz.



a) $f'(5)$ z definicji dla

$$f(x) = x^2$$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (21 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Zadania z pochodną spoza optymalizacji w arkuszach 2025–2026: wyznaczenie parametru z warunku na pochodną ilorazu (3 punkty) i wielomian z warunkiem na styczną (4 punkty). Klucz: 1 punkt za pochodną, 2 punkty za równanie z jedną niewiadomą, 3 punkty za wynik; przy stycznej osobny punkt za jej współczynnik kierunkowy. Informator ma też zadanie z położeniem $x(t)$ i prędkością jako pochodną. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 10 pkt · ok. 25 min

1 (0–3 pkt) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x+a}{x^2+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz a , dla którego $f'(1) = -3$.

2 (0–4 pkt) Wyznacz równania wszystkich stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$, które przechodzą przez punkt $P = (1, -2)$.

3 (0–3 pkt) Ciało porusza się po prostej, a jego położenie w chwili $t \in [0, 5]$ (w sekundach) jest równe $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ (w metrach). Oblicz prędkość ciała w chwili $t = 1$ oraz wyznacz chwilę, w której prędkość jest największa, i tę prędkość.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

✗ „ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ ” albo „ $\frac{fg' - f'g}{g^2}$ ”.

Licznik zaczyna się od $f'g$, potem minus fg' . Odwrócona kolejność zmienia znak całego wyniku. Sprawdź się na $\frac{x}{1}$: musi wyjść 1.

× „ $((2x + 1)^5)' = 5(2x + 1)^4$.”

Brakuje pochodnej funkcji wewnętrznej, czyli czynnika 2.

× „ $(fg)' = f'g'$.”

$(fg)' = f'g + fg'$. Kontrprzykład: $(x \cdot x)' = 2x$, a $1 \cdot 1 = 1$.

× „**Styczna:** $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$.”

Współczynnik kierunkowy to liczba $f'(x_0)$, a nie funkcja $f'(x)$. Styczna jest prostą.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co oznacza geometrycznie $f'(x_0) = 0$?

Styczna w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest pozioma.

2 Ile wynosi $f'(4)$ dla $f(x) = \sqrt{x}$?

$$\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

3 Jak najszybciej zróżniczkować $\frac{3}{x^2}$?

Jako $3x^{-2}$: $-6x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$. Wzór na iloraz jest tu zbędny.

4 Dlaczego w pochodnej ilorazu warto zostawić mianownik w postaci g^2 ?

Bo $g^2 > 0$ poza miejscami zerowymi g , więc znak pochodnej zależy tylko od licznika.

WZORY

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x)$$

ZASTOSOWANIA

$f'(x_0)$: nachylenie stycznej

styczna: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$v(t) = s'(t)$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (dział 16) są wzory na pochodną sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej, tabela pochodnych (stała, funkcja liniowa i kwadratowa, x^r , $\frac{a}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^x) oraz równanie stycznej. Definicji pochodnej przez granicę w broszurze nie ma.

Dalej: monotoniczność i ekstrema (lekcja 13.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\frac{2(1+h)^2-2}{h} = \frac{4h+2h^2}{h} = 4 + 2h \rightarrow 4.$

2. $(2+h)^3 - 8 = 12h + 6h^2 + h^3$; po podzieleniu przez h : $12 + 6h + h^2 \rightarrow 12.$

Zadania • część 2

1. $3x^2 - 4.$

2. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}.$

3. $\frac{2x(x+2)-(x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}.$

4. $4(3x-1)^3 \cdot 3 = 12(3x-1)^3.$

5. $x^{3/2}$, więc $\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

Zadania • część 3

1. $f(2) = -2, f'(2) = 1$: $y = x - 4.$

2. $f(\frac{1}{2}) = 2, f'(\frac{1}{2}) = -4$: $y = -4x + 4.$

3. $3x^2 = 12, x = \pm 2$: punkty $(2, 8)$ i $(-2, -8).$

Zadania • część 4

1. $v = 2t + 3, v(4) = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Zestawy A

1. a) $15x^2$ b) $x^{7/3}$; $\frac{7}{3}x^{4/3}$

Zestawy B

1. a) $3x^2 - 2x$ b) $-\frac{2x}{(x^2+4)^2}$

Zestawy C

1. a) $y = 2x - 1$

Zestawy D

1. a) $\frac{10h+h^2}{h} \rightarrow 10$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Pochodna. $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x+a) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$

2. Równanie. $f'(1) = \frac{4-2(2+a)}{4} = -\frac{a}{2} = -3.$

3. Wynik. $a = 6.$

1 pkt za pochodną (wzór na pochodną ilorazu). 2 pkt za równanie $-\frac{a}{2} = -3$. 3 pkt za $a = 6$.

2. 1. **Styczna w x_0 .** $f'(x) = 2x - 2$; $y = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 3$.
2. **Warunek P.** $-2 = (2x_0 - 2)(1 - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 3 = -(x_0 - 1)^2 + 2$.
3. **Punkty styczności.** $(x_0 - 1)^2 = 4$: $x_0 = 3$ albo $x_0 = -1$.
4. **Styczne.** $x_0 = 3$: $f(3) = 6$, $f'(3) = 4$, $y = 4x - 6$. $x_0 = -1$: $f(-1) = 6$, $f'(-1) = -4$, $y = -4x + 2$.
- 1 pkt** za równanie stycznej w punkcie x_0 . **2 pkt** za równanie z warunku przejścia przez P . **3 pkt** za $x_0 = 3$ i $x_0 = -1$. **4 pkt** za oba równania stycznych.
3. 1. **Prędkość.** $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 15$.
2. **$t = 1$.** $v(1) = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
3. **Maksimum.** v to funkcja kwadratowa o ujemnym współczynniku przy t^2 ; wierzchołek $t = \frac{-12}{-6} = 2 \in [0, 5]$,
 $v(2) = 27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- 1 pkt** za $v(t)$. **2 pkt** za $v(1) = 24$. **3 pkt** za $t = 2$ i $v = 27$.

Matura z matematyki · Lekcja 13.2: Pochodna: definicja, interpretacja i obliczanie · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt13_2.py).