

Granice i ciągłość funkcji, własność Darboux

W arkuszach z lat 2024–2026 nie było jeszcze żadnego zadania przypisanego do tej lekcji. Informator CKE ma trzy dowody za 3 punkty z własności Darboux: funkcja ma miejsce zerowe w danym przedziale, przyjmuje daną wartość, ma co najmniej dwa pierwiastki. Klucz jest bardzo formalny: osobno punktuje wartości na końcach, uzasadnienie ciągłości i powołanie się na twierdzenie. Granice funkcji są potrzebne przede wszystkim jako narzędzie: do ciągłości funkcji sklejanych i do definicji pochodnej w lekcji 13.2 Pochodna: definicja, interpretacja i obliczanie.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

14 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
XIII.1R, XIII.2R

W TEJ LEKCJI

- 0 Do czego zbliżają się wartości
- 1 Granica w punkcie: podstaw albo skróć
- 2 Granice jednostronne i nieskończone
- 3 Granice w nieskończoności
- 4 Ciągłość i funkcje sklejane
- 5 Własność Darboux
- 6 Trening rachunkowy
- 7 Na maturze
- 8 Najczęstsze błędy
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Do czego zbliżają się wartości

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ znaczy: gdy x zbliża się do x_0 (ale $x \neq x_0$), wartości $f(x)$ zbliżają się do g . Sama wartość $f(x_0)$ nie ma znaczenia; funkcja może nawet nie być w x_0 określona. Funkcja jest **ciągła** w x_0 , gdy granica istnieje i jest równa $f(x_0)$: wykres nie ma w tym miejscu dziury ani skoku. Formalnie granicę funkcji definiuje się przez ciągi (lekcja 6.4 Granice ciągów i szereg geometryczny): g jest granicą, jeśli dla *każdego* ciągu $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$, ciąg $f(x_n)$ dąży do g .

Granica w punkcie: podstaw albo skróć

🔧 DWA KROKI

- Wielomiany, funkcje wymierne, pierwiastki, wykładnicze, logarytmy i trygonometryczne są ciągłe w swoich dziedzinach. Jeśli x_0 należy do dziedziny, **podstaw**: granica to $f(x_0)$.
- Jeśli podstawienie daje $\frac{0}{0}$, licznik i mianownik mają wspólny czynnik $(x - x_0)$. **Rozłóż i skróć** (wzory skróconego mnożenia, schemat Hornera, sprzężenie przy pierwiastkach), potem podstaw.

Przykład 1.1

Skracanie

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- Podstawienie daje $\frac{0}{0}$. $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ dla $x \neq 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$.

Wynik: 4, chociaż $f(2)$ nie istnieje.

Przykład 1.2

Dwa wzory skróconego mnożenia

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

- 1 $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.
- 2 Podstawiamy $x = 1$: $\frac{3}{2}$.

Wynik: $\frac{3}{2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 5 min

1 Oblicz $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

2 Oblicz $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

3 Oblicz $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

2 Granice jednostronne i nieskończone

🚩 GDY MIANOWNIK DĄŻY DO ZERA, A LICZNIK NIE

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ to granica przy x zbliżającym się do x_0 z prawej ($x > x_0$), $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ z lewej. Granica (obustronna) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie jednostronne istnieją i są równe.
- Gdy licznik dąży do liczby różnej od zera, a mianownik do 0, wartość bezwzględna rośnie nieograniczenie: granica to $+\infty$ albo $-\infty$. Znak ustal z tabelki znaków: znak licznika i znak mianownika tuż obok x_0 .

Przykład 2.1

Różne granice z dwóch stron

Oblicz granice jednostronne funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ w punkcie 2.

- 1 Licznik $\rightarrow 3 > 0$.
- 2 Dla $x \rightarrow 2^+$: $x - 2 \rightarrow 0^+$, iloraz $\rightarrow +\infty$. Dla $x \rightarrow 2^-$: $x - 2 \rightarrow 0^-$, iloraz $\rightarrow -\infty$.

Wynik: $+\infty$ i $-\infty$; granicy obustronnej nie ma. Prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową.

Przykład 2.2

Skok

Zbadaj granicę funkcji $f(x) = \frac{|x|}{x}$ w punkcie 0.

- 1 Dla $x > 0$: $f(x) = 1$; dla $x < 0$: $f(x) = -1$.

Wynik: granice jednostronne 1 i -1 ; granica w 0 nie istnieje.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 4 min

1 Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1}$.

2 Czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$? Uzasadnij jednym zdaniem.

3 Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)^2}$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

FUNKCJE WYMIERNE: NAJWYŻSZE POTĘGI

Podziel licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x z mianownika, tak jak przy granicach ciągów. Wynik zależy od stopni:

- stopień licznika mniejszy: granica 0;
- stopnie równe: iloraz współczynników przy najwyższych potęgach;
- stopień licznika większy: $\pm\infty$, znak z wyrazów najwyższego stopnia (uważaj na $x \rightarrow -\infty$).

Przykład 3.1

Trzy przypadki

Oblicz granice przy $x \rightarrow +\infty$: a) $\frac{2x^2+1}{x^2-3x}$, b) $\frac{x+1}{x^2+1}$, c) $\frac{x^3}{x^2+1}$.

- 1 a) $\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow 2$.
- 2 b) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$.
- 3 c) $\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} \rightarrow +\infty$.

Wynik: 2, 0, $+\infty$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 3 min

1 Oblicz $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x}{1 - 2x^3}$.

2 Oblicz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

3 Oblicz $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2}{x^2 + 1}$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

CIĄGŁOŚĆ W PUNKCIE

$$f \text{ ciągła w } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Typowe zadanie: funkcja sklejona z dwóch wzorów z parametrem. Każdy wzór jest ciągły na swoim przedziale, więc jedyny podejrzany punkt to punkt sklejenia. Oblicz obie granice jednostronne i wartość w tym punkcie, przyrównaj.

Przykład 4.1

Parametr w sklejeniu

Dla jakiego a funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{dla } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$ jest ciągła?

1 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 5.$

2 $1 + a = 5.$

Wynik: $a = 4.$

Przykład 4.2

Dziura do zaklejenia

Dla jakiego m funkcja $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ dla $x \neq 3$ i $f(3) = m$ jest ciągła?

1 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6.$

Wynik: $m = 6.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 3 min

- 1 Dla jakiego a funkcja $f(x) = ax + 1$ dla $x \leq 2$ i $f(x) = x^2 - 1$ dla $x > 2$ jest ciągła?



2 Dla jakiego m funkcja $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ dla $x \neq 2$, $f(2) = m$, jest ciągła?

podstawowe średnie trudniejsze

5 Własność Darboux

TWIERDZENIE

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, to przyjmuje każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$. W szczególności: jeśli $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki, to istnieje $x_0 \in (a, b)$, dla którego $f(x_0) = 0$.

Zapis dowodu w trzech krokach (tak punktuje klucz):

1. oblicz $f(a)$ i $f(b)$;
2. zapisz, że mają przeciwne znaki, i uzasadnij ciągłość („ f jest wielomianem”, „ f jest sumą funkcji ciągłych na $[a, b]$ ”);
3. powołaj się na własność Darboux i zapisz wniosek.

Przykład 5.1

Pełny zapis dowodu

Wykaż, że równanie $x^3 + x - 1 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

1. Niech $f(x) = x^3 + x - 1$. $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
2. $f(0) < 0 < f(1)$. Funkcja f jest wielomianem, więc jest ciągła na $[0, 1]$.
3. Z własności Darboux istnieje $x_0 \in (0, 1)$, dla którego $f(x_0) = 0$, czyli równanie ma rozwiązanie w $(0, 1)$. ■

Przykład 5.2

Przybliżanie pierwiastka: bisekcja

Znajdź przedział długości $\frac{1}{8}$ zawierający pierwiastek równania z przykładu 5.1.

- 1 $f(0,5) = -\frac{3}{8} < 0$: pierwiastek w $(0,5; 1)$.
- 2 $f(0,75) = \frac{11}{64} > 0$: pierwiastek w $(0,5; 0,75)$.
- 3 $f(0,625) = -\frac{67}{512} < 0$: pierwiastek w $(0,625; 0,75)$.

Wynik: $x_0 \in (0,625; 0,75)$; dokładniej $x_0 \approx 0,682$. Każdy krok połowi przedział.

Przykład 5.3

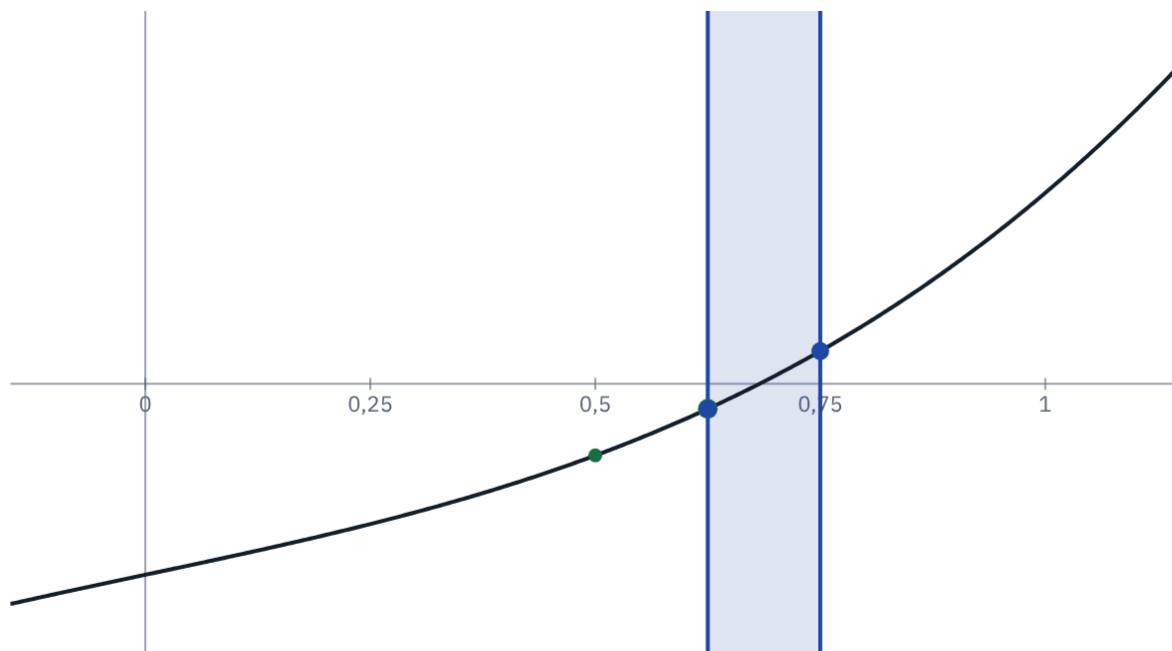
Dwa pierwiastki

Wykaż, że równanie $x^4 - 4x + 1 = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

1. $f(x) = x^4 - 4x + 1$: $f(0) = 1$, $f(1) = -2$, $f(2) = 9$.
2. f jest wielomianem, więc jest ciągła na $[0, 1]$ i na $[1, 2]$; na każdym z tych przedziałów zmienia znak.
3. Z własności Darboux istnieje pierwiastek w $(0, 1)$ i pierwiastek w $(1, 2)$. Przedziały są rozłączne, więc są to dwa różne rozwiązania. ■

SYMULACJA 1

Wybierz funkcję i wykonaj kolejne kroki bisekcji. Przedział $[a, b]$, na którego końcach funkcja ma przeciwne znaki, połowi się w każdym kroku. Ostatnia funkcja, $\frac{1}{x}$, zmienia znak na $[-1, 2]$, ale nie jest tam ciągła i nie ma miejsca zerowego: bez ciągłości twierdzenie nie działa.



— wykres f — bieżący przedział $[a, b]$ — środki kolejnych przedziałów

a 0,62500

b 0,75000

długość $b - a$ 0,12500

$f(a), f(b)$ -0,131; 0,172

f jest ciągła, a $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki, więc z własności Darboux miejsce zerowe leży w $[0,6250, 0,7500]$. Każdy krok połowi przedział.

Stan na rysunku: $x^3 + x - 1$ na $[0, 1]$, 3 kroków bisekcji, przedział $[0,6250, 0,7500]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

3 zadania · ok. 8 min

1 Wykaż, że równanie $x^3 - 3x + 1 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

■ ■ ■

2 Wykaż, że równanie $x^5 + x = 1$ ma rozwiązanie w przedziale $(\frac{1}{2}, 1)$.

■ ■ ■

3 Wykaż, że równanie $x^3 - 4x + 1 = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 18 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · GRANICE Z 0/0

ZESTAWY A

1 Oblicz granicę.



a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM B · JEDNOSTRONNE I W NIESKOŃCZONOŚCI

ZESTAWY B

1 Oblicz granicę.



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 3}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM C · CIĄGŁOŚĆ Z PARAMETREM

ZESTAWY C

1 Wyznacz parametr, dla którego funkcja jest ciągła.



a) $x + a$ dla $x < 0$, $x^2 + 2$
dla $x \geq 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM D · WARTOŚCI DO DOWODU Z DARBOUX

ZESTAWY D

- 1 Oblicz wartości funkcji w podanych punktach i wskaż przedziały, w których na pewno jest miejsce zerowe.

a) $x^3 + 2x - 5$ w 1 i 2

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

Pełny trening (18 przykładów i zadań) →

7 Na maturze

Zadania z informatora CKE do tej lekcji to wyłącznie dowody za 3 punkty z własności Darboux, a w arkuszach 2024 – sierpień 2026 nie było żadnego zadania z tego zakresu. Klucz: 1 punkt za wartości na końcach przedziału, 2 punkty za przeciwne znaki i uzasadnienie ciągłości, 3 punkty za powołanie się na własność Darboux i wniosek. Brak zdania o ciągłości kosztuje punkt nawet przy bezbłędnym rachunku. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 8 pkt · ok. 20 min

- 1 (0–3 pkt) Wykaż, że równanie $\log_2 x = 4 - x$ ma rozwiązanie w przedziale $(2, 3)$.

2 (0–2 pkt) Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

- 3 (0–3 pkt) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ dla $x < 2$ oraz $f(x) = mx + 1$ dla $x \geq 2$. Wyznacz m , dla którego f jest ciągła w punkcie 2.

podstawowe średnie trudniejsze

8 Najczęstsze błędy

× „ $f(0) < 0 < f(1)$, więc jest pierwiastek.”

Tylko dla funkcji ciągłej. $\frac{1}{x}$ ma $f(-1) < 0 < f(1)$ i nie ma miejsca zerowego. Zdanie o ciągłości jest obowiązkowe.

× „ $\frac{0}{0} = 1$ ” albo „ $\frac{0}{0} = \text{granica nie istnieje}$ ”.

$\frac{0}{0}$ to sygnał do skracania, nie wynik.

× „ $\frac{3}{0} = \infty$.”

Znak zależy od strony: $\frac{3}{0^+} \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{0^-} \rightarrow -\infty$. Granica obustronna może nie istnieć.

× „Dwa przedziały ze zmianą znaku, więc dokładnie dwa pierwiastki.”

Darboux daje „co najmniej”. „Dokładnie” wymaga osobnego argumentu (stopień wielomianu, monotoniczność).

9

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Czy granica funkcji w x_0 zależy od $f(x_0)$?

Nie. Liczą się tylko wartości dla $x \neq x_0$ blisko x_0 .

2 Ile wynosi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + x}$?

2.

3 Jakie trzy elementy musi mieć dowód z własności Darboux?

Wartości na końcach o przeciwnych znakach, uzasadnienie ciągłości, powołanie się na twierdzenie i wniosek.

4 Czy funkcja ciągła na $[a, b]$ z $f(a) > 0$ i $f(b) > 0$ może mieć miejsce zerowe w (a, b) ?

Tak (np. $x^2 - \frac{1}{4}$ na $[-1, 1]$). Darboux daje warunek wystarczający, nie konieczny.

GRANICE

w dziedzinie: podstaw; $\frac{0}{0}$: rozłóż i skróć

$\frac{c}{0^\pm}$, $c \neq 0$: $\pm\infty$ ze znaków

$x \rightarrow \pm\infty$: porównaj stopnie

CIĄGŁOŚĆ I DARBOUX

ciągła: $\lim^- = \lim^+ = f(x_0)$

dowód: wartości, znaki + ciągłość,
Darboux

„co najmniej k ”: k rozłącznych
przedziałów

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie ma działu o granicach i ciągłości funkcji ani własności Darboux; są tylko granice ciągów w dziale o ciągach. Twierdzenie i schemat dowodu trzeba znać.

Dalej: pochodna funkcji (lekcja 13.2 Pochodna: definicja, interpretacja i obliczanie), której definicja jest granicą ilorazu różnicowego.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $x + 3 \rightarrow 6$.
2. $\frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = x + 2 \rightarrow 1$.
3. $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$, więc wyrażenie to $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \rightarrow \frac{1}{4}$.

Zadania • część 2

1. Mianownik $\rightarrow 0^-$: $-\infty$.
2. Nie: granice jednostronne są równe 1 i -1 .
3. Licznik $\rightarrow -1$, mianownik $\rightarrow 0^+$ z obu stron: $-\infty$ (granica obustronna niewłaściwa).

Zadania • część 3

1. $\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$.
2. $\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$, a $x \rightarrow -\infty$: $-\infty$.
3. 0.

Zadania • część 4

1. $2a + 1 = 3$, $a = 1$.
2. $\frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1 \rightarrow 3$: $m = 3$.

Zadania • część 5

1. $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$; f jest wielomianem, więc ciągła na $[0, 1]$; z własności Darboux istnieje $x_0 \in (0, 1)$ z $f(x_0) = 0$.
2. $f(x) = x^5 + x - 1$: $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{15}{32} < 0$, $f(1) = 1 > 0$; wielomian, więc ciągła; Darboux.
3. $f(-3) = -14$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = -2$, $f(2) = 1$: zmiany znaku na $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$; ciągłość wielomianu i Darboux dają trzy różne pierwiastki. Wielomian stopnia 3 ma ich co najwyżej trzy, więc dokładnie trzy.

Zestawy A

1. a) 2 b) $x^2 + x + 1 \rightarrow 3$

Zestawy B

1. a) 2

Zestawy C

1. a) $a = 2$

Zestawy D

1. a) -2 i 7 : pierwiastek w $(1, 2)$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. **Funkcja i wartości.** $f(x) = \log_2 x + x - 4$; $f(2) = 1 + 2 - 4 = -1$; $f(3) = \log_2 3 - 1$.
2. **Znaki i ciągłość.** $\log_2 3 > \log_2 2 = 1$, więc $f(3) > 0 > f(2)$. Funkcja f jest sumą funkcji logarytmicznej i liniowej, ciągłych na $(0, +\infty)$, więc jest ciągła na $[2, 3]$.
3. **Darboux.** istnieje $x_0 \in (2, 3)$, dla którego $f(x_0) = 0$, czyli $\log_2 x_0 = 4 - x_0$. ■
1 pkt za $f(2)$ i $f(3)$. 2 pkt za uzasadnienie $f(3) > 0$ i ciągłości f . 3 pkt za powołanie się na własność Darboux i wniosek.
2. 1. **Rozkład.** $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$ dla $x \neq 2$.
2. **Granica.** $\frac{12}{4} = 3$.
1 pkt za skrócenie przez $x - 2$. 2 pkt za wynik 3.
3. 1. **Granica lewostronna.** $\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3 \rightarrow 5$.
2. **Prawa strona.** $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 2m + 1$.
3. **Warunek.** $2m + 1 = 5$, $m = 2$.
1 pkt za granicę lewostronną 5. 2 pkt za równanie $2m + 1 = 5$. 3 pkt za $m = 2$.

Matura z matematyki · Lekcja 13.1: Granice i ciągłość funkcji, własność Darboux · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt13_1.py).