

Schemat Bernoulliego

Schemat Bernoulliego to jeden wzór z broszury, ale w puli CKE z lat 2024–2026 są tylko dwa zadania z nim: jedno egzaminacyjne (czerwiec 2025) i jedno w informatorze. To mała próbka, więc ta lekcja jest krótka. Ważniejsze od samego wzoru są trzy rzeczy: rozpoznanie, kiedy wolno go użyć, liczenie „co najmniej” i „co najwyżej” przez dopełnienie lub sumę oraz zaokrąglanie dopiero na końcu.

CZAS

ok. 20 min
czytania + ok. 30
min zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
XII.2R

W TEJ LEKCJI

- 0 Powtórzenia tej samej próby
- 1 Wzór na dokładnie k sukcesów
- 2 „Co najmniej” i „co najwyżej”
- 3 Ile prób potrzeba
- 4 Kiedy to nie jest schemat Bernoulliego
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Powtórzenia tej samej próby

Próba Bernoulliego ma dwa wyniki: sukces z prawdopodobieństwem p i porażkę z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Schemat Bernoulliego to n **niezależnych** powtórzeń tej samej próby: rzuty kostką, rzuty monetą, losowania *ze zwracaniem*, kolejne niezależne rzuty do kosza. Pytamy o liczbę sukcesów, a nie o to, które próby się udały.

Wzór na dokładnie k sukcesów

 WZÓR (W BROSZURZE CKE)

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Skąd się bierze: jeden konkretny ciąg z k sukcesami i $n - k$ porażkami ma prawdopodobieństwo $p^k q^{n-k}$ (iloczyn, bo próby są niezależne), a takich ciągów jest $\binom{n}{k}$, tyle, ile sposobów wyboru pozycji sukcesów (lekcja 11.2 Permutacje, wariacje, kombinacje i symbol Newtona). W rozwiązaniu zawsze zapisz n , k , p i q : za to klucz daje pierwszy punkt.

Przykład 1.1

Dwie szóstki w pięciu rzutach

Rzucamy pięć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie dwa razy.

- 1 $n = 5, k = 2, p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$.
- 2 $P_5(2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{1250}{7776}$.

Wynik: $\frac{625}{3888} \approx 0,161$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 4 min

- 1  Rzucamy cztery razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy.

- 2 Test ma 6 pytań, każde z czterema odpowiedziami, z których jedna jest poprawna.
■ ■ ■ Uczeń zgaduje wszystkie odpowiedzi. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafi dokładnie 3.

- 3 Oblicz $P_5(5)$ przy $p = 0,9$.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

2 „Co najmniej” i „co najwyżej”

🔑 DWA SPOSOBY

- **Co najwyżej m :** suma $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m)$. Przy małym m to dwa, trzy składniki.
- **Co najmniej m :** jeśli m jest małe, przez dopełnienie: $1 - P_n(0) - \dots - P_n(m-1)$.
Najczęstszy przypadek: **co najmniej jeden sukces** $= 1 - q^n$.

Wybierz sposób z mniejszą liczbą składników. Zaokrąglaj dopiero wynik końcowy.

Przykład 2.1

Co najwyżej jeden sukces

Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie wynosi 0,1. Wykonujemy 10 prób. Oblicz prawdopodobieństwo co najwyżej jednego sukcesu. Wynik podaj w zaokrągleniu do części tysięcznych.

- 1 $P_{10}(0) = 0,9^{10}$, $P_{10}(1) = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,9^9 = 0,9^9$.
- 2 Suma: $0,9^9(0,9 + 1) = 1,9 \cdot 0,9^9 = 1,9 \cdot 0,387420489 \dots$

Wynik: $\approx 0,736$. Wyłączenie wspólnego czynnika $0,9^9$ oszczędza rachunki.

Przykład 2.2

Co najmniej jedna szóstka

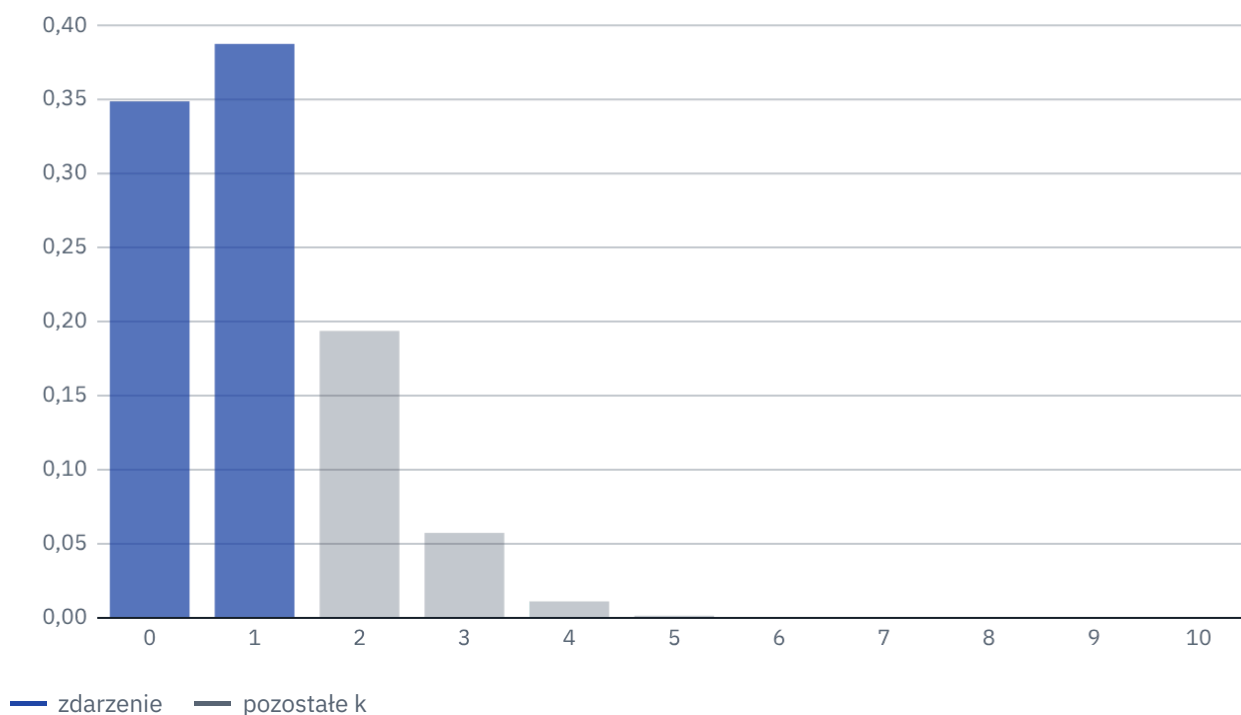
Rzucamy cztery razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie co najmniej raz.

- 1 Dopełnienie: żadnej szóstki, $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.

Wynik: $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518$.

SYMULACJA 1

Rozkład liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego: wysokość słupka nad k to $P_n(k)$. Ustaw n i p , wybierz rodzaj zdarzenia i próg m . Zaznaczone słupki składają się na szukane prawdopodobieństwo; odczyt pokazuje też, ile składników ma suma bezpośrednia, a ile dopełnienie.



$q = 1 - p$ 0,90

wzór $P(0) + \dots + P(1)$

prawdopodobieństwo 0,7361

składniki: wprost / dopełnienie 2 / 9

Zaznaczonych słupków jest 2, w dopełnieniu 9. Sumuj wprost.

Stan na rysunku: $n = 10$, $p = 0,10$, $m = 1$; prawdopodobieństwo 0,7361.

- 1 Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo co najmniej jednego orła.
■ ■ ■
- 2 $n = 5, p = 0,2$. Oblicz prawdopodobieństwo co najwyżej jednego sukcesu.
■ ■ ■
- 3 Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie co najmniej dwa razy.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

3 Ile prób potrzeba

🔑 NIERÓWNOŚĆ Z POTĘGĄ

„Ile co najmniej prób, by prawdopodobieństwo co najmniej jednego sukcesu przekroczyło c ?” prowadzi do $1 - q^n > c$, czyli $q^n < 1 - c$. Ponieważ $0 < q < 1$, potęga q^n maleje, więc szukamy najmniejszego n , dla którego nierówność już zachodzi. Licz kolejne potęgi (albo użyj logarytmu, lekcja 1.3 Logarytmy) i sprawdź obie sąsiednie wartości $n - 1$ i n .

Przykład 3.1

Ile rzutów do kosza

Zawodnik trafia z prawdopodobieństwem 0,3, a rzuty są niezależne. Ile co najmniej rzutów musi wykonać, aby prawdopodobieństwo co najmniej jednego trafienia było większe od 0,9?

- 1 $1 - 0,7^n > 0,9 \iff 0,7^n < 0,1$.
- 2 $0,7^6 \approx 0,118$ (za dużo), $0,7^7 \approx 0,082$ (wystarcza).

Wynik: $n = 7$.

- 1 Ile co najmniej razy trzeba rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej szóstki było większe od $\frac{1}{2}$?

- 2 Ile co najmniej razy trzeba rzucić monetą, aby prawdopodobieństwo co najmniej jednego orła było nie mniejsze niż 0,99?

podstawowe średnie trudniejsze

4 Kiedy to nie jest schemat Bernoulliego

Wzór wymaga, by próby były niezależne i miały to samo p . Losowanie **bez zwracania** tego nie spełnia: po wyjęciu białej kuli szansa na następną białą maleje. Wtedy liczymy klasycznie (lekcja 12.1 Prawdopodobieństwo klasyczne). Sprawozdanie CKE z 2025 roku wymienia wśród błędów właśnie „nieuprawnione użycie schematu Bernoulliego”.

Przykład 4.1

Bez zwracania

W urnie jest 5 kul białych i 5 czarnych. Losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie są białe.

- 1 Klasycznie: $\frac{\binom{5}{2} \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$.
- 2 Błędnie Bernoullim: $\binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$. Wynik jest inny, bo losowania nie są niezależne.

Wynik: $\frac{5}{12}$. Schemat Bernoulliego pasowałby, gdyby losować trzy razy *ze zwracaniem*.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 2 min

- 1 Które z doświadczeń jest schematem Bernoulliego (podaj n i p)? a) 4 rzuty kostką, liczba szóstek; b) 3 karty wyciągnięte z talii bez zwracania, liczba asów; c) 5 losowań ze zwracaniem z urny z 3 kulami białymi i 2 czarnymi, liczba białych.

podstawowe średnie trudniejsze

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 18 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WZÓR

ZESTAWY A

1 Oblicz.



a) $P_3(1), p = \frac{1}{2}$

b) $P_6(2), p = \frac{1}{6}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · CO NAJMNIJ, CO NAJWYŻEJ

ZESTAWY B

1 Oblicz.



a) $n = 3, p = 0,4$: co
najmniej jeden sukces

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · ILE PRÓB

ZESTAWY C

1 Najmniejsze n , dla którego prawdopodobieństwo co najmniej jednego sukcesu spełnia warunek.



a) $p = 0,5$, większe od 0,9

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

ZESTAWY D

1 Czy to schemat Bernoulliego? Jeśli tak, podaj n i p .



a) 4 rzuty kostką, liczba szóstek

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

Pełny trening (18 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Jedyne zadanie egzaminacyjne z lat 2024–2026 (czerwiec 2025) dotyczyło „co najwyżej jednego sukcesu” w 10 próbach. Klucz: 1 punkt za p i q , 2 punkty za sumę $P(S = 0) + P(S = 1)$, 3 punkty za wynik. Same składniki bez sumy dawały co najwyżej 1 punkt; błędnie odczytane p przy konsekwentnym rachunku dawało 2 punkty. Zadanie z informatora pyta o liczbę prób. Danych o łatwości z sesji majowych nie ma. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 10 pkt · ok. 25 min

1 (0–3 pkt) Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka jest wadliwa, jest równe 0,05. Kupujemy 8 żarówek. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna z nich jest wadliwa. Wynik podaj w zaokrągleniu do części tysięcznych.

2 (0–3 pkt) Ile co najmniej razy trzeba rzucić symetryczną monetą, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej reszki było większe od 0,999?

3 (0–4 pkt) Rzucamy pięć razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie co najmniej dwa razy. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

podstawowe średnie trudniejsze

Najczęstsze błędy

× „Dokładnie dwa sukcesy: $p^2 q^{n-2}$.”

To prawdopodobieństwo jednego konkretnego ciągu. Brakuje $\binom{n}{2}$, czyli wyboru, które próby są sukcesami.

× „Co najmniej jeden: $n \cdot p$.”

To nie jest prawdopodobieństwo (dla $n = 10$, $p = 0,2$ dałoby 2). Poprawnie: $1 - q^n$.

× „Losowanie bez zwracania: Bernoulli.”

Bez zwracania próby nie są niezależne. Licz klasycznie.

× „ $0,95^7 \approx 0,7$, więc wynik $\approx 0,945$.”

Zaokrąglanie po drodze zmienia trzecią cyfrę wyniku. Zaokrąglaj tylko wynik końcowy.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile wynosi $P_n(0)$?

$$q^n.$$

2 Ile wynosi prawdopodobieństwo co najmniej jednego orła w trzech rzutach monetą?

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

3 Dlaczego we wzorze jest $\binom{n}{k}$?

Tyle jest ciągów prób z k sukcesami; każdy ma prawdopodobieństwo $p^k q^{n-k}$.

4 Kiedy „co najmniej m ” liczyć przez dopełnienie?

Gdy m jest małe: dopełnienie ma wtedy tylko m składników ($k = 0, \dots, m - 1$).

WZORY

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

co najmniej jeden: $1 - q^n$

co najwyżej jeden: $q^n + npq^{n-1}$

METODA

zapisz n, k, p, q

mniej składników: suma albo dopełnienie

ile prób: $q^n < 1 - c$, sprawdź $n - 1$ i n

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (dział 14) jest definicja próby i schematu Bernoulliego oraz wzór na $P_n(k)$. Wzoru $1 - q^n$ i metody „ile prób” w broszurze nie ma.

Dalej: rachunek różniczkowy, zaczynając od granic i ciągłości funkcji (lekcja 13.1 Granice i ciągłość funkcji, własność Darboux).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\binom{4}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
2. $\binom{6}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20 \cdot \frac{27}{4096} = \frac{135}{1024} \approx 0,132$.
3. $0,9^5 = 0,59049$.

Zadania • część 2

1. $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.
2. $0,8^5 + 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,32768 + 0,4096 = 0,73728$.
3. $P_3(2) + P_3(3) = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{216} = \frac{15+1}{216} = \frac{2}{27}$.

Zadania • część 3

1. $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,579$, $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,482 < 0,5$; $n = 4$.
2. $0,5^n \leq 0,01$; $0,5^6 = 0,015625$, $0,5^7 = 0,0078125$; $n = 7$.

Zadania • część 4

1. a) tak, $n = 4$, $p = \frac{1}{6}$; b) nie (bez zwracania); c) tak, $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$.

Zestawy A

1. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{9375}{46656} \approx 0,201$

Zestawy B

1. a) $1 - 0,6^3 = 0,784$

Zestawy C

1. a) $n = 4$

Zestawy D

1. a) tak, $n = 4$, $p = \frac{1}{6}$

Zadania w stylu maturalnym

1. **Parametry.** $n = 8$, sukces – żarówka wadliwa, $p = 0,05$, $q = 0,95$.
2. **Suma.** $P_8(0) + P_8(1) = 0,95^8 + 8 \cdot 0,05 \cdot 0,95^7 = 0,95^7(0,95 + 0,4) = 1,35 \cdot 0,95^7$.
3. **Wynik.** $0,95^7 \approx 0,69834$, $1,35 \cdot 0,69834 \approx 0,943$.
1 pkt za n , p , q . 2 pkt za sumę $P_8(0) + P_8(1)$ z poprawnymi składnikami. 3 pkt za $\approx 0,943$.
2. 1. **Nierówność.** $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,999 \iff 2^n > 1000$.
2. **Sąsiednie potęgi.** $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$.
3. **Wynik.** $n = 10$.

1 pkt za nierówność $1 - 0,5^n > 0,999$. **2 pkt** za postać $2^n > 1000$ albo $0,5^n < 0,001$. **3 pkt** za $n = 10$ ze sprawdzeniem $n = 9$.

3. 1. Parametry. $n = 5, p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$.

2. Składniki dopełnienia. $P_5(0) = \frac{3125}{7776}, P_5(1) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3125}{7776}$.

3. Dopełnienie. $1 - \frac{6250}{7776} = \frac{1526}{7776}$.

4. Wynik. $\frac{763}{3888} \approx 0,196$.

1 pkt za n, p, q . **2 pkt** za $P_5(0)$ i $P_5(1)$. **3 pkt** za zapis $1 - P_5(0) - P_5(1)$. **4 pkt** za $\frac{763}{3888}$.

Matura z matematyki · Lekcja 12.4: Schemat Bernoulliego · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt12_4.py).