

Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i wzór Bayesa

W arkuszach rozszerzonych 2024–2026 ta lekcja daje jedno zadanie otwarte za 3–4 punkty: najczęściej wzór Bayesa w kontekście praktycznym (piekarnie, testy, dostawcy) z wynikiem do części setnych, rzadziej $P(A|B)$ w doświadczeniu z kostkami. To drugie miało w maju 2025 łatwość 14%, najniższą w całym arkuszu. Powód nie leżał we wzorze, tylko w liczeniu $|A \cap B|$ i w zapisie zdarzeń. Lekcja pokazuje, jak warunek zawężyć Ω , jak liczyć po gałęziach drzewa i jak czytać wzór Bayesa jako stosunek dwóch pól.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
XII.1R

W TEJ LEKCJI

- 0 Warunek zmienia Ω
- 1 Prawdopodobieństwo warunkowe
- 2 Drzewo: mnożenie wzdłuż gałęzi
- 3 Prawdopodobieństwo całkowite
- 4 Wzór Bayesa
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Warunek zmienia Ω

„Prawdopodobieństwo A pod warunkiem B ” to odpowiedź na pytanie: wiemy już, że zaszło B ; jaka jest teraz szansa na A ? Informacja „zaszło B ” wyrzuca z gry wszystkie wyniki spoza B . Nowym zbiorem wszystkich możliwości staje się B , a sprzyjające A są tylko te wyniki, które leżą w A i w B jednocześnie. W modelu klasycznym oznacza to, że $|\Omega|$ w ogóle nie jest potrzebne: wystarczą $|B|$ i $|A \cap B|$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

DEFINICJA (W BROSZURZE CKE)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0; \quad \text{w modelu klasycznym } P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Kolejność ma znaczenie: $P(A|B)$ i $P(B|A)$ mają ten sam licznik $P(A \cap B)$, ale różne mianowniki. W rozwiązaniu nazwij zdarzenia słowami („ A – iloczyn oczek parzysty”, „ B – suma oczek równa 9”), zanim zaczniesz liczyć.

Przykład 1.1

Dwie kostki

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek jest równa 8, pod warunkiem że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek.

- 1 B – w pierwszym rzucie wynik parzysty: $|B| = 3 \cdot 6 = 18$.
- 2 $A \cap B$: (2, 6), (4, 4), (6, 2), czyli 3.

Wynik: $P(A|B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. Bez warunku byłoby $\frac{5}{36}$.

Przykład 1.2

Warunek o sumie

Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 9\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie są nieparzyste, jeśli wiadomo, że ich suma jest parzysta.

- 1 B – suma parzysta: obie nieparzyste ($5 \cdot 4 = 20$) albo obie parzyste ($4 \cdot 3 = 12$); $|B| = 32$.
- 2 $A \cap B$ – obie nieparzyste: 20.

Wynik: $P(A|B) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 5 min

- 1 Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek jest co najmniej 10, pod warunkiem że w obu rzutach wypadła ta sama liczba oczek.
- 2 W rodzinie jest dwoje dzieci i wiadomo, że co najmniej jedno jest dziewczynką. Przyjmij, że każda z czterech kolejności płci (DD, DC, CD, CC) jest jednakowo prawdopodobna. Oblicz prawdopodobieństwo, że oboje dzieci to dziewczynki.
- 3 $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,2$. Oblicz $P(A|B)$ i $P(B|A)$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Drzewo: mnożenie wzdłuż gałęzi

WZÓR NA ILOCZYN I DRZEWO

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

W doświadczeniu wieloetapowym rysujemy drzewo: na gałęziach piszemy prawdopodobieństwa warunkowe (pod warunkiem tego, co stało się wcześniej). Prawdopodobieństwo jednej ścieżki to **iloczyn** liczb na jej gałęziach; prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego z kilku ścieżek to **suma** ich iloczynów.

Przykład 2.1

Druga kula biała

W urnie są 4 kule białe i 3 czarne. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że druga kula jest biała.

- 1 Ścieżka „biała, biała”: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$.
- 2 Ścieżka „czarna, biała”: $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$.
- 3 Suma: $\frac{24}{42}$.

Wynik: $\frac{4}{7}$: tyle samo, co dla pierwszej kuli. Bez informacji o pierwszym losowaniu każda pozycja jest równie dobra.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 3 min

- 1 W urnie jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy kolejno dwie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie są czarne.

- 2 Z tej samej urny oblicz prawdopodobieństwo, że druga kula jest biała.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

3 Prawdopodobieństwo całkowite

🔊 TWIERDZENIE (W BROSZURZE CKE)

Jeśli $B_1, \dots, B_n$ są parami rozłączne, dają w sumie Ω i mają dodatnie prawdopodobieństwa, to

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

Zdarzenia B_i to „skąd” (który zakład, która urna, czy osoba jest chora), A to „co zaobserwowano”. W drzewie to suma ścieżek kończących się na A . W zadaniu wypisz najpierw wszystkie $P(B_i)$ i $P(A|B_i)$: za samo to klucz daje pierwszy punkt.

Przykład 3.1

Trzy zakłady

Zakłady I, II, III wytwarzają odpowiednio 50%, 30% i 20% produkcji. Wadliwych jest 2% wyrobów zakładu I, 3% zakładu II i 5% zakładu III. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób jest wadliwy.

- 1 $P(B_1) = 0,5, P(B_2) = 0,3, P(B_3) = 0,2; P(A|B_1) = 0,02, P(A|B_2) = 0,03, P(A|B_3) = 0,05.$
- 2 $P(A) = 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,010 + 0,009 + 0,010.$

Wynik: $P(A) = 0,029.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 4 min

- 1  Rzucamy monetą: orzeł oznacza losowanie z urny I (2 białe, 3 czarne), reszka z urny II (4 białe, 1 czarna). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.
- 2  Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie szóstka, losujemy kulę z urny A (3 białe, 1 czarna), w przeciwnym razie z urny B (1 biała, 3 czarne). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Wzór Bayesa

WZÓR BAYESA (W BROSZURZE CKE)

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Czytaj go jako ułamek: w liczniku jedna ścieżka drzewa (przez B_k do A), w mianowniku wszystkie ścieżki do A , czyli $P(A)$ z prawdopodobieństwa całkowitego. Pytanie „wiedząc, że zaobserwowano A , jaka jest szansa, że przyczyną było B_k ” rozpoznasz po odwróconej kolejności względem danych.

Przykład 4.1

Skąd jest wadliwy wyrób

W sytuacji z przykładu 3.1 losowo wybrany wyrób okazał się wadliwy. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi z zakładu III.

- 1 Licznik: ścieżka przez III: $0,2 \cdot 0,05 = 0,010$.
- 2 Mianownik: $P(A) = 0,029$.

Wynik: $\frac{0,010}{0,029} = \frac{10}{29} \approx 0,34$. Zakład III daje 20% produkcji, ale ponad jedną trzecią braków.

Przykład 4.2

Dodatni wynik testu

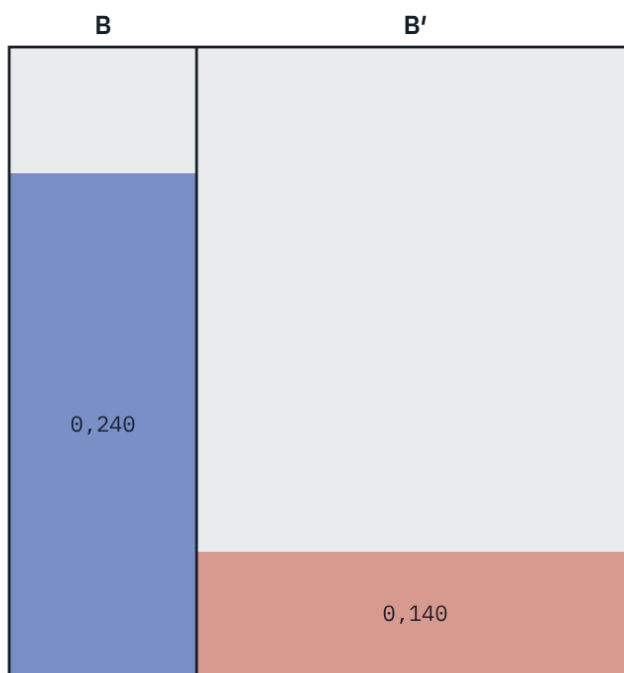
Choroba występuje u 1% populacji. Test daje wynik dodatni u 95% chorych i u 4% zdrowych. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba z wynikiem dodatnim jest chora. Wynik podaj z dokładnością do części setnych.

- 1 Ścieżka „chory, dodatni”: $0,01 \cdot 0,95 = 0,0095$.
- 2 Ścieżka „zdrowy, dodatni”: $0,99 \cdot 0,04 = 0,0396$.
- 3 $\frac{0,0095}{0,0095+0,0396} = \frac{0,0095}{0,0491}$.

Wynik: $\approx 0,19$. Mimo czułego testu większość wyników dodatnich pochodzi od zdrowych, bo zdrowych jest 99 razy więcej. Zaokrąglaj dopiero na końcu.

SYMULACJA 1

Kwadrat o polu 1 to całe Ω . Lewa część (szerokość $P(B)$) to zdarzenie B , prawa to B' . W każdej części zamalowana jest dolna część o wysokości $P(A|B)$ albo $P(A|B')$: pola zamalowanych prostokątów to ścieżki drzewa. $P(A)$ to suma tych pól, a $P(B|A)$ to udział lewego prostokąta w tej sumie.



■ $B \cap A$ ■ $B' \cap A$ ■ poza A

$P(B) \cdot P(A|B)$ 0,2400

$P(B') \cdot P(A|B')$ 0,1400

$P(A)$ 0,3800

$P(B|A)$ 0,6316

$P(A)$ to suma pól zamalowanych: $0,2400 + 0,1400 = 0,3800$. Wzór Bayesa: $P(B|A) = 0,2400 : 0,3800 \approx 0,63$, czyli udział niebieskiego pola w całym zamalowanym obszarze.

Stan na rysunku: $P(B) = 0,30$, $P(A|B) = 0,80$, $P(A|B') = 0,20$; $P(A) = 0,3800$, $P(B|A) \approx 0,63$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 5 min

1 W sytuacji z pierwszego zadania części 3 wylosowano kulę białą. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodziła z urny I.

2 Wśród studentów 40% to mężczyźni. Okulary nosi 30% mężczyzn i 10% kobiet. Losowo wybrana osoba nosi okulary. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest mężczyzną.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 19 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · $P(A|B)$

ZESTAWY A

1 Oblicz.



- a) dwie kostki: suma 7 pod warunkiem, że w pierwszym rzucie wypadło 3
- b) $P(A \cap B) = 0,12$, $P(B) = 0,3$: $P(A|B)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM B · DRZEWO

ZESTAWY B

1 Urna: 2 kule białe i 3 czarne (w ostatnim przykładzie 3 białe i 2 czarne). Oblicz.



- a) dwie bez zwracania: obie białe

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM C · PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE

ZESTAWY C

1 Oblicz $P(A)$.



- a) moneta wybiera urnę I (1 b, 1 c) albo II (3 b, 1 c); A — biała

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM D · WZÓR BAYESA

ZESTAWY D

1 Oblicz (dane z poziomu C).



- a) urna I pod warunkiem, że wylosowano białą (pierwszy przykład C)

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (19 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Klucz do zadań z Bayesem: 1 punkt za wypisanie $P(B_i)$ i $P(A|B_i)$, 2 punkty za zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite albo Bayesa, 3 punkty za wynik (w zadaniach za 4 punkty dochodzi etap pośredni). W zadaniu kombinatorycznym z maja 2025 punkt był za $|B|$, drugi za $|A \cap B|$, trzeci za wynik; samo $|\Omega|$ nie dawało punktu. Sprawozdanie wymienia typowe błędy: pominięty czynnik położenia (na której pozycji stoi dana kostka), nieuprawnione użycie schematu Bernoulliego dla $A \cap B$ i zapis „ $\Omega = 6^4$ ” zamiast $|\Omega| = 6^4$. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 9 pkt · ok. 25 min

- 1 (0–3 pkt) Rzucamy trzy razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wyrzuconych oczek jest parzysty, jeśli wiadomo, że suma oczek jest równa 9.

- 2 (0–4 pkt) Hurtownia kupuje jabłka od trzech dostawców w stosunku 5 : 3 : 2. Jabłka I gatunku stanowią 80% dostaw pierwszego dostawcy, 60% drugiego i 50% trzeciego. Losowo wybrane jabłko jest I gatunku. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi od drugiego dostawcy. Wynik podaj w zaokrągleniu do części setnych.
- 3 (0–2 pkt) Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają: $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,8$. Oblicz $P(A|B)$ oraz $P(B'|A)$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$.”

Mianownikiem jest $|B|$, bo warunek zawęża zbiór wyników. $|\Omega|$ w ogóle nie jest potrzebne.

× „ $P(A|B) = P(B|A)$.”

Liczniki równe, mianowniki różne. W teście medycznym $P(\text{dodatni}|\text{chory}) = 0,95$, ale $P(\text{chory}|\text{dodatni}) \approx 0,19$.

× „Dokładnie dwie piątki w czterech rzutach: 5^2 możliwości na resztę.”

Brakuje wyboru *pozycji* piątek, $\binom{4}{2}$. To ten sam schemat „pozycje, potem reszta” co w lekcji 11.2 Permutacje, wariacje, kombinacje i symbol Newtona.

× „ $0,2647 \approx 0,27$, bo zaokrągåłem po drodze.”

Zaokrągåj tylko wynik końcowy. Ułamki pośrednie trzymaj dokładnie albo z zapasem cyfr.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Co jest mianownikiem w $P(A|B)$ w modelu klasycznym?
 $|B|$.

- 2 $P(B) = 0,2$, $P(A|B) = 0,5$, $P(A) = 0,25$. Ile wynosi $P(B|A)$?

$$\frac{0,2 \cdot 0,5}{0,25} = 0,4.$$

- 3 Jakie warunki muszą spełniać zdarzenia $B_1, \dots, B_n$ we wzorze na prawdopodobieństwo całkowite?

Parami rozłączne, w sumie dają Ω , każde ma dodatnie prawdopodobieństwo.

- 4 Dlaczego w teście na rzadką chorobę $P(\text{chory}|\text{dodatni})$ bywa małe?

Bo zdrowych jest bardzo dużo, więc nawet mały odsetek fałszywie dodatnich daje więcej wyników dodatnich niż wszyscy chorzy razem.

WZORY

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}$$

METODA

nazwij zdarzenia słowami

drzewo: iloczyn wzdłuż, suma ścieżek

zaokrąglaj na końcu

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (dział 14) są definicja prawdopodobieństwa warunkowego, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i twierdzenie Bayesa, wszystkie z pełnymi założeniami. Drzewa i metody „poła w kwadracie” w broszurze nie ma.

Dalej: schemat Bernoulliego (lekcja 12.4 Schemat Bernoulliego).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $|B| = 6$ dubletów, sprzyjające $(5, 5)$ i $(6, 6)$: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
2. $B = \{DD, DC, CD\}$, $A \cap B = \{DD\}$: $\frac{1}{3}$, a nie $\frac{1}{2}$.
3. $P(A|B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$; $P(B|A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$.

Zadania • część 2

1. $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.
2. $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20+15}{56} = \frac{5}{8}$.

Zadania • część 3

1. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.
2. $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3+5}{24} = \frac{1}{3}$.

Zadania • część 4

1. $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3}$.
2. $\frac{0,4 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,1} = \frac{0,12}{0,18} = \frac{2}{3}$.

Zestawy A

1. a) $\frac{1}{6}$ b) 0,4

Zestawy B

1. a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

Zestawy C

1. a) $\frac{5}{8}$

Zestawy D

1. a) $\frac{1/4}{5/8} = \frac{2}{5}$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Zdarzenia. A – iloczyn parzysty, B – suma równa 9; $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.
2. $|B|$. zbiory oczek o sumie 9: $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ – po 6 ustawień; $\{1, 4, 4\}$, $\{2, 2, 5\}$, $\{3, 3, 3\}$ – po 3, 3, 1.
1. $|B| = 18 + 7 = 25$.
3. $|A \cap B|$. łatwiej przez dopełnienie w B : iloczyn nieparzysty tylko dla samych nieparzystych, $\{1, 3, 5\}$ (6) i $\{3, 3, 3\}$ (1). $|A \cap B| = 25 - 7 = 18$.
4. Wynik. $P(A|B) = \frac{18}{25}$.
1 pkt za $|B| = 25$. 2 pkt za $|A \cap B| = 18$. 3 pkt za wynik $\frac{18}{25}$.

2. 1. Dane. $P(D_1) = 0,5$, $P(D_2) = 0,3$, $P(D_3) = 0,2$; $P(I|D_1) = 0,8$, $P(I|D_2) = 0,6$, $P(I|D_3) = 0,5$.

2. Całkowite. $P(I) = 0,40 + 0,18 + 0,10 = 0,68$.

3. Bayes. $P(D_2|I) = \frac{0,18}{0,68} = \frac{9}{34}$.

4. Wynik. $\approx 0,26$.

1 pkt za wszystkie $P(D_i)$ i $P(I|D_i)$. **2 pkt** za $P(I) = 0,68$. **3 pkt** za zapis wzoru Bayesa z liczbami. **4 pkt** za $\approx 0,26$.

3. 1. Iloczyn. $P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = 0,3$; $P(A|B) = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$.

2. Drugie. $P(A \cap B') = 0,6 - 0,3 = 0,3$; $P(B'|A) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$.

1 pkt za $P(A \cap B) = 0,3$. **2 pkt** za obie wartości.

Matura z matematyki · Lekcja 12.3: Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i wzór Bayesa · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt12_3.py).