

Prawdopodobieństwo klasyczne

Zadanie otwarte za 2 punkty z prawdopodobieństwa jest w każdym arkuszu podstawowym: dwa losowania, dwie kostki, dwie liczby z dwóch zbiorów. Klucz jest zawsze ten sam: punkt za poprawnie opisane Ω (liczbę jego elementów, tabelę albo pełną listę zdarzeń sprzyjających), punkt za wynik. Zdający rzadko mylą się we wzorze. Mylą się przy liczeniu: pomijają parę, liczą parę dwa razy albo źle sprawdzają warunek. Ta lekcja to metoda, która tych błędów nie dopuszcza.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

10 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
XII.1

W TEJ LEKCJI

- 0 Liczba przypadków sprzyjających przez liczbę wszystkich
- 1 Ω : kolejność i zwracanie
- 2 Tabela i systematyczne wypisywanie
- 3 Zdarzenie przeciwne i suma zdarzeń
- 4 Ω z kombinatoryki
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Liczba przypadków sprzyjających przez liczbę wszystkich

Ω to zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia (zdarzeń elementarnych). Jeśli każdy wynik jest tak samo prawdopodobny, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest ułamkiem: liczba wyników sprzyjających A przez liczbę wszystkich wyników. Słowa „tak samo prawdopodobny” są istotne. Suma oczek na dwóch kostkach przyjmuje 11 wartości, ale nie są one jednakowo prawdopodobne. Jednakowo prawdopodobne są uporządkowane pary wyników $(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)$, i to one tworzą Ω .

DEFINICJA KLASYCZNA (W BROSZURZE CKE)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ to liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających A , a $|\Omega|$ to liczba wszystkich zdarzeń elementarnych. Zawsze $0 \leq P(A) \leq 1$.

Ω : kolejność i zwracanie

JAK OPISAĆ Ω

- **Losowania kolejne** (dwa rzuty, „losujemy kolejno”): zdarzenia elementarne to *uporządkowane* pary (ciągi). Ze zwracaniem z n elementów: $|\Omega| = n^2$; bez zwracania: $n(n-1)$.
- **Losowanie jednoczesne** („losujemy dwie kule naraz”): wolno liczyć pary nieuporządkowane, $\binom{n}{2}$, albo uporządkowane, $n(n-1)$. Oba sposoby dają ten sam wynik, jeśli w liczniku i mianowniku liczysz tak samo.
- Zapisz $|\Omega| = \dots$, a nie „ $\Omega = 36$ ”: Ω jest zbiorem, a 36 to liczba jego elementów.

Przykład 1.1

Dwie kostki

Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek jest równa 8.

- 1 Ω : pary (a, b) , $a, b \in \{1, \dots, 6\}$; $|\Omega| = 36$.
- 2 $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$; $|A| = 5$.

Wynik: $P(A) = \frac{5}{36}$. Para $(4, 4)$ występuje raz, pary $(3, 5)$ i $(5, 3)$ to dwa różne wyniki.

Przykład 1.2

Urną bez zwracania

W urnie są 3 kule białe i 2 czarne. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie są białe.

- 1 Kule są rozróżnialne (wyobraź sobie numery). $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.
- 2 Obie białe: pierwsza na 3 sposoby, druga na 2: $|A| = 6$.

Wynik: $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 5 min

- 1 Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie dokładnie dwa razy.

- 2 Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn oczek jest parzysty.

- 3 Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że ich suma jest parzysta.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

🔧 METODA NA ZADANIE ZA 2 PUNKTY

- Gdy losuje się dwie liczby, narysuj **tabelę**: wiersze to pierwsza liczba, kolumny to druga. Każda kratka to jedno zdarzenie elementarne, więc $|\Omega|$ to liczba kratek. W każdej kratce wpisz wartość, od której zależy warunek (sumę, iloczyn, różnicę), i zaznacz kratki spełniające warunek.
- Bez tabeli **wypisuj według pierwszej liczby**: najpierw wszystkie pary zaczynające się od 1, potem od 2 itd. Tak nie pominiesz pary ani nie policzysz jej dwa razy.
- Przy losowaniu bez zwracania z jednego zbioru **wykreśl przekątną** tabeli (pary (a, a)).

Przykład 2.1

Dwie liczby z dwóch zbiorów

Losujemy liczbę x ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i liczbę y ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma $x + y$ jest podzielna przez 3.

Sumy $x + y$; pogrubione są podzielne przez 3				
$x \backslash y$	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9

- 1 $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$ kratek.
- 2 Pogrubionych kratek jest 7: $|A| = 7$.

Wynik: $P(A) = \frac{7}{20}$.

Przykład 2.2

Zapis pełnego rozwiązania

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugim rzucie wypadnie co najmniej o 2 oczka więcej niż w pierwszym.

1. Ω – zbiór par (a, b) , gdzie a i b to wyniki pierwszego i drugiego rzutu; $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.
2. $A: b \geq a + 2$. Według a : $a = 1: b \in \{3, 4, 5, 6\}$; $a = 2: b \in \{4, 5, 6\}$; $a = 3: b \in \{5, 6\}$; $a = 4: b = 6$; $a = 5, 6$: brak.
3. $|A| = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$.
4. $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Punktacja w stylu CKE: 1 pkt za $|\Omega| = 36$ albo za wypisanie wszystkich 10 par sprzyjających; 2 pkt za wynik $\frac{5}{18}$.

SYMULACJA 1

Tabela Ω dla dwóch rzutów kostką albo dwóch losowań bez zwracania ze zbioru $\{1, \dots, 6\}$. Wybierz zdarzenie i wartość s ; zaznaczone kratki to zdarzenia sprzyjające. Przy losowaniu bez zwracania przekątna jest wykreślona, a $|\Omega|$ spada z 36 do 30.

		drugi wynik →					
		1	2	3	4	5	6
pierwszy wynik ↑	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

— zdarzenie sprzyjające — wykreślone (bez zwracania)

$|\Omega|$ 36

$|A|$ 6

$P(A)$ $6/36 = 1/6$

$\approx 0,167$

W kratkach: suma. Każda kratka to jedno zdarzenie elementarne, więc $|\Omega| = 36$. Zaznaczonych kratek jest 6.

Stan na rysunku: dwa rzuty kostką, suma równa s , $s = 7$; $P(A) = 6/36 = 1/6$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 3 min

- Losujemy liczbę x ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i liczbę y ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Narysuj tabelę i oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn xy jest parzysty.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

 WŁASNOŚCI (W BROSZURZE CKE)

- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' to zdarzenie przeciwne („nie A ”). Opłaca się przy „co najmniej jeden”: przeciwne to „ani jednego”.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Opłaca się przy „podzielna przez 2 lub przez 3”: liczby podzielne przez oba policzyliśmy dwa razy.

Przykład 3.1

Co najmniej jeden orzeł

Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie co najmniej jeden orzeł.

- 1 A' : same reszki, jeden wynik z 8.
- 2 $P(A) = 1 - \frac{1}{8}$.

Wynik: $\frac{7}{8}$.

Przykład 3.2

Podzielna przez 2 lub 3

Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 30\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 2 lub przez 3.

- 1 Podzielnych przez 2: 15; przez 3: 10; przez 2 i 3, czyli przez 6: 5.
- 2 $|A \cup B| = 15 + 10 - 5 = 20$.

Wynik: $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 5 min

- 1  Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadnie szóstka.

- 2 Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 50\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 4 lub przez 6.

- 3 $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,3$. Oblicz $P(A \cup B)$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

4 Ω z kombinatoryki

Gdy wyników jest za dużo na tabelę, $|\Omega|$ i $|A|$ liczy się regułą mnożenia i dodawania z lekcji 11.1 Reguła mnożenia i reguła dodawania. Zasada pozostaje ta sama: licz A i Ω w tym samym modelu (oba z kolejnością albo oba bez).

Przykład 4.1

Losowe ustawienie

Cztery osoby, w tym Ania i Bartek, ustawiają się losowo w rzędzie. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ania i Bartek stoją obok siebie.

- 1 $|\Omega| = 4! = 24$.
- 2 Blok „Ania i Bartek”: $3! = 6$ ustawień bloku i dwóch pozostałych osób, 2 kolejności w bloku: $|A| = 12$.

Wynik: $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Przykład 4.2

Losowa liczba trzycyfrowa

Losujemy jedną liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że ma różne cyfry.

- 1 $|\Omega| = 900$; $|A| = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Wynik: $\frac{648}{900} = \frac{18}{25}$.

- 1 Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że jej cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności.
- 2 Pięć osób, w tym Ola, ustawia się losowo w kolejce. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ola będzie pierwsza.
- 3 W urnie są 3 kule białe i 4 czarne. Losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że są tego samego koloru.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 23 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · LICZBA ELEMENTÓW Ω

ZESTAWY A

- 1 Podaj $|\Omega|$.
 - a) trzy rzuty monetą... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

POZIOM B · TABELA I WYPISYWANIE

ZESTAWY B

1 Oblicz prawdopodobieństwo.



- a) jeden rzut kostką: liczba pierwsza b) dwie liczby kolejno bez zwracania z $\{1, \dots, 5\}$: pierwsza większa od drugiej

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM C · ZDARZENIE PRZECIWIWE I SUMA

ZESTAWY C

1 Oblicz.



- a) $P(A) = 0,3$: $P(A')$ b) dwa rzuty kostką: co najmniej jedna szóstka

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM D · Ω Z KOMBINATORYKI

ZESTAWY D

1 Oblicz prawdopodobieństwo.



- a) trzy osoby w losowej kolejności: Ala pierwsza

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

Pełny trening (23 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 prawdopodobieństwo to stałe zadanie otwarte za 2 punkty (kostki, dwie liczby z dwóch zbiorów, losowanie bez zwracania) i czasem zadanie zamknięte. Klucz: 1 punkt za $|\Omega|$ albo tabelę, albo pełną listę zdarzeń sprzyjających; 2 punkty za wynik.

Zadanie zamknięte z sumą oczek miało w maju 2025 łatwość 85%, otwarte z liczbą podzielną przez 6 w maju 2026 tylko 67%: zdający poprawnie wypisywali pary, ale źle sprawdzali, które liczby są podzielne przez 6. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

- 1 (0–1 pkt) Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. Prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie równa 10, jest równe
- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{5}{36}$
- 2 (0–1 pkt) Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 20\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że będzie podzielna przez 3 lub przez 5, jest równe
- A. $\frac{9}{20}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{7}{20}$
- 3 (0–1 pkt) Zdarzenie A jest trzy razy bardziej prawdopodobne niż zdarzenie do niego przeciwne. Wtedy $P(A)$ jest równe
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
- 4 (0–2 pkt) Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.
- 5 (0–2 pkt) Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma jej cyfr jest równa 5.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „Sum oczek jest 11, więc $P(\text{suma } 7) = \frac{1}{11}$.”

Sumy nie są jednakowo prawdopodobne. Zdarzenia elementarne to pary wyników, a suma 7 powstaje z 6 par.

× „(3, 5) i (5, 3) to to samo.”

Przy dwóch rzutach to dwa różne wyniki. Jeśli liczysz pary nieuporządkowane w liczniku, musisz je tak samo liczyć w mianowniku, a wtedy (4, 4) i (3, 5) przestają być jednakowo prawdopodobne. Bezpieczniej: zawsze pary uporządkowane.

× „ $|\Omega| = 36$.”

$|\Omega| = 36$. Sprawozdanie CKE z sesji 2025 (poziom rozszerzony) wymienia ten zapis wśród typowych błędów.

× „Podzielne przez 4 lub 6: $12 + 8$.”

Liczby podzielne przez oba (czyli przez 12) policzone dwa razy. Odejmij $P(A \cap B)$.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Rzucamy dwa razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo dwóch orłów?

$\frac{1}{4}$ (wyniki OO, OR, RO, RR), a nie $\frac{1}{3}$.

2 Ile wynosi $|\Omega|$ przy losowaniu kolejno dwóch liczb bez zwracania ze zbioru $\{1, \dots, 6\}$?

$6 \cdot 5 = 30$: tabela 6×6 bez przekątnej.

3 Jak najszybciej policzyć prawdopodobieństwo co najmniej jednej szóstki w dwóch rzutach?

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$.

4 Kiedy $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

Gdy A i B się wykluczają, czyli $A \cap B = \emptyset$.

WZORY

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

METODA

pary uporządkowane, $|\Omega| = n \cdot m$

tabela; bez zwracania bez przekątnej

wypisuj według pierwszej liczby

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (dział 14) są definicja klasyczna i wszystkie powyższe własności prawdopodobieństwa, w tym $P(A') = 1 - P(A)$ i wzór na $P(A \cup B)$. Metody tabeli i wypisywania w broszurze nie ma: to ona decyduje o punktach.

Dalej: statystyka (lekcja 12.2 Statystyka: średnie, mediana, dominanta) albo, na poziomie rozszerzonym, prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite (lekcja 12.3 Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i wzór Bayesa).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $|\Omega| = 8$; $A = \{OOR, ORO, ROO\}$; $P(A) = \frac{3}{8}$.
2. Iloczyn nieparzysty tylko wtedy, gdy oba wyniki nieparzyste: $3 \cdot 3 = 9$ par. $|A| = 36 - 9 = 27$,
 $P(A) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
3. $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$. Suma parzysta: obie nieparzyste ($3 \cdot 2 = 6$) albo obie parzyste ($2 \cdot 1 = 2$). $P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Zadania • część 2

1. $|\Omega| = 20$. Iloczyn nieparzysty: $x \in \{1, 3\}$ i $y \in \{1, 3, 5\}$, 6 kratek; parzysty: 14. $P = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

Zadania • część 3

1. Bez szóstki: $5^3 = 125$ z 216. $P = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.
2. Przez 4: 12; przez 6: 8; przez 4 i 6, czyli przez 12 (nie przez 24!): 4. $\frac{12+8-4}{50} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$.
3. $0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$.

Zadania • część 4

1. $|A| = 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, $P = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$.
2. $\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$. Prościej: każda z pięciu osób ma tę samą szansę na pierwsze miejsce.
3. $|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$; dwie białe $\binom{3}{2} = 3$, dwie czarne $\binom{4}{2} = 6$. $P = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$. Liczenie par uporządkowanych daje $\frac{18}{42}$, czyli to samo.

Zestawy A

1. a) 8

Zestawy B

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

Zestawy C

1. a) 0,7 b) $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

Zestawy D

1. a) $\frac{1}{3}$

Zadania w stylu maturalnym

1. A. $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$: $\frac{3}{36}$.
2. A. $6 + 4 - 1 = 9$ (liczba 15 jest podzielna przez obie).
3. D. $P(A) = 3(1 - P(A))$, $4P(A) = 3$.

4. 1. **Ω .** pary uporządkowane, $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.
2. **Z szóstką.** pierwsza albo druga liczba to 6: $7 + 7 - 1 = 13$ par.
3. **Bez szóstki.** potrzebny czynnik 2 i czynnik 3: $(2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)$, czyli 4 pary.
4. **Wynik.** $|A| = 17$, $P(A) = \frac{17}{49}$.
1 pkt za $|\Omega| = 49$ albo za wypisanie wszystkich 17 par sprzyjających. 2 pkt za wynik $\frac{17}{49}$.
5. 1. **Ω .** liczby $10, \dots, 99$: $|\Omega| = 90$.
2. **A.** 14, 23, 32, 41, 50: $|A| = 5$.
3. **Wynik.** $P(A) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.
1 pkt za $|\Omega| = 90$ albo wypisanie pięciu liczb sprzyjających. 2 pkt za wynik.

Matura z matematyki · Lekcja 12.1: Prawdopodobieństwo klasyczne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt12_1.py).