

Reguła mnożenia i reguła dodawania

W każdym arkuszu podstawowym z lat 2024–2026 jest jedno zamknięte zadanie z kombinatoryki: ile jest liczb o zadanych cyfrach, ile jest kolorowań albo zestawów. Łatwość tych zadań to 70–80%, ale punkt traci się zawsze w tych samych miejscach: zero na początku liczby, warunek „dokładnie jedna” i zadania, w których liczba możliwości na jednej pozycji zależy od wyboru na innej. Cała lekcja to dwie reguły i jedna zasada kolejności.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

13 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
XI.1, XI.2

W TEJ LEKCJI

- 0 Liczenie bez wypisywania
- 1 Reguła mnożenia
- 2 Najpierw pozycja z ograniczeniem
- 3 Reguła dodawania i dopełnienie
- 4 Ustawienia, wybory, kolorowania
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Liczenie bez wypisywania

Liczb trzycyfrowych jest 900, kodów PIN 10 000. Wypisanie ich zajęłoby godziny, a policzenie zajmuje sekundę, bo każdą taką liczbę budujemy w kilku krokach (najpierw pierwsza cyfra, potem druga, potem trzecia) i w każdym kroku wiemy, ile mamy możliwości. To jest reguła mnożenia. Druga reguła, dodawania, mówi, co zrobić, gdy obiekty dzielą się na grupy, które liczymy osobno. Cała sztuka polega na tym, żeby wybrać kolejność kroków i podział na grupy tak, by liczby możliwości w każdym kroku były pewne.

Reguła mnożenia

REGUŁA MNOŻENIA

Jeśli obiekt budujemy w k krokach i w pierwszym kroku mamy n_1 możliwości, w drugim n_2 możliwości (**niezależnie od tego, co wybraliśmy w pierwszym**), ..., w k -tym n_k możliwości, to wszystkich obiektów jest

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Wyróżnione zastrzeżenie jest najważniejsze: liczba możliwości w danym kroku może zależeć od wcześniejszych wyborów co do *tęgo, co wybieramy*, ale nie co do *ile* jest możliwości.

Przykład 1.1

Zestaw obiadowy

W stołówce są 3 zupy, 4 drugie dania i 2 desery. Ile różnych zestawów zupa, drugie danie, deser można zamówić?

- 1 Krok 1: zupa, 3 możliwości. Krok 2: drugie danie, 4 możliwości. Krok 3: deser, 2 możliwości.
- 2 $3 \cdot 4 \cdot 2$.

Wynik: 24 zestawy.

Przykład 1.2

Liczby trzycyfrowe

Ile jest liczb trzycyfrowych? Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?

- 1 Cyfra setek: 1–9, czyli 9 możliwości (zero na początku dałoby liczbę dwucyfrową). Dziesiątki i jednostki: po 10. Razem $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.
- 2 Różne cyfry: setki 9; dziesiątki to każda cyfra oprócz użytej, w tym zero: 9; jednostki: 8. Razem $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Wynik: 900 i 648.

W drugim rachunku na pozycji dziesiątek *która* cyfra jest dostępna, zależy od cyfry setek, ale *ile* ich jest, już nie: zawsze 9. Dlatego wolno mnożyć.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 3 min

- 1 Ile jest czterocyfrowych kodów PIN (cyfry 0–9 mogą się powtarzać, kod może zaczynać się od zera)?

- 2 Ile jest liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są nieparzyste?

- 3 Na ile sposobów można ustawić 4 osoby w kolejce?


 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Najpierw pozycja z ograniczeniem

KOLEJNOŚĆ KROKÓW

- Kroki nie muszą iść od lewej do prawej. **Zaczynaj od pozycji z ograniczeniem:** cyfry jednostki, gdy liczba ma być parzysta, nieparzysta albo podzielna przez 5; potem cyfra na początku liczby (bez zera); na końcu pozycje bez warunków.
- Jeśli mimo to liczba możliwości w którymś kroku zależy od wcześniejszego wyboru, **rozbij na przypadki** i dodaj wyniki (reguła dodawania, część 3). Typowy przypadek: różne cyfry i zero wśród dozwolonych cyfr jednostki.

Przykład 2.1

Nieparzyste o różnych cyfrach

Ile jest liczb trzycyfrowych nieparzystych o różnych cyfrach?

- 1 Jedności (ograniczenie): 1, 3, 5, 7, 9, czyli 5 możliwości.
- 2 Setki: bez zera i bez cyfry jedności, czyli 8 możliwości (cyfra jedności nie jest zerem, więc zawsze odpada dokładnie jedna z 1–9).
- 3 Dziesiątki: 10 cyfr bez dwóch użytych, czyli 8.

Wynik: $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$.

Przykład 2.2

Parzyste o różnych cyfrach: tu trzeba rozbić

Ile jest liczb trzycyfrowych parzystych o różnych cyfrach?

- 1 Jedności: 0, 2, 4, 6, 8. Ale liczba możliwości dla setek zależy od tego, czy na końcu jest zero: zero nie zabiera setkom nic, inna cyfra parzysta zabiera jedną.
- 2 Przypadek I, na końcu 0: setki 9, dziesiątki 8, czyli $9 \cdot 8 = 72$.
- 3 Przypadek II, na końcu 2, 4, 6 albo 8: jedności 4, setki 8, dziesiątki 8, czyli $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$.
- 4 Przypadki są rozłączne: $72 + 256$.

Wynik: 328. Rachunek „jedności 5, setki 8, dziesiątki 8” daje 320 i jest błędny.

SYMULACJA 1

Wybierz długość liczby, warunek na cyfrę jedności i to, czy cyfry mogą się powtarzać. Każda kratka to jedna pozycja; liczba w kratce to liczba możliwości, a mały numer nad kratką to kolejność, w jakiej ją wypełniamy. Gdy cyfry są różne, a wśród dozwolonych cyfr jedności jest zero, rachunek rozpada się na dwa przypadki. Wynik jest porównany z przeglądem wszystkich liczb.

przypadek I, cyfra jedności: 0

$$\begin{array}{c} 2. \\ \boxed{9} \\ \text{setki} \end{array} \cdot \begin{array}{c} 3. \\ \boxed{8} \\ \text{dziesiątki} \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1. \\ \boxed{1} \\ \text{jedności} \end{array} = 72$$

przypadek II, cyfra jedności: 2, 4, 6, 8

$$\begin{array}{c} 2. \\ \boxed{8} \\ \text{setki} \end{array} \cdot \begin{array}{c} 3. \\ \boxed{8} \\ \text{dziesiątki} \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1. \\ \boxed{4} \\ \text{jedności} \end{array} = 256$$

— pozycja z warunkiem — pozostałe pozycje

przypadki 2

rachunek $72 + 256 = 328$

wynik 328

przegląd wszystkich liczb 328

Cyfry mają być różne, a na końcu może stać zero. Zero nie zabiera możliwości pierwszej cyfrze, każda inna dozwolona cyfra zabiera jedną. Liczba możliwości zależy więc od wyboru i potrzebne są dwa rozłączne przypadki. Jeden iloczyn dałby 320 zamiast 328.

Stan na rysunku: liczby trzycyfrowe, parzyste, cyfry różne; wynik 328.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 6 min

1 Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych o różnych cyfrach?

2 Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 o różnych cyfrach?

3 Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których cyfra setek jest równa cyfrze jedności?

□□□ podstawowe ■□□ średnie ■■■ trudniejsze

REGUŁA DODAWANIA

Jeśli zbiór obiektów dzieli się na **rozłączne** grupy (żaden obiekt nie należy do dwóch), to liczba wszystkich obiektów jest sumą liczebności grup.

- „**Dokładnie jedna ...**”: przypadki według tego, *gdzie* jest ta jedna (na której pozycji, który element), a na pozostałych miejscach wykluczamy tę cyfrę albo cechę.
- „**Co najmniej jedna ...**”: często najszybciej przez dopełnienie: wszystkie obiekty minus te, w których nie ma ani jednej.

Przykład 3.1

Dokładnie jedna siódemka

Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 7 występuje dokładnie raz?

- 1 7 na miejscu setek: dziesiątki i jedności bez siódemki, $9 \cdot 9 = 81$.
- 2 7 na miejscu dziesiątek: setki bez zera i bez siódemki, 8; jedności 9: 72.
- 3 7 na miejscu jedności: tak samo, $8 \cdot 9 = 72$.
- 4 $81 + 72 + 72$.

Wynik: 225.

Przykład 3.2

Co najmniej jedna siódemka

Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występuje co najmniej jedna cyfra 7?

- 1 Wszystkich trzycyfrowych: 900.
- 2 Bez siódemki: setki 8, dziesiątki 9, jedności 9, czyli 648.
- 3 $900 - 648$.

Wynik: 252. To o 27 więcej niż w przykładzie 3.1: tyle jest liczb z dwiema albo trzema siódmkami.

- 1 Ile jest liczb dwucyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest parzysta?
- 2 W stołówce są 4 zupy (w tym 1 wegetariańska) i 5 drugich dań (w tym 2 wegetariańskie).
Uczeń wybiera jedną zupę i jedno drugie danie tak, by dokładnie jedna z tych potraw była wegetariańska. Ile ma możliwości?
- 3 Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedno zero?

□□□ podstawowe ■□□ średnie ■■■ trudniejsze

4 Ustawienia, wybory, kolorowania

TRZY WZORCE REGUŁY MNOŻENIA

- Ustawienie n różnych obiektów w rzędzie: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (czytaj „ n silnia”).
- Kolejny wybór k różnych z n , gdy kolejność ma znaczenie (miejsca na podium, funkcje w samorządzie): $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.
- Kolorowanie z warunkiem „sąsiednie różne”: pierwszy obszar dowolnym kolorem, każdy kolejny dowolnym oprócz koloru poprzednika.

Gdy kolejność *nie* ma znaczenia (para drużyn grająca mecz, uścisk dłoni), każdą parę policzyliśmy dwa razy, więc dzielimy wynik przez 2.

Przykład 4.1

Podium

W finale biegu startuje 8 zawodników. Na ile sposobów mogą zostać rozdzielone medale złoty, srebrny i brązowy?

- 1 Złoto 8, srebro 7, brąz 6.

Wynik: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Przykład 4.2

Pasek z pięciu pól

Pięć pól ułożonych w rzędzie malujemy, mając do dyspozycji 4 kolory. Sąsiednie pola muszą mieć różne kolory. Ile jest kolorowań?

- 1 Pierwsze pole 4, każde następne 3 (bez koloru poprzedniego).

Wynik: $4 \cdot 3^4 = 324$.

Przykład 4.3

Kiedy dzielić przez

2

W turnieju 6 drużyn każda gra z każdą dokładnie raz. Ile meczów zostanie rozegranych?

- 1 Uporządkowanych par (gospodarz, gość): $6 \cdot 5 = 30$.
- 2 Mecz $A-B$ to ten sam mecz co $B-A$, więc każdy policzyliśmy dwa razy: $30 : 2$.

Wynik: 15 meczów. Gdyby grano mecz i rewanż, byłoby ich 30.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 6 min

- 1 Na ile sposobów można posadzić 5 osób w rzędzie, jeśli dwie z nich (Ania i Bartek) mają siedzieć obok siebie?

- 2 Flaga składa się z trzech poziomych pasów. Mamy 5 kolorów, a sąsiednie pasy mają różne kolory. Ile jest flag?

- 3 W klasie jest 25 osób. Na ile sposobów można wybrać przewodniczącego i jego zastępcę?

- 4 Na spotkaniu jest 10 osób i każda wita się uściskiem dłoni z każdą inną. Ile jest uścisków?


 podstawowe  średnie  trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 25 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · REGUŁA MNOŻENIA

ZESTAWY A

1 Ile jest możliwości?



a) strój: 4 bluzki i 3
spódnice

b) liczby trzycyfrowe o
różnych cyfrach

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · CYFRY Z OGRANICZENIAMI

ZESTAWY B

1 Ile jest liczb?



a) trzycyfrowych
nieparzystych

b) czterocyfrowych, które
czytane od końca dają tę
samą liczbę

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · PRZYPADKI I DOPEŁNIENIE

ZESTAWY C

1 Ile jest liczb?



a) dwucyfrowych z co
najmniej jedną cyfrą 3

b) czterocyfrowych z co
najmniej jedną cyfrą
parzystą

... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM D · USTAWIENIA, WYBORY, KOLOROWANIA

ZESTAWY D

1 Na ile sposobów?

■ ■ ■

a) ustawić 6 różnych
książek na półce

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe
■ ■ ■ średnie
■ ■ ■ trudniejsze

Pełny trening (25 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 kombinatoryka to zawsze jedno zadanie zamknięte za 1 punkt: liczby o cyfrach z danego zbioru, liczby z warunkiem „dokładnie jedno zero”, kolorowanie obszarów. Informator ma też zadania otwarte za 2–3 punkty, w których klucz daje punkt za podział na przypadki, punkt za poprawne zliczenie każdego z nich i punkt za sumę. Łatwość majowych zadań wynosiła 71% (2025) i 79% (2026). Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

1 (0–1 pkt) Liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5, których wszystkie cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (cyfry mogą się powtarzać), jest

■ ■ ■

A. 25

B. 125

C. 500

D. 625

2 (0–1 pkt) Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (cyfry mogą się powtarzać), jest

■ ■ ■

A. $7 \cdot 8 \cdot 4$

B. $8 \cdot 8 \cdot 4$

C. $7 \cdot 7 \cdot 4$

D. $8 \cdot 8 \cdot 3$

3 (0–1 pkt) Liczb dwucyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności, jest

■ ■ ■

A. 36

B. 45

C. 81

D. 90

- 4 (0–1 pkt) Liczb pięciocyfrowych, w których cyfry parzyste i nieparzyste występują na przemian, przy czym pierwsza cyfra jest parzysta, jest

A. 5^5 B. $4 \cdot 5^4$ C. 5^4 D. $2 \cdot 5^5$

- 5 (0–3 pkt) Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych parzystych, w których zapisie cyfra 5 występuje dokładnie raz.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „Pierwsza cyfra: 10 możliwości.”

Liczba nie zaczyna się od zera: 9 możliwości (albo mniej, gdy dochodzą inne warunki). Wyjątek: kody i numery, które nie są liczbami.

× „Parzyste o różnych cyfrach: $5 \cdot 8 \cdot 8$.”

Zero na końcu nie zabiera możliwości pierwszej cyfrze, inna cyfra parzysta zabiera. Liczba możliwości zależy od wyboru, więc potrzebne są dwa przypadki (przykład 2.2).

× „Dokładnie jedna siódemka: 3 pozycje razy reszta dowolna.”

Jeśli na pozostałych pozycjach dopuścisz siódmkę, policzysz też liczby z dwiema siódmkami, i to wielokrotnie. Na pozostałych pozycjach trzeba ją wykluczyć.

× „Mecze: $6 \cdot 5$.”

Gdy kolejność w parze nie ma znaczenia, dzielimy przez 2. Pytaj zawsze: czy zamiana miejscami daje inny obiekt?

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile jest liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach?

$$9 \cdot 9 = 81.$$

- 2 Dlaczego liczbę trzycyfrowych nieparzystych o różnych cyfrach liczy się jednym iloczynem, a parzystych nie?

Cyfra nieparzysta na końcu zawsze zabiera jedną możliwość cyfrze setek; cyfra parzysta zabiera ją tylko wtedy, gdy nie jest zerem.

- 3 Jak najszybciej policzyć liczby z co najmniej jedną cyfrą parzystą?

Dopełnieniem: wszystkie minus te, w których wszystkie cyfry są nieparzyste.

- 4 Ile jest uścisków dłoni w grupie 10 osób?

$$10 \cdot 9 : 2 = 45.$$

DWIE REGUŁY

mnożenia: kroki, $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

dodawania: rozłączne przypadki, suma

dopełnienie: wszystkie – „żadnej”

WZORCE

ustawienie n obiektów: $n!$

k kolejnych wyborów z n : $n(n-1) \dots (n-k+1)$

para bez kolejności: $\frac{n(n-1)}{2}$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” dział kombinatoryki zawiera liczbę permutacji $n!$, kombinacji $\binom{n}{k}$ oraz wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń. Reguł mnożenia i dodawania tam nie ma: trzeba je znać i umieć opisać słowami, jakie kroki i jakie przypadki się liczy. Na poziomie podstawowym te dwie reguły wystarczają do wszystkich zadań.

Dalej: prawdopodobieństwo klasyczne (lekcja 12.1 Prawdopodobieństwo klasyczne), gdzie licznik i mianownik liczy się dokładnie tak jak tutaj, albo permutacje, kombinacje i symbol Newtona (lekcja 11.2 Permutacje, wariacje, kombinacje i symbol Newtona, poziom rozszerzony).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $10^4 = 10\,000$. Tu zero na początku jest dozwolone, bo kod nie jest liczbą.
2. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (zero nie jest nieparzyste, więc problem pierwszej cyfry znika).
3. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Zadania · część 2

1. Jedności 5, tysiące 8, setki 8, dziesiątki 7: $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$.
2. 1. Na końcu 0: $9 \cdot 8 = 72$.
2. Na końcu 5: setki 8 (bez zera i piątki), dziesiątki 8: 64.
3. Razem 136.
3. Jedności 5, setki: 1 (taka sama), tysiące 9, dziesiątki 10: $5 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10 = 450$.

Zadania · część 3

1. Obie nieparzyste: $5 \cdot 5 = 25$. $90 - 25 = 65$.
2. 1. Zupa wegetariańska, danie nie: $1 \cdot 3 = 3$.
2. Zupa nie, danie wegetariańskie: $3 \cdot 2 = 6$.
3. Razem 9.
3. Zero na jednym z 3 miejsc (setki, dziesiątki, jedności; nie na początku), pozostałe trzy cyfry od 1 do 9: $3 \cdot 9^3 = 2187$.

Zadania · część 4

1. Skleić Anię i Bartka w jeden blok: 4 obiekty, $4! = 24$ ustawienia; w bloku 2 kolejności. $2 \cdot 24 = 48$.
2. $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ (górny i dolny pas mogą mieć ten sam kolor).
3. $25 \cdot 24 = 600$ (funkcje są różne, kolejność ma znaczenie).
4. $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Zestawy A

1. a) 12 b) $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

Zestawy B

1. a) $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ b) $9 \cdot 10 = 90$

Zestawy C

1. a) $90 - 72 = 18$ b) $9000 - 5^4 = 8375$

Zestawy D

1. a) 720

Zadania w stylu maturalnym

1. **B.** Na końcu tylko 5 (zera nie ma w zbiorze), pozostałe trzy cyfry dowolne: 5^3 .
2. **A.** Setki 7 (bez zera), dziesiątki 8, jedności 0, 2, 4, 6.
3. **B.** Reguła dodawania po cyfrze dziesiątek d : jedności $0, \dots, d - 1$, czyli d możliwości. $1 + 2 + \dots + 9 = 45$.
4. **B.** Pierwsza cyfra parzysta i niezerowa: 2, 4, 6, 8; dalej nieparzysta, parzysta (z zerem), nieparzysta, parzysta, po 5.
5. **1. Przypadki.** według pozycji piątki: setki, dziesiątki albo jedności.
 2. **Piątka w setkach.** dziesiątki bez piątki 9, jedności parzyste 5: 45.
 3. **Piątka w dziesiątkach.** setki bez zera i piątki 8, jedności 5: 40.
 4. **Piątka w jednościach.** liczba byłaby nieparzysta: 0.
 5. **Suma.** $45 + 40 + 0 = 85$.

1 pkt za podział na rozłączne przypadki według pozycji piątki. **2 pkt** za poprawne zliczenie obu niepustych przypadków. **3 pkt** za wynik 85.

Matura z matematyki · Lekcja 11.1: Reguła mnożenia i reguła dodawania · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026; broszura „Wybrane wzory matematyczne”. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt11_1.py).