

Przekroje brył i twierdzenie o trzech prostopadłych

Na poziomie rozszerzonym stereometria to zadania za 3–5 punktów, w których najpierw trzeba zobaczyć figurę: przekrój ostrosłupa albo sześcianu płaszczyzną, ścianę, która okazuje się trójkątem prostokątnym, odległość punktu od płaszczyzny. W maju 2025 zadanie z ostrosłupem bez rysunku rozwiązało 16% zdających: większość nie zauważyła, że dwie ściany są prostokątne, co wynika z twierdzenia o trzech prostopadłych. W maju 2026 zadanie z kątem między ścianami ostrosłupa: 30%.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

4 zadania w
treści, próbka
treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
X.R1, X.R2

W TEJ LEKCJI

- 0 Płaska figura w bryle
- 1 Przekroje
- 2 Twierdzenie o trzech prostopadłych
- 3 Odległość punktu od płaszczyzny
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Płaska figura w bryle

Przekrój bryły płaszczyzną to wielokąt, którego wierzchołki leżą na krawędziach bryły. Po jego narysowaniu zadanie staje się planimetryczne: trzeba policzyć boki, wysokość i pole tego wielokąta. Twierdzenie o trzech prostokątnych pozwala rozpoznać kąty proste w ścianach, które na rysunku wcale nie wyglądają na proste. A odległość punktu od płaszczyzny najłatwiej policzyć nie geometrycznie, tylko z dwóch wzorów na objętość tego samego czworościanu.

Przekroje

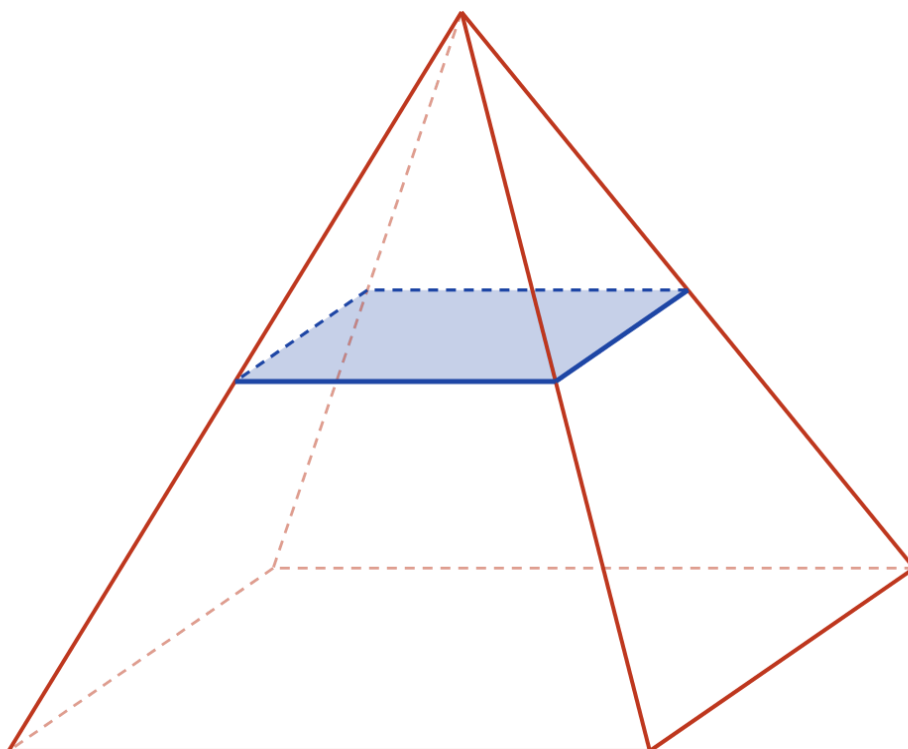
🔪 TYPOWE PRZEKROJE

- Sześcian o krawędzi a : płaszczyzna przez przekątne podstaw AC i EG daje prostokąt $a \times a\sqrt{2}$; płaszczyzna BDE daje trójkąt równoboczny o boku $a\sqrt{2}$.
- Ostrosłup prawidłowy: płaszczyzna przez wierzchołek S i przekątną podstawy daje trójkąt o podstawie d i wysokości H .
- Płaszczyzna równoległa do podstawy ostrosłupa albo stożka wycina figurę podobną do podstawy w skali $k = \frac{h}{H}$ (gdzie h to odległość od wierzchołka): pole $k^2 P_p$.

Kąt nachylenia przekroju do podstawy mierzy się tak jak kąt ściany: w trójkącie prostokątnym prostokątnym do krawędzi wspólnej.

SYMULACJA 1

Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięty płaszczyzną równoległą do podstawy. Przesuwaj płaszczyznę w górę i w dół: przekrój jest kwadratem podobnym do podstawy, a jego pole maleje jak kwadrat odległości od wierzchołka.



— ostrosłup — przekrój

skala k 0,50

bok przekroju $k \cdot a$ 3,000

pole przekroju 9,000

pole podstawy 36

stosunek pól k^2 0,2500

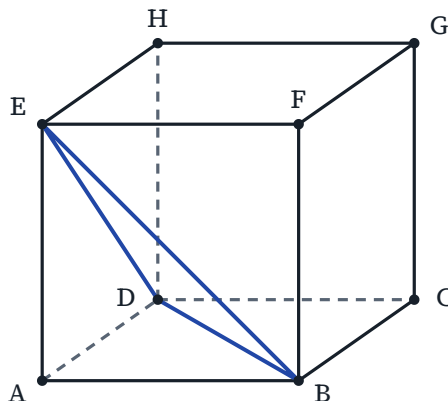
Przekrój w odległości $0,50 \cdot H$ od wierzchołka jest kwadratem podobnym do podstawy w skali $k = 0,50$. Pole: $k^2 = 0,2500$ pola podstawy. Skalę liczy się od wierzchołka, nie od podstawy.

Stan na rysunku: $a = 6$, $H = 6$, $k = 0,50$, pole przekroju 9,000.

Przykład 1.1

Trójkąt w sześciacie

Sześciąt $ABCDEFGH$ ma krawędź 4. Oblicz pole przekroju płaszczyzną BDE i tangens kąta między tą płaszczyzną a podstawą $ABCD$.



- 1 $|BD| = |DE| = |EB| = 4\sqrt{2}$ (przekątne ścian): trójkąt równoboczny, $P = \frac{32\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.
- 2 Krawędź wspólna płaszczyzn to BD . Środek O odcinka BD : $EO \perp BD$ i $AO \perp BD$, więc szukany kąt to $\angle EOA$.
- 3 $\operatorname{tg} \angle EOA = \frac{|AE|}{|AO|} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$.

Wynik: $P = 8\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} = \sqrt{2}$.

Przykład 1.2

Przekroje ostrosłupa

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 6 i wysokość 4. Oblicz pole przekroju płaszczyzną przez wierzchołek i przekątną podstawy oraz pole przekroju płaszczyzną równoległą do podstawy w połowie wysokości.

- 1 Trójkąt ASC : podstawa $6\sqrt{2}$, wysokość 4: $P = 12\sqrt{2}$.
- 2 W połowie wysokości $k = \frac{1}{2}$: kwadrat o boku 3, pole 9.

Wynik: $12\sqrt{2}$ i 9.

- 1 Sześcian ma krawędź 6. Oblicz pole przekroju płaszczyzną zawierającą przekątne AC i EG .
- 2 Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 8 i wysokość 6. Oblicz pole przekroju płaszczyzną przez wierzchołek i przekątną podstawy.
- 3 Stożek ma promień podstawy 6. Płaszczyzna równoległa do podstawy przecina wysokość w odległości $\frac{1}{3}H$ od wierzchołka. Oblicz pole przekroju.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

2 Twierdzenie o trzech prostopadłych

TWIERDZENIE (W BROSZURZE CKE)

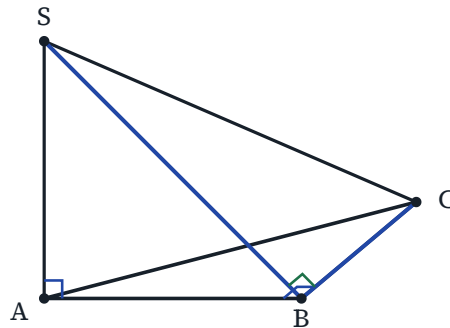
Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P , l jest jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę, a prosta m leży w płaszczyźnie i przechodzi przez P . Wtedy $m \perp k \iff m \perp l$.

Typowe użycie: krawędź SA jest prostopadła do podstawy, a $AB \perp BC$. Rzutem SB na podstawę jest AB , więc $SB \perp BC$, czyli ściana SBC jest trójkątem prostokątnym z kątem prostym przy B .

Przykład 2.1

Ściana prostokątna

W ostrosłupie $ABCS$ krawędź SA jest prostopadła do podstawy, $|SA| = 4$, $|AB| = 3$, $|BC| = 5$ i $\angle ABC = 90^\circ$. Oblicz pole ściany SBC .



- 1 $SA \perp$ podstawy, rzut SB to AB , a $BC \perp AB$; z twierdzenia o trzech prostopadłych $BC \perp SB$.
- 2 $|SB| = \sqrt{16 + 9} = 5$; $P_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5$.

Wynik: $\frac{25}{2}$.

3 Odległość punktu od płaszczyzny

METODA OBJĘTOŚCI

Odległość d punktu P od płaszczyzny ABC to wysokość czworościanu $ABCP$ opuszczona z P . Gdy objętość V tego czworościanu łatwo policzyć inaczej (z innej podstawy), to $d = \frac{3V}{P_{ABC}}$.

Przykład 3.1

Wierzchołek sześcianu i płaszczyzna

Sześcián ma krawędź a . Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny BDG .

- 1 Czworóścian $BCDG$ z podstawą BCD (połowa ściany) i wysokością CG : $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$.
- 2 Trójkąt BDG jest równoboczny o boku $a\sqrt{2}$: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- 3 $d = \frac{3V}{P} = \frac{a^3/2}{a^2\sqrt{3}/2}$.

Wynik: $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (jedna trzecia przekątnej sześcianu).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 4 min

- 1 Sześcián ma krawędź 2. Oblicz odległość wierzchołka A od płaszczyzny BDE .



□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 11 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · POLA PRZEKROJÓW

ZESTAWY A

- 1 Oblicz pole przekroju.



a) sześcián $a = 3$,

płaszczyzna $ACGE$

b) stożek $r = 4$, $H = 3$,

przekrój osiowy

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

POZIOM B · KĄTY

ZESTAWY B

1 Oblicz.



a) sześcián: tangens kąta
między płaszczyzną BDE a
podstawą

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

POZIOM C · PROSTOPADŁOŚĆ I ODLEGŁOŚĆ

ZESTAWY C

1 Odpowiedz.



a) $SA \perp$ podstawy ABC ,
 $AB \perp BC$: który kąt ściany
 SBC jest prosty?

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Pełny trening (11 przykładów i zadań) →

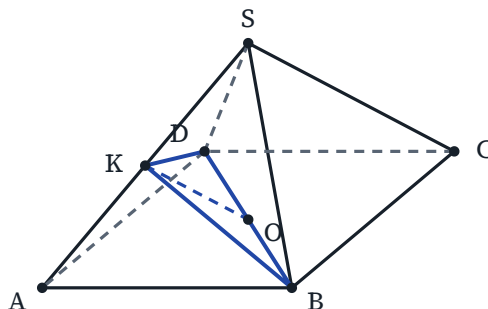
5 Na maturze

W puli CKE z lat 2024–2026 to zadania otwarte za 3–5 punktów, prawie zawsze z ostrosłupem prawidłowym albo sześciánem. Punkty przyznaje się za kolejne długości wyznaczone w zależności od jednej zmiennej, za wskazanie właściwego kąta albo odcinka (który odcinek jest wysokością przekroju), i za wynik. W informatorze odległość od płaszczyzny liczy się metodą objętości. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 13 pkt · ok. 40 min

- 1 (0–4 pkt) Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD S$ mają długość 6. Punkt K jest środkiem krawędzi SA . Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BDK .



- 2 (0–4 pkt) Sześcian $ABCDEFGH$ ma krawędź 6. Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny BDG .

- 3 (0–5 pkt) Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC z kątem prostym przy wierzchołku B , $|AB| = 6$, $|BC| = 8$. Krawędź SA jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i $|SA| = 8$. Wykaż, że ściana SBC jest trójkątem prostokątnym, i oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

□□ podstawowe ▤▤ średnie ▨▨▨ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

- × „Ściana SBC wygląda na zwykły trójkąt, więc liczę jej pole wzorem Herona.”

Sprawdź najpierw, czy nie działa twierdzenie o trzech prostopadłych. W maju 2025 to była różnica między 0 a 5 punktami.

- × „Kąt nachylenia przekroju do podstawy to kąt przy wierzchołku podstawy.”

Kąt dwuścienny mierzy się prostymi prostopadłymi do krawędzi wspólnej, np. w środku przekątnej, a nie wzdłuż krawędzi bocznej.

- × „Płaszczyzna w połowie wysokości wycina połowę pola podstawy.”

Skala $\frac{1}{2}$ daje pole $\frac{1}{4}$ podstawy.

- × „Odległość punktu od płaszczyzny to odległość od najbliższego wierzchołka.”

To długość odcinka prostopadłego do płaszczyzny. Najprościej liczy się ją metodą objętości.

7

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaki kształt ma przekrój sześcianu płaszczyzną ACG ?

Prostokąt $ACGE$.

- 2 Ile wynosi pole przekroju stożka w połowie wysokości, gdy pole podstawy to 36π ?

9π .

- 3 Kiedy z $m \perp l$ wynika $m \perp k$?

Gdy l jest rzutem k na płaszczyznę, a m leży w tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt przebicia.

- 4 Jaki wzór daje odległość d z objętości?

$$d = \frac{3V}{P}.$$

PRZEKROJE

sześcian: $ACGE$ ($a \times a\sqrt{2}$), BDE
(równoboczny, $a\sqrt{2}$)

równoległy do podstawy: pole $k^2 P_p$

NARZĘDZIA

trzy prostopadłe: $m \perp k \iff m \perp l$

odległość od płaszczyzny: $d = \frac{3V}{P}$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” jest twierdzenie o trzech prostych prostopadłych i wszystkie wzory na objętości. Metody objętości dla odległości ani gotowych przekrojów sześcianu tam nie ma.

Dalej: kombinatoryka, reguła mnożenia i dodawania (lekcja 11.1 Reguła mnożenia i reguła dodawania).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Prostokąt $6 \times 6\sqrt{2}$: $36\sqrt{2}$.
2. $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 6 = 24\sqrt{2}$.
3. Koło o promieniu 2: 4π .

Zadania · część 3

1. $V_{ABDE} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$, $P_{BDE} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$, $d = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Zestawy A

1. a) $9\sqrt{2}$ b) 12

Zestawy B

1. a) $\sqrt{2}$

Zestawy C

1. a) $\angle SBC$

Zadania w stylu maturalnym

1. **Przekrój.** trójkąt BDK , $|BD| = 6\sqrt{2}$.
2. **Ramiona.** ściany boczne są trójkątami równobocznymi o boku 6, więc BK i DK to ich wysokości:
 $|BK| = |DK| = 3\sqrt{3}$.
3. **Wysokość przekroju.** O środek BD : $|KO| = \sqrt{27 - 18} = 3$.
4. **Pole.** $\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3 = 9\sqrt{2}$.
1 pkt za $|BD|$. 2 pkt za $|BK| = 3\sqrt{3}$. 3 pkt za $|KO| = 3$. 4 pkt za pole $9\sqrt{2}$.
2. 1. **Objętość.** $V_{BCDG} = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$.
2. **Pole.** BDG równoboczny o boku $6\sqrt{2}$: $P = \frac{72\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$.
3. **Odległość.** $d = \frac{3 \cdot 36}{18\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.
1 pkt za objętość czworoboku. 2 pkt za pole BDG . 3 pkt za zależność $d = \frac{3V}{P}$. 4 pkt za $2\sqrt{3}$.
3. 1. **Kąt prosty.** $SA \perp$ podstawy, rzutem SB na podstawę jest AB , a $BC \perp AB$; z twierdzenia o trzech prostopadłych $BC \perp SB$.
2. **Długości.** $|SB| = \sqrt{64 + 36} = 10$, $|AC| = \sqrt{36 + 64} = 10$.
3. **Ściany.** $P_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, $P_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40$, $P_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40$.
4. **Wynik.** $P_b = 104$.
1 pkt za uzasadnienie, że SBC jest prostokątny. 2 pkt za $|SB|$ i $|AC|$. 3 pkt za pola dwóch ścian. 4 pkt za trzecią ścianę. 5 pkt za 104. Przyjęcie kąta prostego przy B w ścianie SBC bez uzasadnienia: co najwyżej 2 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 10.3: Przekroje brył i twierdzenie o trzech prostopadłych · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone na współrzędnych (tools/verify/mt10_3.py), rysunki z tools/rysunki/r10_3.py.