

Objętości i pola powierzchni brył, bryły podobne

To najliczniejsza grupa zadań stereometrycznych w puli CKE z lat 2024–2026: zamknięte (przekątna sześcianu z objętości, stosunek objętości stożka i walca), prawda/fałsz o bryłach podobnych i otwarte za 2–5 punktów. Wszystkie wzory są w broszurze. Trudność polega na czymś innym: trzeba opisać całą bryłę jedną zmienną i ułożyć jedno równanie, a przy bryłach podobnych pamiętać, że pola rosną jak k^2 , objętości jak k^3 .

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: X.5,
X.6

W TEJ LEKCJI

- 0 Pole podstawy razy wysokość
- 1 Graniastopy
- 2 Ostrostopy
- 3 Walec, stożek, kula
- 4 Jedna zmienna i bryły podobne
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Pole podstawy razy wysokość

Objętość graniastoslupa i walca to pole podstawy razy wysokość. Ostrosłup i stożek o tej samej podstawie i wysokości mają objętość trzy razy mniejszą. Pole powierzchni całkowitej to suma pól wszystkich ścian: dwóch podstaw i powierzchni bocznej w graniastoslupie, jednej podstawy i ścian bocznych w ostrosłupie. Kula ma własne wzory. Prawie każde zadanie sprowadza się do wyznaczenia brakującej długości (często z twierdzenia Pitagorasa albo z kąta, lekcja 10.1 Proste, płaszczyzny i kąty w przestrzeni) i podstawienia do jednego z tych wzorów.

Graniastoslupy

WZORY (W BROSZURZE CKE)

- $V = P_p \cdot H$, $P_c = 2P_p + P_b$;
- prostopadloscian $a \times b \times c$: $V = abc$, $P_c = 2(ab + bc + ca)$, przekatna $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;
- sześcian: $V = a^3$, $P_c = 6a^2$, przekatna $a\sqrt{3}$.

Graniastoslup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a ściany boczne są prostokątami.

Przykład 1.1

Z objętości do przekątnej

Objętość sześcianu jest równa 343. Oblicz długość przekątnej i pole powierzchni całkowitej.

- 1 $a^3 = 343$, $a = 7$.
- 2 $d = 7\sqrt{3}$, $P_c = 6 \cdot 49$.

Wynik: $d = 7\sqrt{3}$, $P_c = 294$.

Przykład 1.2

Graniastosłup prawidłowy trójkątny

Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy 4 i wysokość 6. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej.

- 1 $P_p = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}; V = 4\sqrt{3} \cdot 6.$
- 2 $P_b = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72, P_c = 2 \cdot 4\sqrt{3} + 72.$

Wynik: $V = 24\sqrt{3}, P_c = 72 + 8\sqrt{3}.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Prostopadłościan ma wymiary $2 \times 3 \times 6$. Oblicz przekątną, pole powierzchni całkowitej i objętość.

- 2 Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma krawędź podstawy 2 i wysokość 5. Oblicz objętość.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Ostrosłupy

WZORY (W BROSZURZE CKE)

$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, P_c = P_p + P_b.$ W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi; ich wysokość h_s to wysokość ściany bocznej (trójkąt SOM z lekcji 10.1 Proste, płaszczyzny i kąty w przestrzeni): $h_s^2 = H^2 + r^2.$

Przykład 2.1

Ostrosłup prawidłowy czworokątny

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 6 i wysokość 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość.

- 1 $h_s = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$
- 2 $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 60, P_c = 36 + 60.$
- 3 $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4.$

Wynik: $P_c = 96, V = 48.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 2 min

- 1 Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy 6 i wysokość $\sqrt{3}$. Oblicz objętość.



▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

3 Walec, stożek, kula

WZORY (W BROSZURZE CKE)

- walec: $V = \pi r^2 H, P_b = 2\pi r H, P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r H;$
- stożek: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H, P_b = \pi r l, P_c = \pi r^2 + \pi r l,$ gdzie $l^2 = r^2 + H^2;$
- kula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3, P = 4\pi r^2.$

Przykład 3.1

Stożek

Stożek ma promień podstawy 3 i wysokość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej, całkowitej i objętość.

- 1 $l = 5; P_b = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi, P_c = 9\pi + 15\pi.$
- 2 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4.$

Wynik: $P_b = 15\pi, P_c = 24\pi, V = 12\pi.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 4 min

- 1 Walec ma promień 3 i wysokość 5. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej.

- 2 Stożek o promieniu 3 ma objętość 12π . Oblicz wysokość.

- 3 Kula ma objętość 36π . Oblicz jej promień i pole powierzchni.

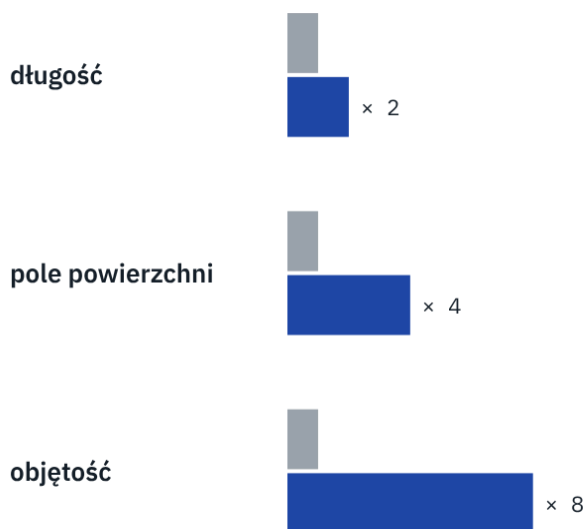

 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Jedna zmienna i bryły podobne

DWIE STRATEGIE

- **Jedna zmienna.** Gdy wymiary są dane przez zależności („krawędzie w stosunku 1 : 2 : 3”, „wysokość dwa razy dłuższa od promienia”), oznacz najkrótszy wymiar literą, wyraż przez nią pozostałe i ułóż jedno równanie z danej wielkości (pola albo objętości).
- **Bryły podobne w skali k :** długości $\times k$, pola (także pole całkowite) $\times k^2$, objętości $\times k^3$.

SYMULACJA 1 Wybierz bryłę i skalę k . Słupki porównują długość krawędzi (albo promienia), pole powierzchni i objętość bryły podobnej z bryłą wyjściową: rosną odpowiednio k , k^2 i k^3 razy.



— bryła wyjściowa — bryła podobna

krawędź 2,00 → 4,00

pole powierzchni 24,00 → 96,00

objętość 8,00 → 64,00

k, k^2, k^3 2; 4; 8

Każdy wymiar mnożymy przez $k = 2$. Pole jest iloczynem dwóch długości, więc rośnie $k^2 = 4$ razy; objętość jest iloczynem trzech, więc rośnie $k^3 = 8$ razy.

Stan na rysunku: skala $k = 2,00$; pole $\times 4,000$, objętość $\times 8,000$.

Przykład 4.1

Krawędzie w stosunku

1 : 2 : 3

Krawędzie prostopadłościanu mają długości w stosunku 1 : 2 : 3, a pole powierzchni całkowitej jest równe 88. Oblicz objętość.

- 1 Krawędzie $a, 2a, 3a$: $P_c = 2(2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 22a^2$.
- 2 $22a^2 = 88$, $a = 2$; krawędzie 2, 4, 6.

Wynik: $V = 48$.

- 1 Dwa stożki są podobne, a stosunek ich wysokości jest równy 3 : 1. Mniejszy ma objętość 2π . Oblicz objętość większego.

- 2 Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 48. Oblicz jego objętość.

podstawowe średnie trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 15 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · GRANIASTOSŁUPY

ZESTAWY A

- 1 Oblicz.
a) sześcian $a = 5$: V , P_c , przekątna
... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM B · OSTROSŁUPY I BRYŁY OBROTOWE

ZESTAWY B

- 1 Oblicz.
a) ostrosłup prawidłowy czworokątny $a = 10$, $H = 12$: h_s , P_b , V b) kula $r = 6$: V i P
... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

ZESTAWY C

1 Oblicz.



- a) bryła podobna w skali 3: b) walec o $H = 2r$ i
ile razy większe pole i objętości 16π : r
objętość

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▯▯▯ podstawowe ▯▯▯ średnie ▯▯▯ trudniejsze

Pełny trening (15 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 ta lekcja ma najwięcej zadań w stereometrii: zamknięte z jednym wzorem, prawda/fałsz o bryłach podobnych i otwarte za 3–5 punktów, w których wymiary są dane zależnościami. W kluczach do zadań otwartych punkty dostaje się za wyrażenie wymiarów przez jedną zmienną, za równanie, za wartość zmiennej i za wynik. Pominięcie czynnika 2 we wzorze na pole całkowite ograniczało wynik do 2 punktów; zgadnięte wymiary ze sprawdzeniem dawały 1 punkt. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 10 pkt · ok. 25 min

1 (0–1 pkt) Objętość sześcianu jest równa 216. Przekątna tego sześcianu ma długość



- A. 6 B. $6\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{3}$ D. 18

2 (0–1 pkt) Walec i stożek mają równe promienie podstaw i równe wysokości. Stosunek objętości walca do objętości stożka jest równy



- A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. 2 D. 3

3 (0–1 pkt) Dana jest kula o promieniu 3. Oceń prawdziwość zdań.



1. Objętość kuli jest równa 36π . P F
2. Kula o promieniu 6 ma objętość dwa razy większą. P F

- 4 (0–4 pkt) Krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długości w stosunku 1 : 2, a wysokość jest trzy razy dłuższa od krótszej krawędzi podstawy. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Oblicz jego objętość.

- 5 (0–3 pkt) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 6. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

- × „Objętość ostrosłupa to $P_p \cdot H$.”

W ostrosłupie i stożku jest $\frac{1}{3}$. Kontrola: trzy przystające ostrosłupy składają się w sześcian.

- × „ P_c graniastostupa to $P_p + P_b$.”

Graniastosłup ma dwie podstawy: $2P_p + P_b$. Za ten błąd klucz z 2025 roku dawał co najwyżej 2 punkty.

- × „Skala 2, więc objętość dwa razy większa.”

Objętość $2^3 = 8$ razy, pole $2^2 = 4$ razy.

- × „Pole boczne stożka to $\pi r H$.”

$\pi r l$, gdzie l to tworząca, a nie wysokość.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Pole powierzchni sześcianu jest równe 54. Ile wynosi objętość?

$a = 3, V = 27$.

- 2 Dwie kule mają objętości w stosunku $8 : 1$. W jakim stosunku są ich promienie?

$2 : 1$.

- 3 Walec ma $H = 2r$ i objętość 16π . Ile wynosi r ?

$$2\pi r^3 = 16\pi, r = 2.$$

- 4 Ile razy wzrośnie pole kuli, gdy promień wzrośnie trzy razy?

9 razy.

WIEŁOŚCIANYgraniastosłup: $V = P_p H$, $P_c = 2P_p + P_b$ ostrosłup: $V = \frac{1}{3}P_p H$, $P_c = P_p + P_b$ prostopadłościan: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ **BRYŁY OBROTOWE**walec $\pi r^2 H$; stożek $\frac{1}{3}\pi r^2 H$, $P_b = \pi r l$ kula $\frac{4}{3}\pi r^3$, $4\pi r^2$ podobne: k , k^2 , k^3

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na objętości i pola powierzchni wszystkich brył z tej lekcji i twierdzenie o polach figur podobnych. Zależności objętości od sześcianu skali w części o bryłach nie ma; wynika ona z tego, że objętość ma trzy wymiary długości.

Dalej: przekroje brył (lekcja 10.3 Przekroje brył i twierdzenie o trzech prostopadłych, poziom rozszerzony) albo kombinatoryka (lekcja 11.1 Reguła mnożenia i reguła dodawania).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $d = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, $P_c = 2(6 + 18 + 12) = 72$, $V = 36$.

2. $P_p = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$, $V = 30\sqrt{3}$.

Zadania · część 2

1. $P_p = 9\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$.

Zadania · część 3

1. $V = 45\pi$, $P_c = 18\pi + 30\pi = 48\pi$.

2. $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot H = 12\pi$, $H = 4$.

3. $\frac{4}{3}r^3 = 36$, $r^3 = 27$, $r = 3$; $P = 36\pi$.

Zadania · część 4

1. $k = 3$, $V = 27 \cdot 2\pi = 54\pi$.

2. $12a = 48$, $a = 4$, $V = 64$.

Zestawy A

1. a) 125, 150, $5\sqrt{3}$

Zestawy B

1. a) 13, 260, 400 b) 288π i 144π

Zestawy C

1. a) 9 i 27 b) 2

Zadania w stylu maturalnym

1. C. $a = 6$, $d = a\sqrt{3}$.

2. D. $\pi r^2 H : \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

3. PF. $\frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$; skala 2 daje objętość $2^3 = 8$ razy większą.

4. 1. Zmienna. krawędzie a , $2a$, wysokość $3a$.

2. Równanie. $P_c = 2(a \cdot 2a + 2a \cdot 3a + a \cdot 3a) = 2 \cdot 11a^2 = 22a^2 = 198$.

3. Wartość. $a^2 = 9$, $a = 3$; krawędzie 3, 6, 9.

4. Objętość. $V = 3 \cdot 6 \cdot 9 = 162$.

1 pkt za wyrażenie wymiarów przez a . 2 pkt za równanie $22a^2 = 198$. 3 pkt za $a = 3$. 4 pkt za $V = 162$.

5. 1. Wymiary. $l = 6$, $r = 3$, $H = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

2. Objętość. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$.

3. Pole. $P_c = 9\pi + \pi \cdot 3 \cdot 6 = 27\pi$.

1 pkt za r , l i H . 2 pkt za objętość. 3 pkt za pole.

Matura z matematyki · Lekcja 10.2: Objętości i pola powierzchni brył, bryły podobne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt10_2.py).