

Proste, płaszczyzny i kąty w przestrzeni

W stereometrii prawie każde zadanie z arkusza podstawowego 2024–2026 zaczyna się od kąta: krawędź boczna nachylona do podstawy, ściana boczna nachylona do podstawy, kąt rozwarcia stożka. Kąt służy do policzenia wysokości, a wysokość do objętości. W maju 2025 takie zadanie ze stożkiem rozwiązało 49% zdających, w maju 2026 z ostrosłupem 43%. Najczęstszy błąd to zły trójkąt prostokątny. Ta lekcja uczy, jak go znaleźć.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: X.1,
X.2, X.3, X.4

W TEJ LEKCJI

- 0 Kąt w przestrzeni to kąt w trójkącie
- 1 Położenie prostych i płaszczyzn
- 2 Kąty w ostrosłupie
- 3 Kąty w bryłach obrotowych
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Kąt w przestrzeni to kąt w trójkącie

Kąta między prostą a płaszczyzną nie mierzy się bezpośrednio. Rzutuje się prostą na płaszczyznę i mierzy kąt między prostą a jej rzutem. Wtedy powstaje trójkąt prostokątny: odcinek, jego rzut i odcinek prostopadły do płaszczyzny (zwykle wysokość bryły). Tak samo kąt między dwiema płaszczyznami: bierze się dwie proste prostopadłe do ich krawędzi wspólnej, po jednej w każdej płaszczyźnie. W ostrosłupie i stożku są tylko dwa takie trójkąty, które trzeba znać na pamięć.

Położenie prostych i płaszczyzn

DEFINICJE

- Dwie proste w przestrzeni są **równoległe** (leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych albo się pokrywają), **przecinają się** albo są **skośne** (nie leżą w żadnej wspólnej płaszczyźnie).
- **Kąt prostej z płaszczyzną**: kąt między prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę (od 0° do 90°).
- **Kąt dwuścienny** (między płaszczyznami przecinającymi się wzdłuż prostej k): kąt między prostymi prostopadłymi do k , poprowadzonymi w obu płaszczyznach z jednego punktu k .

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 W sześcianie $ABCDEFGH$ (podstawa $ABCD$, krawędzie boczne AE, BF, CG, DH) określ położenie prostych: AB i CG , AB i GH , AB i BF .

- 2 Oblicz tangens kąta między przekątną sześcianu a płaszczyzną jego podstawy.

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ trudniejsze

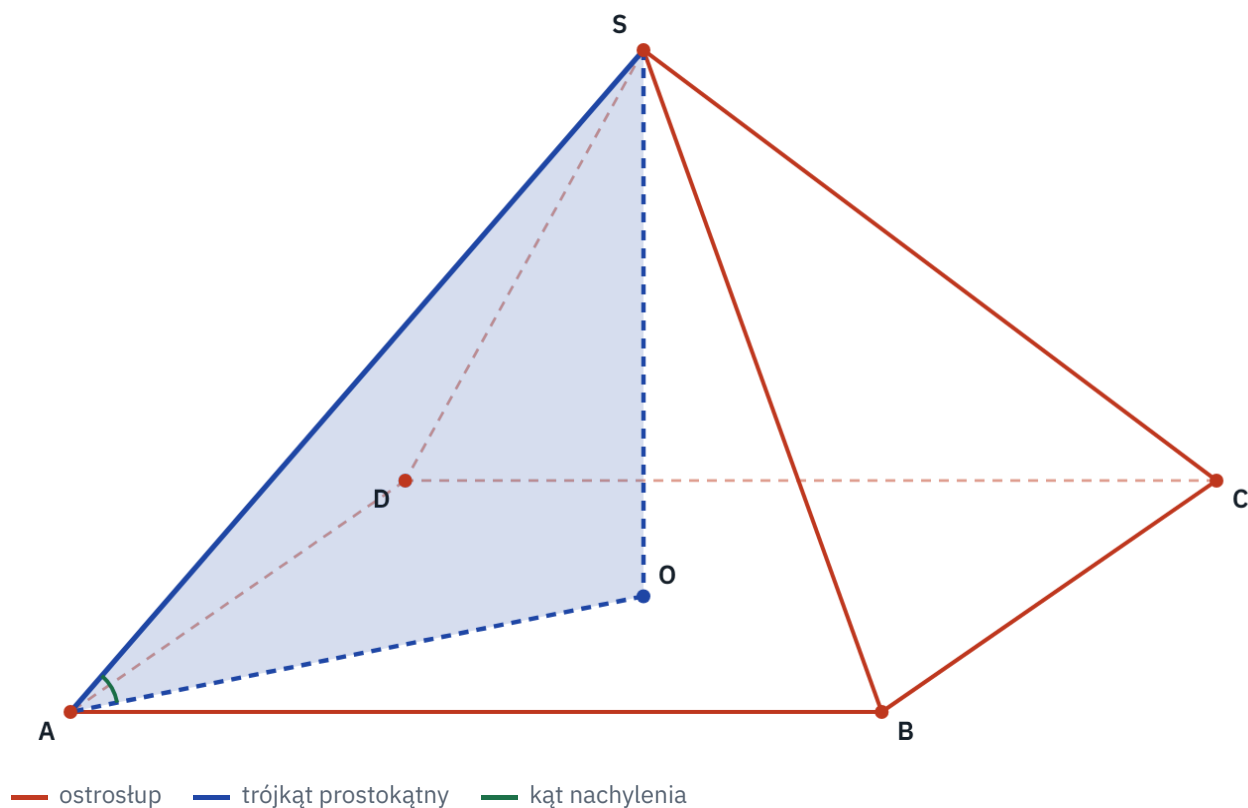
✎ DWA TRÓJKĄTY PROSTOKĄTNE W OSTROSŁUPIE PRAWIDŁOWYM

- **Krawędź boczna z podstawą** (kąt α): trójkąt SOA z przyprostokątnymi H i $|OA| = R$ (promień okręgu opisanego na podstawie; w kwadracie połowa przekątnej $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, w trójkącie równobocznym $\frac{a\sqrt{3}}{3}$).
- **Ściana boczna z podstawą** (kąt β): trójkąt SOM , gdzie M to środek krawędzi podstawy; przyprostokątne H i $|OM| = r$ (promień okręgu wpisanego; w kwadracie $\frac{a}{2}$, w trójkącie równobocznym $\frac{a\sqrt{3}}{6}$), przeciwprostokątna to wysokość ściany bocznej.

Wtedy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{r}$. Kąt ściany jest zawsze większy od kąta krawędzi, bo $r < R$.

SYMULACJA 1

Ostrosłup prawidłowy czworokątny. Zmieniaj krawędź podstawy a i wysokość H , a przełącznikiem wybierz trójkąt: dla krawędzi bocznej (SOA) albo dla ściany bocznej (SOM). Odczyt pokazuje oba kąty, krawędź boczną, wysokość ściany i objętość.



— ostrosłup — trójkąt prostokątny — kąt nachylenia

$$|OA| = a\sqrt{2}/2 \quad 4,243$$

$$|OM| = a/2 \quad 3,000$$

$$\text{kąt krawędzi } \alpha \quad 43,3^\circ \quad (\text{tg } \alpha = 0,943)$$

$$\text{kąt ściany } \beta \quad 53,1^\circ \quad (\text{tg } \beta = 1,333)$$

$$\text{krawędź boczna, wysokość ściany } 5,831; \quad 5,000$$

$$\text{objętość } V = \frac{1}{3}a^2H \quad 48,00$$

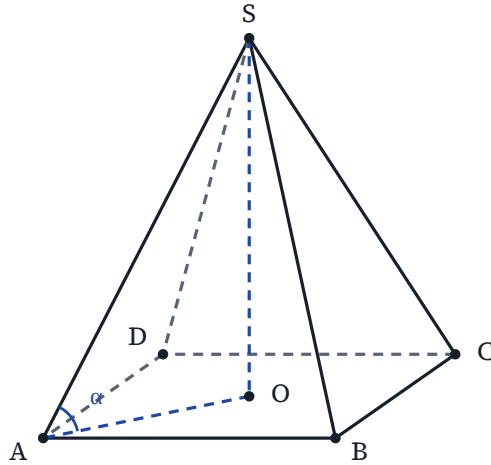
Kąt krawędzi bocznej z podstawą leży w trójkącie SOA: wysokość H i połowa przekątnej podstawy.

Stan na rysunku: $a = 6$, $H = 4,0$, $\alpha \approx 43,3^\circ$, $\beta \approx 53,1^\circ$, $V \approx 48,00$.

Przykład 2.1

Krawędź boczna

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 6, a krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz wysokość, długość krawędzi bocznej i objętość.



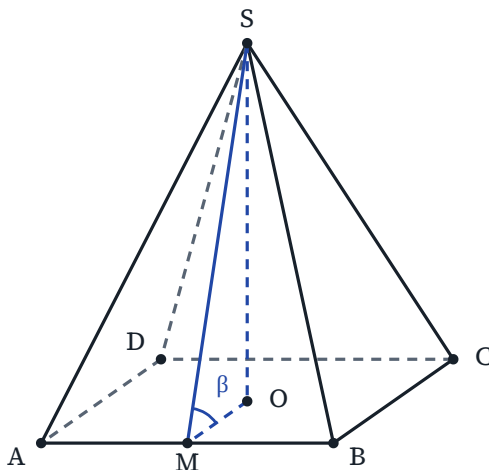
- 1 $|OA| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$
- 2 $H = |OA| \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{6}; |SA| = \frac{|OA|}{\cos 60^\circ} = 6\sqrt{2}.$
- 3 $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{6}.$

Wynik: $H = 3\sqrt{6}, |SA| = 6\sqrt{2}, V = 36\sqrt{6}.$

Przykład 2.2

Ściana boczna

Dla ostrosłupa z przykładu 2.1 oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.



- 1 $|OM| = \frac{a}{2} = 3$.
- 2 $\operatorname{tg} \beta = \frac{3\sqrt{6}}{3}$.

Wynik: $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{6}$ (większy od $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, zgodnie z regułą).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

- 1  Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy 6 i wysokość 2. Oblicz kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy.
- 2  Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 8, a ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

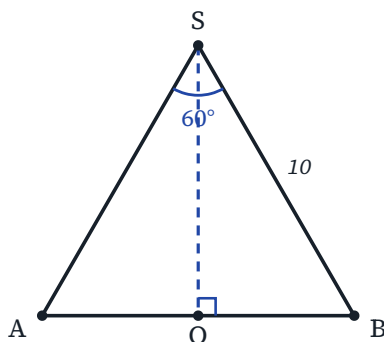
PRZEKRÓJ OSIOWY

- **Stożek:** przekrój osiowy to trójkąt równoramienny o ramionach l (tworzące) i podstawie $2r$. Kąt rozwarcia to kąt przy wierzchołku tego trójkąta, 2γ ; w trójkącie prostokątnym z wysokością: $\sin \gamma = \frac{r}{l}$, $\cos \gamma = \frac{H}{l}$.
- **Walec:** przekrój osiowy to prostokąt $2r \times H$; jego przekątna tworzy z podstawą kąt o tangensie $\frac{H}{2r}$.

Przykład 3.1

Kąt rozwarcia

Tworząca stożka ma długość 10, a kąt rozwarcia stożka ma 60° . Oblicz r , H i objętość.



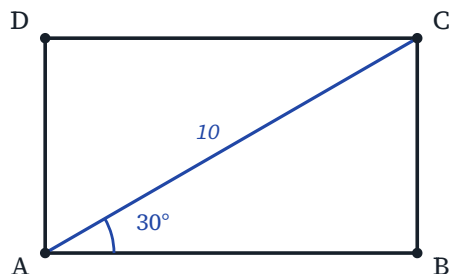
- 1 Połowa kąta rozwarcia: 30° . $r = 10 \sin 30^\circ = 5$, $H = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$.
- 2 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3}$.

Wynik: $r = 5$, $H = 5\sqrt{3}$, $V = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$.

Przykład 3.2

Przekątna przekroju walca

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 i tworzy z podstawą kąt 30° . Oblicz objętość walca.



- 1 $H = 10 \sin 30^\circ = 5$, $2r = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$, więc $r = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
- 2 $V = \pi r^2 H = \pi \cdot \frac{75}{4} \cdot 5$.

Wynik: $V = \frac{375}{4}\pi$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Stożek ma wysokość 6 i kąt rozwarcia 90° . Oblicz promień podstawy i tworzącą.
- 2 Przekątna prostopadłościanu o wymiarach $3 \times 4 \times 12$ tworzy z płaszczyzną podstawy 3×4 kąt φ . Oblicz długość przekątnej i $\sin \varphi$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 16 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · DŁUGOŚCI W BRYŁACH

ZESTAWY A

1 Oblicz.



- a) ostrosłup prawidłowy czworokątny, $a = 4$, $H = 2\sqrt{2}$: krawędź boczna i kąt jej nachylenia
- b) stożek $r = 3$, $H = 4$: tworząca i sinus kąta tworzącej z podstawą

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · KĄTY

ZESTAWY B

1 Oblicz.



- a) sześcián: kąt między przekątną ściany a krawędzią tej ściany
- b) stożek: kąt rozwarcia 120° , tworząca 8; r i H

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · POŁOŻENIE PROSTYCH W SZEŚCIANIE $ABCDEFGH$

ZESTAWY C

1 Podstawa $ABCD$, krawędzie boczne AE , BF , CG , DH . Określ położenie prostych.



- a) AE i CG

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (16 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 to zadania zamknięte (wysokość z tangensa kąta) i otwarte za 2–4 punkty: objętość ostrosłupa z kąta nachylenia krawędzi albo ściany, objętość stożka z kąta

rozwarcia, objętość i pole walca z przekątnej przekroju. W zadaniach za 2 punkty 1 punkt daje wysokość (albo pole podstawy), 2 punkty objętość. Uwagi z kluczy: obliczenia dla innej bryły dają 0 punktów; w zadaniu ze stożkiem przyjęcie, że przekrój osiowy jest równoboczny, też dawało 0 punktów. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 11 pkt · ok. 30 min

- 1 (0–1 pkt) Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 6. Tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 2. Wysokość ostrosłupa jest równa
- A. 2 B. 3 C. 6 D. 12
- 2 (0–2 pkt) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość ostrosłupa.
- 3 (0–3 pkt) Tworząca stożka ma długość 12, a kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° . Oblicz objętość stożka.
- 4 (0–4 pkt) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 12 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.
- 5 (0–1 pkt) Dany jest sześcián $ABCDEFGH$. Oceń prawdziwość zdań.
1. Proste AB i CG są skośne. P F
2. Tangens kąta między przekątną AG a płaszczyzną podstawy $ABCD$ jest równy $\sqrt{2}$. P F

 podstawowe  średnie  trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

× „Kąt nachylenia ściany bocznej mierzę przy krawędzi bocznej.”

Kąt ściany z podstawą leży w trójkącie SOM (M to środek krawędzi podstawy), a nie w SOA . Przyprostokątna przy podstawie to $\frac{a}{2}$, a nie połowa przekątnej.

- × „Kąt rozwarcia stożka to kąt między tworzącą a wysokością.”

To jego połowa. Kąt rozwarcia jest między dwiema tworzącymi w przekroju osiowym.

- × „Prostych, które się nie przecinają, nie ma: są równoległe.”

W przestrzeni są jeszcze proste skośne, które ani się nie przecinają, ani nie są równoległe (np. AB i CG w sześcianie).

- × „W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $|OM| = \frac{a}{2}$.”

W trójkącie równobocznym $|OM| = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ i $|OA| = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (lekcja 8.2 Trójkąty: rodzaje i punkty szczególne).

7

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Który kąt jest większy w ostrosłupie prawidłowym: krawędzi bocznej czy ściany bocznej z podstawą?

Ściany: ma tę samą wysokość H , a krótszą przyprostokątną przy podstawie ($r < R$).

- 2 Stożek ma kąt rozwarcia 120° i tworzącą 8. Ile wynosi wysokość?

$$8 \cos 60^\circ = 4.$$

- 3 Jak położone są przekątne BD i FH podstaw sześcianu?

Równoległe.

- 4 Czemu jest równa wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o $a = 6$ i $H = 4$?

$$\sqrt{16 + 9} = 5.$$

OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY

krawędź: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R}$; ściana: $\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{r}$

kwadrat: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$

trójkąt: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

BRYŁY OBROTOWE

stożek: półkął rozwarcia γ , $r = l \sin \gamma$,
 $H = l \cos \gamma$

walec: przekrój $2r \times H$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na objętości i pola brył oraz twierdzenie o trzech prostych prostopadłych. Definicji kąta prostej z płaszczyzną i kąta dwuściennego trzeba używać samodzielnie; promienie R i r trójkąta równobocznego są w części o trójkątach.

Dalej: objętości i pola brył, bryły podobne (lekcja 10.2 Objętości i pola powierzchni brył, bryły podobne).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. AB i CG : skośne. AB i GH : równoległe ($AB \parallel DC \parallel HG$). AB i BF : przecinają się w B (pod kątem prostym).
2. Rzut przekątnej AG na podstawę to przekątna podstawy $AC = a\sqrt{2}$, a $|CG| = a$: $\operatorname{tg} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadania • część 2

1. $R = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$: $\alpha = 30^\circ$.
2. $H = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 45^\circ = 4$, $V = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 4 = \frac{256}{3}$.

Zadania • część 3

1. Połowa kąta 45° : $r = H = 6$, $l = 6\sqrt{2}$.
2. $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$, $\sin \varphi = \frac{12}{13}$.

Zestawy A

1. a) 4 i 45° b) 5 i $\frac{4}{5}$

Zestawy B

1. a) 45° b) $4\sqrt{3}$ i 4

Zestawy C

1. a) równoległe

Zadania w stylu maturalnym

1. C. $H = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta = 3 \cdot 2$.
2. 1. Wysokość. $|OA| = 5$, $H = 5 \operatorname{tg} 45^\circ = 5$.
2. Objętość. pole podstawy $\frac{10^2}{2} = 50$, $V = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 5 = \frac{250}{3}$.
1 pkt za $H = 5$ albo pole podstawy 50. 2 pkt za $V = \frac{250}{3}$.
3. 1. Promień. $r = 12 \sin 30^\circ = 6$.
2. Wysokość. $H = 12 \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$.
3. Objętość. $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \pi$.
1 pkt za r albo H . 2 pkt za obie wielkości. 3 pkt za objętość.
4. 1. Wymiary. $H = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$, $2r = 12 \cos 60^\circ = 6$, $r = 3$.
2. Objętość. $V = \pi \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \pi$.
3. Pole. $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 18\pi + 36\sqrt{3} \pi$.
1 pkt za H albo r . 2 pkt za obie. 3 pkt za objętość. 4 pkt za pole.
5. PF. $\operatorname{tg} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

