

# Podzielność i pierwsze dowody

W każdym arkuszu podstawowym jest zadanie „Wykaż, że... jest podzielna przez...” za 2–3 punkty, i co roku rozwiązuje je mniej niż połowa zdających. Nie dlatego, że jest trudne, tylko dlatego, że trzeba znać szablon dowodu i wiedzieć, kiedy dowód się kończy. Tej lekcji wystarczą wzory skróconego mnożenia i wyłączanie przed nawias.

## CZAS

ok. 35 min  
czytania + ok. 1 h  
zadań

## ZADANIA

8 zadań w treści,  
próbka treningu  
rachunkowego, 5  
zadań w stylu  
maturalnym;  
pełny trening na  
osobnej stronie

## WYMAGANIA

podstawa  
programowa,  
zakres  
podstawowy: I.2  
(dowody  
podzielności i  
reszt); klasyczne  
dowody  
niewymierności i  
nieskończoności  
zbioru liczb  
pierwszych

## W TEJ LEKCJI

- 0 Przykład to nie dowód
- 1 Zapis ogólny liczb
- 2 Szablon dowodu podzielności
- 3 Trzy klasyczne dowody
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

## Przykład to nie dowód

Wyrażenie  $n^2 + n + 41$  daje liczbę pierwszą dla  $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ . Czterdzieści sprawdzeń z rzędu – a mimo to dla  $n = 40$  wychodzi  $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ , czyli liczba złożona. Dlatego w zadaniu „wykaż” sprawdzenie na przykładach daje **0 punktów**: przykład pokazuje, że coś działa w jednym przypadku, a dowód musi działać dla każdej liczby z treści.

Na szczęście matura nie wymaga pomysłowości. Prawie wszystkie zadania o podzielności rozwiązuje jeden szablon: zapisz liczby w postaci ogólnej, przekształć wyrażenie do postaci „dzielnik razy liczba całkowita” i napisz wniosek.

## Zapis ogólny liczb

### 🔑 PODZIELNOŚĆ I RESZTY

Liczba całkowita  $a$  jest podzielna przez  $d \neq 0$ , gdy  $a = d \cdot k$  dla pewnej liczby całkowitej  $k$ .

Liczba parzysta:  $2k$ ; nieparzysta:  $2k + 1$ . Liczba dająca resztę  $r$  z dzielenia przez  $d$ :  $dk + r$ , gdzie  $0 \leq r < d$ .

Z dwóch kolejnych liczb całkowitych  $n, n + 1$  jedna jest parzysta, więc  $n(n + 1)$  jest parzyste. Z trzech kolejnych jedna dzieli się przez 3, więc  $n(n + 1)(n + 2)$  dzieli się przez 6.

Gdy w zadaniu są dwie różne liczby, użyj **dwóch różnych liter**:  $a = 5k + 1$ ,  $b = 5l + 4$ .

### 🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Zapisz w postaci ogólnej: liczbę dającą resztę 3 z dzielenia przez 7 oraz sumę dwóch kolejnych liczb nieparzystych.
- 2 Rozłóż na czynniki:  $n^2 + n$ ,  $n^3 - n$ ,  $7n^2 + 14n$ .
- 3 Liczba  $a$  daje resztę 2, a liczba  $b$  resztę 3 z dzielenia przez 5. Jaką resztę z dzielenia przez 5 daje  $a + b$ , a jaką  $ab$ ?

▢▢▢ podstawowe   ▢▢▢ średnie   ▢▢▢ trudniejsze

## SZABLON

1. **Zapis:** liczby z treści w postaci ogólnej (parzysta, nieparzysta, reszta...).
2. **Przekształcenie:** doprowadź wyrażenie do postaci  $d \cdot W$ , gdzie  $d$  to dzielnik z treści.
3. **Uzasadnienie:** napisz, że  $W$  jest liczbą całkowitą (bo  $k, l$  są całkowite), a gdy trzeba, dlaczego jest parzyste.
4. **Wniosek:** „zatem liczba ... jest podzielna przez  $d$ ”, co kończy dowód.

W zasadach oceniania punkt za całość jest dopiero wtedy, gdy jest postać  $d \cdot W$  razem z uzasadnieniem, że  $W$  jest całkowite.

## Przykład 2.1

## Suma potęg

Wykaż, że liczba  $3^{20} + 3^{21} + 3^{22}$  jest podzielna przez 13.

- 1 Wyłącz najmniejszą potęgę:  $3^{20} + 3^{21} + 3^{22} = 3^{20}(1 + 3 + 9) = 13 \cdot 3^{20}$ .
- 2  $3^{20}$  jest liczbą całkowitą.

**Wniosek:** liczba jest postaci  $13 \cdot k$  z całkowitym  $k = 3^{20}$ , więc jest podzielna przez 13.

## Przykład 2.2

## Iloczyn z liczbą parzystą

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczba  $5n^2 + 15n$  jest podzielna przez 10.

- 1  $5n^2 + 15n = 5n(n + 3)$ .
- 2 Liczby  $n$  i  $n + 3$  różnią się o liczbę nieparzystą, więc mają różną parzystość: jedna z nich jest parzysta. Zatem  $n(n + 3) = 2m$  dla pewnego całkowitego  $m$ .
- 3  $5n(n + 3) = 5 \cdot 2m = 10m$ .

**Wniosek:** liczba  $5n^2 + 15n$  jest podzielna przez 10.

Przykład 2.3

## Liczba nieparzysta

Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej  $n$  liczba  $n^2 + 4n + 7$  jest podzielna przez 4.

- 1  $n = 2k + 1$ ,  $k$  całkowite.
- 2  $(2k + 1)^2 + 4(2k + 1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 + 7 = 4k^2 + 12k + 12$ .
- 3  $= 4(k^2 + 3k + 3)$ , a  $k^2 + 3k + 3$  jest całkowite.

**Wniosek:** liczba jest podzielna przez 4.

Przykład 2.4

## Reszty z dzielenia (zadanie za 3 punkty)

Liczba całkowita  $a$  daje resztę 2, a liczba całkowita  $b$  resztę 5 z dzielenia przez 7. Wykaż, że  $a^2 - b^2$  jest podzielna przez 7.

- 1  $a = 7k + 2$ ,  $b = 7l + 5$  ( $k, l$  całkowite, różne litery!).
- 2  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , a  $a + b = 7k + 7l + 7 = 7(k + l + 1)$ .
- 3  $a^2 - b^2 = 7(a - b)(k + l + 1)$ , gdzie  $(a - b)(k + l + 1)$  jest całkowite.

**Wniosek:**  $a^2 - b^2$  jest podzielna przez 7.

**Punktacja w takim zadaniu:** 1 pkt za zapis  $a$  albo  $b$ , 2 pkt za oba zapisy i rozwinięcie, 3 pkt za pełny dowód. Ta sama litera w obu zapisach ( $a = 7k + 2$ ,  $b = 7k + 5$ ) to założenie, że  $b - a = 3$ , i za całe zadanie daje tylko 1 punkt.

### ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 15 min

- 1 Wykaż, że liczba  $5^{12} + 5^{13}$  jest podzielna przez 30.  

- 2 Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczba  $n^3 - n$  jest podzielna przez 6.  

- 3 Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.  


### 3 Trzy klasyczne dowody

Te dowody nie są szablonowe, ale warto je znać, bo pokazują metodę „nie wprost”: zakładamy, że teza jest fałszywa, i dochodzimy do sprzeczności.

#### Przykład 3.1

**Liczba**

$$\sqrt{2}$$

**jest niewymierna**

Wykaż, że  $\sqrt{2}$  nie jest liczbą wymierną.

- 1 Załóżmy, że  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q$  są całkowite,  $q \neq 0$ , a ułamka nie da się skrócić.
- 2 Wtedy  $p^2 = 2q^2$ , więc  $p^2$  jest parzyste, a zatem  $p$  jest parzyste:  $p = 2m$ .
- 3  $4m^2 = 2q^2$ , czyli  $q^2 = 2m^2$ : także  $q$  jest parzyste.

**Sprzeczność:**  $p$  i  $q$  są parzyste, więc ułamek  $\frac{p}{q}$  dało się skrócić przez 2. Zatem  $\sqrt{2}$  nie jest wymierna.

#### Przykład 3.2

**Liczba**

$$\log_2 5$$

**jest niewymierna**

Wykaż, że  $\log_2 5$  nie jest liczbą wymierną.

- 1  $\log_2 5 > 0$ . Załóżmy, że  $\log_2 5 = \frac{p}{q}$  z dodatnimi całkowitymi  $p, q$ .
- 2 Wtedy  $2^{\frac{p}{q}} = 5$ , czyli  $2^p = 5^q$ .

**Sprzeczność:**  $2^p$  jest parzyste, a  $5^q$  nieparzyste. Zatem  $\log_2 5$  jest niewymierny.

### Przykład 3.3

## Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Wykaż, że nie istnieje największa liczba pierwsza.

- 1 Załóżmy, że wszystkie liczby pierwsze to  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .
- 2 Liczba  $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$  przy dzieleniu przez każdą z nich daje resztę 1.
- 3 Ale każda liczba większa od 1 ma dzielnik pierwszy, więc  $N$  ma dzielnik pierwszy spoza listy.

**Sprzeczność:** lista nie zawierała wszystkich liczb pierwszych.

### ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 10 min

- 1 Wykaż, że  $\log_3 2$  jest liczbą niewymierną.

■ ■ ■

- 2 Wykaż, że  $\sqrt{3}$  jest liczbą niewymierną.

■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe   ■ ■ ■ średnie   ■ ■ ■ trudniejsze

## 4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 32 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WYŁĄCZANIE I ROZKŁAD

### ZESTAWY A

- 1 Zapisz jako iloczyn liczby całkowitej i potęgi (wyłącz najmniejszą potęgę).

■ ■ ■

a)  $2^{10} + 2^{11}$

b)  $4^6 + 2^{11}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Rozłóż na czynniki.



a)  $6n^2 - 6n$

b)  $n^3 - n$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣ trudniejsze

## POZIOM B · ZAPIS OGÓLNY I RESZTY

### ZESTAWY B

1 Podstaw  $n = 2k + 1$  i zapisz wyrażenie w postaci  $d \cdot W$  z największym możliwym  $d$  niezależnym od  $k$ .



a)  $n^2 - 1$

b)  $3n^2 + 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Jaką resztę z dzielenia przez podany dzielnik daje wyrażenie?



a)  $a + b$ , gdy  $a$  daje resztę 3,   b)  $a - b$ , gdy  $a$  daje resztę 1,  
a  $b$  resztę 4 z dzielenia   a  $b$  resztę 5 z dzielenia  
przez 5   przez 6

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣ trudniejsze

## POZIOM C · KLUCZOWY KROK DOWODU

### ZESTAWY C

1 Podaj kluczowe przekształcenie, które dowodzi podzielności.



a)  $2^{50} + 2^{52}$  przez 5

b)  $n^2 + n$  przez 2

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣ trudniejsze

**Pełny trening (32 przykładów i zadań) →**

W każdym arkuszu podstawowym z lat 2025–2026 było zadanie „Wykaż”, zwykle za 2 punkty: suma potęg (wylącz wspólny czynnik), wyrażenie od  $n$  z iloczynem dwóch liczb o różnej parzystości, liczba nieparzysta zapisana jako  $2k + 1$ , rzadziej reszty z dzielenia za 3 punkty. Łatwość w majowych sesjach: 32% (2025) i 41% (2026). Według sprawozdania CKE punkty traci się na źle rozwiniętych wzorach skróconego mnożenia, błędach przy wylączaniu przed nawias, sprawdzaniu tezy na przykładach i braku wniosku na końcu. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

### ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 10 pkt · ok. 25 min

- 1 (0–1 pkt) Dana jest liczba  $N = 2^{15} \cdot 3^{10}$ . Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
  1. Liczba  $N$  jest podzielna przez 36. P / F
  2. Liczba  $N$  jest kwadratem liczby całkowitej. P / F
- 2 (0–2 pkt) Wykaż, że liczba  $2^{30} + 4^{14} + 8^9$  jest podzielna przez 11.
- 3 (0–2 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczba  $3n^2 + 9n$  jest podzielna przez 6.
- 4 (0–2 pkt) Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej  $n$  liczba  $n^2 + 7$  jest podzielna przez 8.
- 5 (0–3 pkt) Liczba całkowita  $a$  daje resztę 3, a liczba całkowita  $b$  resztę 1 z dzielenia przez 4. Wykaż, że liczba  $a^2 - b^2$  jest podzielna przez 8.

 podstawowe    średnie    trudniejsze

× „Sprawdziłem dla  $n = 1, 2, 3$ .”

To nie jest dowód: 0 punktów. Dowód musi działać dla każdej liczby z treści.

× „ $a = 5k + 1, b = 5k + 4$ .”

Ta sama litera oznacza, że  $b = a + 3$ , czyli szczególny przypadek. Dla dwóch liczb potrzebne są dwie litery.

× „Mam  $4(k^2 + k + 2)$ , więc liczba dzieli się przez 8.”

Z tej postaci wynika tylko podzielność przez 4. Do 8 brakuje argumentu, że nawias jest parzysty.

× „Doszedłem do  $7n(n + 3)$  i koniec.”

Trzeba napisać wniosek i uzasadnienie: dlaczego to jest podzielne przez dzielnik z treści.

× „ $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 1$ .”

Wzór skróconego mnożenia:  $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ . To najczęstszy błąd rachunkowy w tych zadaniach.

## 7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jak zapisać liczbę dającą resztę 2 z dzielenia przez 3?

$3k + 2$ ,  $k$  całkowite.

2 Dlaczego  $n(n + 1)$  jest zawsze parzyste?

Z dwóch kolejnych liczb całkowitych jedna jest parzysta.

3 Co musi się znaleźć na końcu dowodu podzielności?

Postać  $d \cdot W$ , informacja, że  $W$  jest całkowite, i wniosek.

4 Jak dowieść, że  $3^{10} + 3^{11}$  dzieli się przez 4?

$3^{10}(1 + 3) = 4 \cdot 3^{10}$ .

5 Na czym polega dowód nie wprost?

Zakładamy, że teza jest fałszywa, i dochodzimy do sprzeczności.

**ZAPIS OGÓLNY**

parzysta  $2k$ , nieparzysta  $2k + 1$ , reszta  $r$ :  
 $dk + r$

dwie liczby: dwie litery ( $k, l$ )

$n(n + 1)$  parzyste;  $n(n + 1)(n + 2)$   
 podzielne przez 6

**SZABLON DOWODU**

zapis  $\rightarrow$  przekształcenie do  $d \cdot W \rightarrow W$   
 całkowite  $\rightarrow$  wniosek

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

suma potęg: wyłącz najmniejszą potęgę

Wzory skróconego mnożenia są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”. Szablonu dowodu ani zapisu reszt broszura nie zawiera: to trzeba wyćwiczyć.

*Dalej: wzory skróconego mnożenia i wyrażenia wymierne (lekcja 2.1 Wzory skróconego mnożenia i wyrażenia wymierne), bez których dowody podzielności się nie obejdą.*



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

1.  $7k + 3$   
2.  $(2k + 1) + (2k + 3) = 4k + 4 = 4(k + 1)$ : zawsze podzielna przez 4.
1.  $n^2 + n = n(n + 1)$   
2.  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$   
3.  $7n^2 + 14n = 7n(n + 2)$ .
1.  $a + b = 5(k + l) + 5 = 5(k + l + 1)$ : reszta 0.  
2.  $ab = (5k + 2)(5l + 3) = 25kl + 15k + 10l + 6 = 5(5kl + 3k + 2l + 1) + 1$ : reszta 1.

## Zadania • część 2

1.  $5^{12}(1 + 5) = 6 \cdot 5^{12} = 30 \cdot 5^{11}$ .  
2.  $5^{11}$  jest całkowite, więc liczba jest podzielna przez 30.
1.  $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ : iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych.  
2. Jedna z nich jest parzysta i jedna podzielna przez 3, więc iloczyn dzieli się przez  $2 \cdot 3 = 6$ .
1. Liczby  $2k + 1$  i  $2k + 3$ .  
2.  $(2k + 3)^2 - (2k + 1)^2 = (2k + 3 - 2k - 1)(2k + 3 + 2k + 1) = 2(4k + 4) = 8(k + 1)$ .  
3.  $k + 1$  jest całkowite, więc różnica dzieli się przez 8.

## Zadania • część 3

1.  $\log_3 2 > 0$ ; gdyby  $\log_3 2 = \frac{p}{q}$  z dodatnimi całkowitymi  $p, q$ , to  $3^p = 2^q$ .  
2. Lewa strona jest nieparzysta, prawa parzysta: sprzeczność.
1.  $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$  (nieskracalny) daje  $p^2 = 3q^2$ , więc  $3 \mid p, p = 3m$ .  
2.  $9m^2 = 3q^2$ , czyli  $q^2 = 3m^2$ , więc  $3 \mid q$ .  
3. Sprzeczność z nieskracalnością.

## Zestawy A

- a)  $3 \cdot 2^{10}$  b)  $3 \cdot 2^{11}$
- a)  $6n(n - 1)$  b)  $(n - 1)n(n + 1)$

## Zestawy B

- a)  $4k(k + 1)$ , czyli  $8 \cdot \frac{k(k+1)}{2}$ : podzielne przez 8 b)  $4(3k^2 + 3k + 1)$
- a) 2 b) 2

## Zestawy C

- a)  $2^{50}(1 + 4) = 5 \cdot 2^{50}$  b)  $n(n + 1)$ : iloczyn kolejnych liczb

## Zadania w stylu maturalnym

1. PF.

1.  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ , a  $N$  zawiera  $2^{15}$  i  $3^{10}$ .
2. Kwadrat liczby całkowitej ma w rozkładzie same parzyste wykładniki, a 15 jest nieparzyste.
2. 1. **Wspólna podstawa.**  $2^{30} + 2^{28} + 2^{27}$ .  
 2. **Wylączenie czynnika.**  $2^{27}(2^3 + 2 + 1) = 11 \cdot 2^{27}$ .  
 3. **Wniosek.**  $2^{27}$  jest liczbą całkowitą, więc liczba jest podzielna przez 11.  
**1 pkt** za zapisanie wszystkich składników jako potęg 2 (albo za wylączenie wspólnego czynnika). **2 pkt** za postać  $11 \cdot 2^{27}$  z wnioskiem.
3. 1. **Rozkład.**  $3n^2 + 9n = 3n(n + 3)$ .  
 2. **Parzystość.**  $n$  i  $n + 3$  mają różną parzystość, więc  $n(n + 3) = 2m$  dla całkowitego  $m$ .  
 3. **Wniosek.**  $3n(n + 3) = 6m$ : liczba jest podzielna przez 6.  
**1 pkt** za zapis  $3n(n + 3)$ . **2 pkt** za uzasadnienie, że  $n(n + 3)$  jest parzyste, i wniosek.

Uwagi: sprawdzenie dla kilku  $n$  to 0 pkt. Zapis „ $3n(n + 3) = 0$ ” nie jest uzasadnieniem podzielności.

4. 1. **Zapis.**  $n = 2k + 1$ ,  $k$  całkowite.  
 2. **Przekształcenie.**

$$(2k + 1)^2 + 7 = 4k^2 + 4k + 8 = 4(k(k + 1) + 2).$$

3. **Parzystość.**  $k(k + 1)$  jest parzyste, więc  $k(k + 1) + 2 = 2m$ .
4. **Wniosek.**  $n^2 + 7 = 8m$ .

**1 pkt** za zapis  $n = 2k + 1$  i postać  $4k^2 + 4k + 8$  (albo  $4(k^2 + k + 2)$ ). **2 pkt** za uzasadnienie podzielności przez 8.

Uwaga: postać  $4(k^2 + k + 2)$  dowodzi tylko podzielności przez 4; bez argumentu o parzystości  $k(k + 1)$  jest 1 pkt.

5. 1. **Zapis.**  $a = 4k + 3$ ,  $b = 4l + 1$ , gdzie  $k, l$  całkowite.  
 2. **Rozkład.**  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , gdzie  $a - b = 4(k - l) + 2 = 2(2(k - l) + 1)$  i  $a + b = 4(k + l + 1)$ .  
 3. **Wniosek.**

$$a^2 - b^2 = 8(2(k - l) + 1)(k + l + 1),$$

a nawias jest liczbą całkowitą.

**1 pkt** za zapis  $a = 4k + 3$  ALBO  $b = 4l + 1$ . **2 pkt** za oba zapisy i rozkład  $a^2 - b^2$  (albo rozwinięcie kwadratów). **3 pkt** za pełny dowód.

Uwaga: ta sama litera w obu zapisach ( $a = 4k + 3$ ,  $b = 4k + 1$ ): **1 pkt** za całe zadanie.

---

Matura z matematyki · Lekcja 1.5: Podzielność i pierwsze dowody · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, punktacja i błędy według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt1\_5.py).