

Trening: podzielność i dowody

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 1.5 Podzielność i pierwsze dowody: wyłączanie wspólnego czynnika z sumy potęg, rozkład wyrażeń od n , reszty z dzielenia i rozwinięcia, od których zaczyna się każdy dowód. Na końcu zadania „wykaż” w stylu arkusza.

POZIOM A · WYŁĄCZANIE I ROZKŁAD

ZESTAWY A

2 zestawy

1 Zapisz jako iloczyn liczby całkowitej i potęgi (wyłącz najmniejszą potęgę).



a) $2^{10} + 2^{11}$

b) $5^8 + 5^9 + 5^{10}$

c) $3^{15} - 3^{13}$

d) $4^6 + 2^{11}$

e) $7^n + 7^{n+1}$

2 Rozłóż na czynniki.



a) $n^2 + 3n$

b) $6n^2 - 6n$

c) $n^3 + 2n^2 + n$

d) $n^3 - n$

e) $(n+1)^2 - (n-1)^2$

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

POZIOM B · ZAPIS OGÓLNY I RESZTY

ZESTAWY B

2 zestawy

- 1 Podstaw $n = 2k + 1$ i zapisz wyrażenie w postaci $d \cdot W$ z największym możliwym d niezależnym od k .

- a) $n^2 - 1$ b) $n^2 + 3$ c) $3n^2 + 1$
d) $n^2 + 2n + 1$

- 2 Jaką resztę z dzielenia przez podany dzielnik daje wyrażenie?

- a) $a + b$, gdy a daje resztę 3, b) $a \cdot b$, gdy a daje resztę 2, c) a^2 , gdy a daje resztę 2 z
a b resztę 4 z dzielenia a b resztę 3 z dzielenia dzielenia przez 3
przez 5 przez 4
d) $a - b$, gdy a daje resztę 1, e) $a^2 + b^2$, gdy a daje resztę
a b resztę 5 z dzielenia 1, a b resztę 2 z dzielenia
przez 6 przez 5

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

POZIOM C · KLUCZOWY KROK DOWODU

ZESTAWY C

1 zestaw

- 1 Podaj kluczowe przekształcenie, które dowodzi podzielności.

- a) $2^{50} + 2^{52}$ przez 5 b) $9^{10} - 3^{18}$ przez 8 c) $n^2 + n$ przez 2
d) $4n^2 + 12n$ przez 8 e) $1001^2 - 999^2$ przez 1000 f) $n(n + 1)(n + 2)$ przez 6

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu CKE. W zadaniach „wykaż” sprawdzenie na przykładach daje 0 punktów; pełne punkty są za postać „dzielnik razy liczba całkowita” razem z uzasadnieniem i wnioskiem.

ZADANIA W STYLU ARKUSZA

7 zadań · 15 pkt

- 1 (0–1 pkt) Dana jest liczba $M = 6^8 \cdot 5^3$. Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. Liczba M jest podzielna przez 1000. P / F
2. Liczba M jest podzielna przez 9^4 . P / F

2 (0-2 pkt) Wykaż, że liczba $3^{40} + 9^{19} + 27^{13}$ jest podzielna przez 13.



3 (0-2 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $7n^2 + 7n$ jest podzielna przez 14.



4 (0-2 pkt) Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 4n + 3$ jest podzielna przez 8.



5 (0-2 pkt) Wykaż, że liczba $2501^2 - 2499^2$ jest podzielna przez 10 000.



6 (0-3 pkt) Liczba całkowita a daje resztę 1, a liczba całkowita b resztę 2 z dzielenia przez 3. Wykaż, że liczba $a^2 + ab + b^2$ daje resztę 1 z dzielenia przez 3.



7 (0-3 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 6.



■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) $3 \cdot 2^{10}$ b) $31 \cdot 5^8$ c) $8 \cdot 3^{13}$ d) $3 \cdot 2^{11}$ e) $8 \cdot 7^n$
2. a) $n(n+3)$ b) $6n(n-1)$ c) $n(n+1)^2$ d) $(n-1)n(n+1)$ e) $4n$

Zestawy B

1. a) $4k(k+1)$, czyli $8 \cdot \frac{k(k+1)}{2}$: podzielne przez 8 b) $4(k^2+k+1)$ c) $4(3k^2+3k+1)$ d) $4(k+1)^2$
2. a) 2 b) 2 c) 1 d) 2 e) 0

Zestawy C

1. a) $2^{50}(1+4) = 5 \cdot 2^{50}$ b) $3^{20} - 3^{18} = 3^{18} \cdot 8$ c) $n(n+1)$: iloczyn kolejnych liczb d) $4n(n+3)$, a $n(n+3)$ jest parzyste e) $(1001-999)(1001+999) = 2 \cdot 2000 = 4000$ f) trzy kolejne liczby: jedna parzysta, jedna podzielna przez 3

Zadania w stylu arkusza

1. PP.

1. $M = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^3$, a $1000 = 2^3 \cdot 5^3$.

2. $9^4 = 3^8$.

2. 1. Wspólna podstawa. $3^{40} + 3^{38} + 3^{39}$.

2. Wyłączenie. $3^{38}(9+1+3) = 13 \cdot 3^{38}$.

3. Wniosek. 3^{38} jest całkowite, więc liczba dzieli się przez 13.

1 pkt za sprowadzenie do potęg 3 albo wyłączenie wspólnego czynnika. 2 pkt za postać $13 \cdot 3^{38}$ z wnioskiem.

3. 1. Rozkład. $7n(n+1)$.

2. Parzystość. $n(n+1)$ to iloczyn kolejnych liczb, więc $n(n+1) = 2m$.

3. Wniosek. $7n(n+1) = 14m$.

1 pkt za zapis $7n(n+1)$. 2 pkt za uzasadnienie parzystości i wniosek.

4. 1. Rozkład. $n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$.

2. Zapis. $n = 2k+1$: $(2k+2)(2k+4) = 4(k+1)(k+2)$.

3. Parzystość. $(k+1)(k+2)$ to iloczyn kolejnych liczb, więc jest parzysty: $(k+1)(k+2) = 2m$.

4. Wniosek. $n^2 + 4n + 3 = 8m$.

1 pkt za postać $4(k+1)(k+2)$ (albo $4k^2 + 12k + 8$). 2 pkt za uzasadnienie podzielności przez 8.

Uwaga: zanim zaczniesz dowodzić, możesz sprawdzić tezę na jednym przykładzie ($n=3$: $9+12+3=24$). To nie jest dowód, ale chroni przed pomyłką w przepisaniu treści.

5. 1. Różnica kwadratów. $(2501-2499)(2501+2499) = 2 \cdot 5000$.

2. Wniosek. $= 10\,000 = 10\,000 \cdot 1$.

1 pkt za zastosowanie wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. 2 pkt za wynik 10 000 i wniosek.

6. 1. **Zapis.** $a = 3k + 1, b = 3l + 2$.

2. **Składniki.** $a^2 = 9k^2 + 6k + 1, ab = 9kl + 6k + 3l + 2, b^2 = 9l^2 + 12l + 4$.

3. **Suma.**

$$a^2 + ab + b^2 = 9k^2 + 9kl + 9l^2 + 12k + 15l + 7 = 3(3k^2 + 3kl + 3l^2 + 4k + 5l + 2) + 1.$$

4. **Wniosek.** Nawias jest całkowity, więc reszta wynosi 1.

1 pkt za zapis $a = 3k + 1$ ALBO $b = 3l + 2$. **2 pkt** za oba zapisy i rozwinięcie całego wyrażenia. **3 pkt** za postać $3 \cdot W + 1$ z wnioskiem.

7. 1. **Rozkład.** $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.

2. **Kolejne liczby.** $(n - 1)n(n + 1)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych: dzieli się przez 2 i przez 3.

3. **Wniosek.** $n^5 - n = 6m(n^2 + 1)$ dla całkowitego m : liczba dzieli się przez 6.

1 pkt za rozkład $n(n^4 - 1)$ albo dalszy. **2 pkt** za wyodrębnienie $(n - 1)n(n + 1)$. **3 pkt** za pełne uzasadnienie podzielności przez 2 i przez 3.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 1.5 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na arkuszach i zasadach oceniania CKE z lat 2025–2026.
Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt1_5.py).