

Procenty, procent składany, lokaty i kredyty

Procent to zawsze procent *czegoś*. Prawie każdy błąd w zadaniach procentowych bierze się z liczenia procentu od złej podstawy albo z dodawania procentów, które trzeba mnożyć. Ta lekcja to porównania „o ile procent”, kolejne zmiany ceny, punkty procentowe oraz procent składany, czyli lokaty i kredyty.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 6
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: I.8
(także procenty w
zadaniach
tekstowych i
statystyce)

W TEJ LEKCJI

- 0 Procent od czego?
- 1 Procent i porównania
- 2 Kolejne zmiany: mnożniki
- 3 Procent składany i lokaty
- 4 Koszt kredytu
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Procent od czego?

Pan X zarabia o 20% więcej niż średnia, a pan Y o 20% mniej. O ile procent X zarabia więcej od Y? Odpowiedź „o 40%” jest zła. Jeśli średnia to S , to X ma $1,2S$, a Y ma $0,8S$, więc

$$\frac{1,2S}{0,8S} = 1,5,$$

czyli X zarabia o 50% więcej od Y. A Y zarabia o tyle mniej od X: $\frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3}$, czyli o $33\frac{1}{3}\%$ mniej. Ten sam „odstęp” daje różne procenty, bo za każdym razem liczymy od innej podstawy. Zadanie z takim pytaniem było w informatorze CKE.

Procent i porównania

PROCENT

$p\%$ liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$. Liczba b stanowi $\frac{b}{a} \cdot 100\%$ liczby a .

b jest większa od a o $\frac{b-a}{a} \cdot 100\%$ (podstawą jest liczba, od której porównujemy).

Punkty procentowe to różnica dwóch procentów: wzrost oprocentowania z 4% do 5% to wzrost o 1 punkt procentowy, czyli o 25%.

Przykład 1.1

Podwyżka i obniżka o tyle samo procent

Cena wzrosła z 80 zł do 92 zł. O ile procent? A gdyby potem obniżono ją o tyle samo procent, ile wyniesie?

- 1 Wzrost: $\frac{92-80}{80} = \frac{12}{80} = 0,15$, czyli o 15%.
- 2 Obniżka o 15% liczona od nowej ceny: $92 \cdot 0,85 = 78,20$ zł.

Wynik: podwyżka o 15%; po obniżce o 15% cena to 78,20 zł, a nie 80 zł.

- 1 Oblicz 35% liczby 240.

- 2 Liczba a jest o 25% większa od liczby b . O ile procent liczba b jest mniejsza od a ?

- 3 Po obniżce o 30% kurtka kosztuje 56 zł. Ile kosztowała przed obniżką?

podstawowe średnie trudniejsze

2 Kolejne zmiany: mnożniki

Wzrost o $p\%$ to pomnożenie przez $1 + \frac{p}{100}$, spadek o $p\%$ to pomnożenie przez $1 - \frac{p}{100}$. Kolejne zmiany procentowe się **mnoży**, a nie dodaje.

Przykład 2.1

Dwie zmiany

Cenę podniesiono o 20%, a potem obniżono o 20%. Jak zmieniła się w porównaniu z ceną początkową?

- 1 Mnożniki: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$.
- 2 $0,96 = 1 - 0,04$.

Wynik: cena spadła o 4%. Dwie podwyżki o 10% dają $1,1^2 = 1,21$, czyli wzrost o 21%, a nie o 20%.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Towar kosztował 200 zł. Cenę podniesiono o 10%, a potem obniżono o 10%. Ile kosztuje teraz?

- 2 Liczba mieszkańców miasta spadała o 5% rocznie przez dwa lata. O ile procent spadła w tym czasie?

podstawowe średnie trudniejsze

3 Procent składany i lokaty

PROCENT SKŁADANY

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

K to kapitał początkowy, $p\%$ oprocentowanie w jednym okresie kapitalizacji, n liczba okresów. Odsetki to $K_n - K$.

Gdy oprocentowanie roczne $p\%$ jest dopisywane m razy w roku (np. kwartalnie: $m = 4$), w każdym okresie dolicza się $\frac{p}{m}\%$, a okresów w ciągu n lat jest mn : $K_n = K \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}$.

„Procent składany” znaczy, że odsetki są dopisywane do kapitału, więc w kolejnym okresie same zarabiają. Przy procencie prostym odsetki co roku liczy się od tego samego kapitału początkowego. W zadaniach CKE pomija się podatek od odsetek, chyba że treść mówi inaczej.

Przykład 3.1

Odsetki z lokaty

Na lokatę z kapitalizacją roczną wpłacono 5000 zł na 4% rocznie. Ile odsetek będzie po 3 latach?

- 1 $K_3 = 5000 \cdot 1,04^3 = 5000 \cdot 1,124864 = 5624,32$ zł.
- 2 Odsetki: $5624,32 - 5000 = 624,32$ zł.

Wynik: 624,32 zł (przy procencie prostym byłoby $3 \cdot 200 = 600$ zł).

Przykład 3.2

Oprocentowanie z wyniku

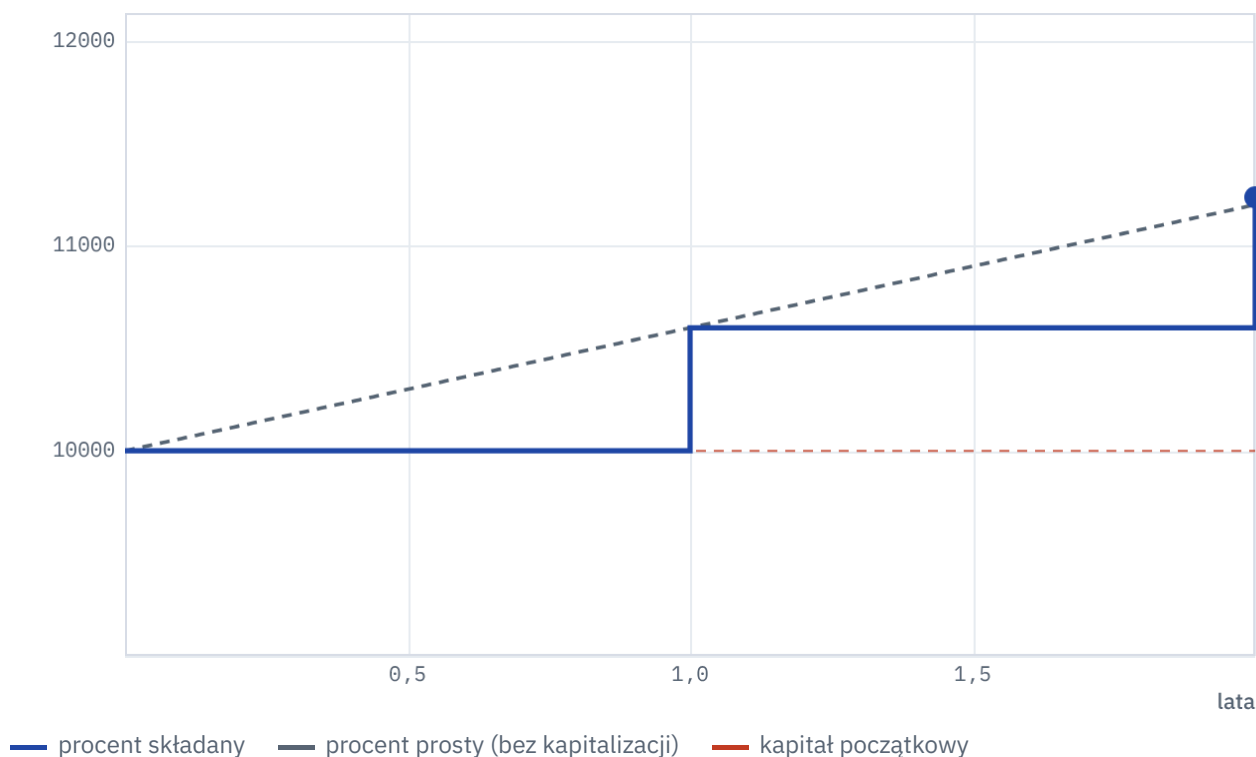
Kapitał 20 000 zł po dwóch latach na lokacie z roczną kapitalizacją wzrósł do 22 472 zł. Jakie było roczne oprocentowanie?

- 1 $20\,000 \cdot q^2 = 22\,472$, gdzie $q = 1 + \frac{p}{100}$.
- 2 $q^2 = 1,1236$, więc $q = \sqrt{1,1236} = 1,06$.

Wynik: 6% rocznie. (Kto podzieli 12,36% przez 2, dostanie 6,18%: to błąd, bo procentów składanych się nie dzieli.)

SYMULACJA 1

Lokata: procent składany (schodki: odsetki dopisywane na koniec każdego okresu) i dla porównania procent prosty. Zmieniaj kapitał, oprocentowanie, liczbę lat i częstość kapitalizacji. Przy długim okresie różnica między procentem prostym i składanym robi się duża.



kapitał po n latach 11236,00 zł

odsetki 1236,00 zł

procent prosty 11200,00 zł

wzór $K \cdot (1 + p)^n$

wzrost 12,36 %

Przy procencie składanym odsetki z każdego okresu same zarabiają w następnych, więc kapitał rośnie szybciej niż przy procencie prostym: po 2 latach różnica to 36,00 zł. Częstsza kapitalizacja przy tym samym oprocentowaniu rocznym daje trochę więcej.

Stan na rysunku: $K = 10000$ zł, $p = 6,0\%$, $n = 2$, kapitalizacja roczna; kapitał końcowy 11236,00 zł.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 12 min

- 1 Na lokatę z roczną kapitalizacją wpłacono 8000 zł na 5% rocznie. Ile odsetek będzie po 2 latach?
- 2 Kapitał 40 000 zł po dwóch latach na lokacie z roczną kapitalizacją wzrósł do 43 264 zł. Jakie było oprocentowanie?

- 3 Na lokatę 10 000 zł na 4% rocznie bank dolicza odsetki co kwartał. Ile będzie na lokacie po roku? Porównaj z kapitalizacją roczną.

- 4 Po ilu pełnych latach kapitał 1000 zł na 10% rocznie (kapitalizacja roczna) po raz pierwszy przekroczy 1500 zł?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

4 Koszt kredytu

Kredyt działa jak lokata, tylko odwrotnie: to bank „wplaca”, a odsetki płacisz ty. Najprostszy model to kredyt spłacany jednorazowo po n latach: do oddania jest $K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, a **koszt kredytu** to odsetki, czyli różnica między kwotą do oddania a pożyczoną. Kredyty spłacane w ratach wymagają sumy ciągu geometrycznego (lekcja 6.3 Ciąg geometryczny); w arkuszach z lat 2024–2026 zadań o kredytach nie było.

Przykład 4.1

Kredyt spłacany jednorazowo

Firma pożycza 10 000 zł na 2 lata na 8% rocznie z roczną kapitalizacją i spłaca całość na końcu. Ile wynosi koszt kredytu?

- 1 Do oddania: $10\,000 \cdot 1,08^2 = 10\,000 \cdot 1,1664 = 11\,664$ zł.

Wynik: koszt kredytu 1664 zł.

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 35 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · PROCENT I PORÓWNANIA

 ZESTAWY A

1

Oblicz.



a) 15% liczby 60

b) jakim procentem liczby
72 jest 18?

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2

O ile procent zmieniła się wielkość?



a) z 80 na 60

b) z 150 na 120

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

POZIOM B · KOLEJNE ZMIANY I WARTOŚĆ SPRZED ZMIANY

ZESTAWY B

1

Jak w sumie zmieniła się cena?



a) +10%, potem +20%

b) +25%, potem -20%

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2

Oblicz cenę przed zmianą.

a) po podwyżce o 20%
kosztuje 84 złb) po dwóch podwyżkach o
10% kosztuje 242 zł

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

POZIOM C · LOKATY

ZESTAWY C

1

Oblicz kapitał końcowy (bez podatku).

a) 2000 zł, 3% rocznie,
kapitalizacja roczna, 2 latab) 1000 zł, 10% rocznie,
kapitalizacja półroczna, 1
rok

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz roczne oprocentowanie lokaty z kapitalizacją roczną.



- a) 10 000 zł po 2 latach to 10 816 zł b) 8000 zł po 2 latach to 8820 zł

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (35 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Lokata z procentem składanym to typowe zadanie zamknięte za 1 punkt (w maju 2026 roku rozwiązało je 83% zdających; najczęstsza zła odpowiedź to procent prosty). Trudniejsze są procenty ukryte w zadaniach tekstowych: w maju 2025 roku zadanie z dwoma zespołami i procentowymi oszczędnościami miało łatwość tylko 30%, bo zdający liczyli procent od złej kwoty albo stosowali procent składany tam, gdzie go nie było. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

6 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

1 (0–1 pkt) Klient wpłacił 12 000 zł na lokatę dwuletnią z oprocentowaniem 5% w skali roku i roczną kapitalizacją odsetek. Łączna kwota odsetek po dwóch latach (bez podatku) jest równa

- A. 1200 zł B. 1230 zł C. 13 230 zł D. 2460 zł

2 (0–1 pkt) Kapitał 30 000 zł złożony na dwa lata na lokacie z roczną kapitalizacją odsetek wzrósł do 33 708 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty było równe

- A. 6% B. 6,18% C. 12,36% D. 5,6%

3 (0–1 pkt) Liczba x jest o 25% większa od liczby $y > 0$. Wtedy liczba y jest mniejsza od liczby x o

- A. 25% B. 20% C. 75% D. 80%

- 4 (0–1 pkt) Cenę 150 zł podniesiono o 20%, a następnie nową cenę obniżono o 20%. Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. Cena końcowa jest równa 144 zł. P / F
2. Cena końcowa jest równa cenie początkowej. P / F

- 5 (0–1 pkt) Oprocentowanie lokaty wzrosło z 5% do 6%. Uzupełnij zdanie.
Oprocentowanie wzrosło o procent.

- 6 (0–2 pkt) Pan Adam wpłacił 4000 zł na lokatę trzyletnią z oprocentowaniem 5% w skali roku i roczną kapitalizacją odsetek. Oblicz łączną kwotę odsetek po trzech latach (bez podatku). Zapisz obliczenia.

▯▯▯ podstawowe ▯▯▯ średnie ▯▯▯ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

- × „Podwyżka o 20% i obniżka o 20% się znoszą.”

Druga zmiana liczy się od nowej ceny: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$, spadek o 4%.

- × „X ma o 20% więcej niż średnia, Y o 20% mniej, więc X ma o 40% więcej niż Y.”

Porównanie z Y liczy się od Y: $\frac{1,2}{0,8} = 1,5$, czyli o 50%.

- × „Lokata 6% na 2 lata to 12% odsetek.”

Przy procencie składanym: $1,06^2 = 1,1236$, czyli 12,36%. 12% to procent prosty.

- × „Wzrost z 5% do 6% to wzrost o 1%.”

To wzrost o 1 *punkt procentowy*, a o 20%.

- × „Procent składany pasuje do każdego zadania z procentami.”

Tylko gdy odsetki (albo zmiana) są doliczane do nowej kwoty w kolejnych okresach. W zadaniu „zespół zaoszczędził 13% przydzielonej kwoty” to zwykły procent od przydziału.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Przez co pomnożyć cenę, żeby obniżyć ją o 15%?

Przez 0,85.

- 2 Ile procent wzrośnie kapitał w dwa lata przy 10% rocznie (kapitalizacja roczna)?

$1,1^2 = 1,21$: o 21%.

- 3 Od jakiej liczby liczymy, gdy pytanie brzmi „o ile procent b jest większe od a ”?

Od a .

- 4 Co to jest koszt kredytu?

Odsetki: kwota do oddania minus kwota pożyczona.

- 5 Jak z $K_2 = Kq^2$ wyznaczyć oprocentowanie?

$q = \sqrt{\frac{K_2}{K}}$, a $p\% = (q - 1) \cdot 100\%$.

PROCENTY

$p\%$ z a : $\frac{p}{100}a$; wzrost o $p\%$: $\cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

b większe od a o $\frac{b-a}{a} \cdot 100\%$

kolejne zmiany: mnożniki się mnoży

PROCENT SKŁADANY

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$m \text{ razy w roku: } K \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}$$

$$\text{odsetki} = K_n - K$$

Wzór na procent składany z kapitalizacją roczną jest w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (w rozdziale o ciągach, bo kolejne kapitały tworzą ciąg geometryczny). Wersji z kapitalizacją częstszą niż raz w roku broszura nie podaje, ale łatwo ją wyprowadzić: w każdym z mn okresów kapitał mnoży się przez $1 + \frac{p}{100m}$.

Dalej: podzielność i pierwsze dowody (lekcja 1.5 Podzielność i pierwsze dowody). Procenty w zadaniach tekstowych: lekcja 4.1 Układy równań liniowych i zadania tekstowe; wzrost wykładniczy: lekcja 5.6 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $0,35 \cdot 240 = 84$.
1. $a = 1,25b$, więc $b = \frac{a}{1,25} = 0,8a$.
2. b jest mniejsza od a o 20%.
1. $0,7x = 56$
2. $x = 80$ zł.

Zadania · część 2

1. $200 \cdot 1,1 \cdot 0,9 = 198$ zł.
1. $0,95^2 = 0,9025$
2. Spadek o 9,75%.

Zadania · część 3

1. $8000 \cdot 1,05^2 = 8000 \cdot 1,1025 = 8820$ zł
2. Odsetki 820 zł.
1. $q^2 = \frac{43\,264}{40\,000} = 1,0816$
2. $q = 1,04$: 4% rocznie.
1. W kwartale 1%: $10\,000 \cdot 1,01^4 = 10\,406,04$ zł.
2. Kapitalizacja roczna: 10 400 zł, czyli o 6,04 zł mniej.
1. $1,1^4 = 1,4641$, czyli 1464,10 zł: za mało.
2. $1,1^5 = 1,61051$, czyli 1610,51 zł: po 5 latach.

Zestawy A

1. a) 9 b) 25%
2. a) spadek o 25% b) spadek o 20%

Zestawy B

1. a) wzrost o 32% b) bez zmiany
2. a) 70 zł b) 200 zł

Zestawy C

1. a) 2121,80 zł b) 1102,50 zł
2. a) 4% b) 5%

Zadania w stylu maturalnym

1. B.
1. $12\,000 \cdot 1,05^2 = 13\,230$ zł

2. Odsetki $13\,230 - 12\,000 = 1230$ zł.

3. A to procent prosty, C to cała kwota, nie odsetki.

2. A.

1. $q^2 = \frac{33\,708}{30\,000} = 1,1236$

2. $q = 1,06$.

3. B to wzrost $12,36\%$ podzielony przez 2.

3. B.

1. $y = \frac{x}{1,25} = 0,8x$.

2. D to „ile procent x stanowi y ”, a nie „o ile mniej”.

4. PF.

1. $150 \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 150 \cdot 0,96 = 144$ zł.

2. To o 4% mniej niż na początku.

5. 20

1. Wzrost o 1 punkt procentowy.

2. $\frac{6-5}{5} = 0,2$, czyli o 20% .

6. 1. **Kapitał końcowy.**

$$K_3 = 4000 \cdot 1,05^3 = 4000 \cdot 1,157625 = 4630,50 \text{ zł.}$$

2. **Odsetki.** $4630,50 - 4000 = 630,50$ zł.

1 pkt za zapisanie $4000 \cdot 1,05^3$ (albo kapitału po kolejnych latach). **2 pkt** za odsetki $630,50$ zł.

Uwaga: procent prosty ($3 \cdot 200 = 600$ zł) to niepoprawna metoda: **0 pkt**.

Matura z matematyki · Lekcja 1.4: Procenty, procent składany, lokaty i kredyty · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt1_4.py).