

Logarytmy

Logarytm to odpowiedź na pytanie „do jakiej potęgi?”. Na poziomie podstawowym wystarczą definicja i trzy wzory: logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi; zadania z logarytmami należą tam do najłatwiejszych w arkuszu. Na poziomie rozszerzonym dochodzi zamiana podstawy i zadania typu „wykaż”.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

10 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 7
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa:
zakres
podstawowy I.9;
zakres
rozszerzony I.R
(zamiana
podstawy
logarytmu)

W TEJ LEKCJI

- 0 Do jakiej potęgi?
- 1 Definicja logarytmu
- 2 Logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi
- 3 Zamiana podstawy (rozszerzenie)
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Do jakiej potęgi?

Potęgowanie odpowiada na pytanie „ile to jest 2^5 ?” (odpowiedź: 32). Logarytm odpowiada na pytanie odwrotne: „do jakiej potęgi trzeba podnieść 2, żeby dostać 32?” Odpowiedź to 5 i zapisujemy ją jako $\log_2 32 = 5$.

Kto o tym pamięta, ten liczy większość logarytmów z arkusza podstawowego w głowie: $\log_3 9 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$. Trudniejsze przypadki, jak $\log_8 4$, rozwiązuje ta sama technika co w lekcji o potęgach: wspólna podstawa.

Definicja logarytmu

LOGARYTM

$$\log_a b = c \iff a^c = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

a to podstawa, b to liczba logarytmowana. Logarytm dziesiętny: $\log b = \log_{10} b$.

Zawsze: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^k = k$, $a^{\log_a b} = b$.

Przykład 1.1

Wspólna podstawa

Oblicz $\log_8 4$.

- 1 Szukamy c , dla którego $8^c = 4$.
- 2 Wspólna podstawa: $(2^3)^c = 2^2$, czyli $2^{3c} = 2^2$.
- 3 $3c = 2$, więc $c = \frac{2}{3}$.

Wynik: $\log_8 4 = \frac{2}{3}$.

Sprawdzenie: $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4 \checkmark$.

Przykład 1.2

Logarytm z pierwiastka

Oblicz $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

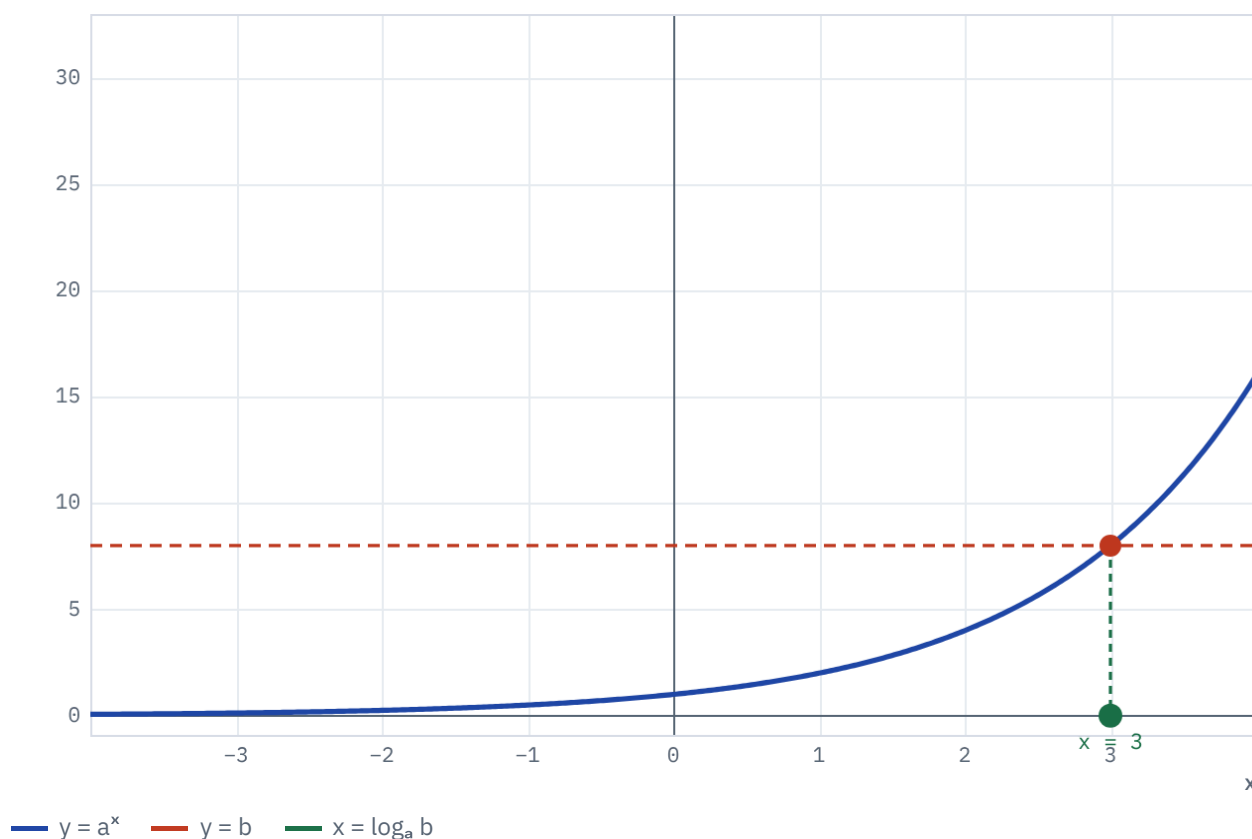
1 $\sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$.

2 $\log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$.

Wynik: $\frac{2}{3}$.

SYMULACJA 1

Logarytm jako odczyt z wykresu. Wybierz podstawę a i liczbę b . Pozioma prosta $y = b$ przecina wykres $y = a^x$ w punkcie, którego pierwsza współrzędna to $\log_a b$. Zobacz, kiedy logarytm jest ujemny, a kiedy równy zero.



a 2

b 8

$\log_a b$ 3

sprawdzenie $2^3 = 8$

$\log_a b$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść 2, żeby dostać 8: punkt wykresu $y = 2^x$ na wysokości 8 ma pierwszą współrzędną 3.

Stan na rysunku: $a = 2$, $b = 8$, $\log_a b = 3$.

1 Oblicz $\log_3 81$ i $\log_2 \frac{1}{8}$.

2 Oblicz $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

3 Oblicz $\log_4 8$.

4 Wyznacz x , jeśli $\log_x 49 = 2$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

2 Logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi

WZORY (DLA $x, y > 0$)

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^k = k \log_a x.$$

Czytaj wzory w obie strony: sumę logarytmów o tej samej podstawie zamieniasz na logarytm iloczynu, różnicę na logarytm ilorazu, a liczbę przed logarytmem wciągasz jako wykładnik.

Przykład 2.1

Różnica logarytmów

Oblicz $\log_3 54 - \log_3 2$.

1 Różnica to logarytm ilorazu: $\log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27$.

2 $3^3 = 27$.

Wynik: 3.

Przykład 2.2

Liczba przed logarytmem

Oblicz $2 \log_5 10 - \log_5 4$.

1 $2 \log_5 10 = \log_5 10^2 = \log_5 100.$

2 $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 25 = 2.$

Wynik: 2.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 8 min

1 Oblicz $\log_2 12 - \log_2 3$.

2 Oblicz $3 \log 2 + \log 125$.

3 Zapisz $\log_7 x + 2 \log_7 y - \log_7 3$ jako jeden logarytm ($x, y > 0$).

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

3 Zamiana podstawy (rozszerzenie)

Ta część dotyczy tylko poziomego rozszerzonego. Gdy logarytmy w zadaniu mają różne podstawy, sprowadzamy je do jednej.

🔧 ZAMIANA PODSTAWY

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a, c > 0, a, c \neq 1, b > 0).$$

Wnioski: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ oraz $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ (łańcuch „skraca się” jak ułamki).

Przykład 3.1

Iloczyn logarytmów

Oblicz $\log_2 9 \cdot \log_3 8$.

- 1 $\log_2 9 = 2 \log_2 3$ i $\log_3 8 = 3 \log_3 2$.
- 2 $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$ (odwrotności).

Wynik: $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 3 (ROZSZERZENIE)

3 zadania · ok. 10 min

- 1 Oblicz $\log_2 5 \cdot \log_5 8$.



- 2 Oblicz $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$.



- 3 Oblicz $16^{\log_4 3}$.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 36 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · DEFINICJA

 ZESTAWY A

- 1 Oblicz.



a) $\log_2 64$

b) $\log_{25} 5$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz x .

■ ■ ■

a) $\log_x 49 = 2$

b) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM B · WZORY

ZESTAWY B

1 Oblicz.

■ ■ ■

a) $\log_6 3 + \log_6 12$

b) $2 \log_3 6 - \log_3 4$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zapisz jako jeden logarytm (wszystkie litery oznaczają liczby dodatnie).

■ ■ ■

a) $2 \log a - \log b$

b) $\log_7 2 + \log_7 x - \log_7 3$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM C · ZAMIANA PODSTAWY (ROZSZERZENIE)

ZESTAWY C

1 Oblicz.

■ ■ ■

a) $\log_2 3 \cdot \log_3 16$

b) $\log_{\sqrt{2}} 8$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

Pełny trening (36 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

Na poziomie podstawowym w latach 2025–2026 w każdym arkuszu było jedno zadanie zamknięte z logarytmami: różnica lub suma logarytmów o tej samej podstawie, logarytm pierwiastka, zapis

sumy logarytmów jako jednego logarytmu. W majowych sesjach rozwiązało je 78–80% zdających. Na poziomie rozszerzonym logarytmy pojawiają się w zadaniach otwartych za 2–3 punkty: „oblicz” wyrażenie z różnymi podstawami albo „wykaż” zależność, w której trzeba zamienić podstawę. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

7 zadań · 10 pkt · ok. 20 min

- 1 (0–1 pkt) Liczba $\log_9 3 - \log_9 27$ jest równa
 A. -1 B. 1 C. -2 D. -24
- 2 (0–1 pkt) Liczba $\log_2 80 - \log_2 5$ jest równa
 A. 4 B. 16 C. $\log_2 75$ D. 75
- 3 (0–1 pkt) Liczba $\log_4 \sqrt[3]{2}$ jest równa
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
- 4 (0–1 pkt) Dla dodatnich liczb a i b wyrażenie $\log_3 a + 4 \log_3 b$ jest równe
 A. $\log_3(ab^4)$ B. $\log_3(a + 4b)$ C. $4 \log_3(ab)$ D. $\log_3(4ab)$
- 5 (0–1 pkt) Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

 1. $3 \log_2 5 = \log_2 125$. P / F
 2. $\log_2 5 + 1 = \log_2 6$. P / F
- 6 (0–2 pkt, poziom rozszerzony) Oblicz $\log_3 4 \cdot \log_2 27$. Zapisz obliczenia.

- 7 (0–3 pkt, poziom rozszerzony) Niech $a = \log_2 3$. Wykaż, że $\log_{12} 18 = \frac{1 + 2a}{2 + a}$.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

✗ „ $\log(x + y) = \log x + \log y$.”

Wzór dotyczy iloczynu: $\log(xy) = \log x + \log y$. Logarytmu sumy nie da się rozbić.

× „ $\log_9 3 - \log_9 27 = \log_9(3 - 27)$.”

Różnica logarytmów to logarytm ilorazu: $\log_9 \frac{3}{27}$.

× „ $\log_a b$ może być tylko dodatni.”

Logarytm może być ujemny ($\log_2 \frac{1}{4} = -2$) albo zerem ($\log_a 1 = 0$). Dodatnia musi być liczba logarytmowana b .

× „ $\frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \log_2 2$.”

Iloraz logarytmów to nie logarytm ilorazu: $\frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$ (i to jest $\log_4 8$ z zamiany podstawy).

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co znaczy $\log_a b = c$?

$$a^c = b.$$

2 Ile to $\log_a 1$ i $\log_a a$?

0 i 1.

3 Jak zapisać $2 \log x - \log y$ jako jeden logarytm?

$$\log \frac{x^2}{y}.$$

4 Ile to $\log_2 3 \cdot \log_3 2$?

1 (zamiana podstawy).

5 Jakie warunki musi spełniać podstawa logarytmu?

$$a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

POZIOM PODSTAWOWY

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \log_a x^k = k \log_a x$$

POZIOM ROZSZERZONY

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Definicja logarytmu, trzy wzory i zamiana podstawy są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (rozdział 3). Odczytywania logarytmu „w głowie” przez wspólną podstawę broszura nie uczy.

Dalej: procenty i procent składany (lekcja 1.4 Procenty, procent składany, lokaty i kredyty). Funkcja logarytmiczna i jej zastosowania: lekcja 5.6 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $3^4 = 81$, więc $\log_3 81 = 4$.
2. $2^{-3} = \frac{1}{8}$, więc $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.
1. $\left(\frac{1}{2}\right)^c = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
2. $c = -2$.
1. $2^{2c} = 2^3$
2. $c = \frac{3}{2}$.
1. $x^2 = 49$, a podstawa logarytmu musi być dodatnia i różna od 1.
2. $x = 7$ ($x = -7$ odpada).

Zadania · część 2

1. $\log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4$
2. $= 2$.
1. $\log 8 + \log 125 = \log 1000$
2. $= 3$.
1. $\log_7 x + \log_7 y^2 - \log_7 3$
2. $= \log_7 \frac{xy^2}{3}$.

Zadania · część 3 (rozszerzenie)

1. $\log_2 5 \cdot \log_5 8 = \log_2 8$
2. $= 3$.
1. $\frac{1}{\log_2 6} = \log_6 2$ i $\frac{1}{\log_3 6} = \log_6 3$
2. $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$.
1. $16^{\log_4 3} = (4^{\log_4 3})^2$
2. $= 3^2 = 9$.

Zestawy A

- a) 6 b) $\frac{1}{2}$
- a) $x = 7$ b) $x = 4$

Zestawy B

- a) 2 b) 2
- a) $\log \frac{a^2}{b}$ b) $\log_7 \frac{2x}{3}$

Zestawy C

- a) 4 b) 6

Zadania w stylu maturalnym

1. A.

1. $\log_9 \frac{3}{27} = \log_9 \frac{1}{9}$

2. $= -1$.

3. D to odjęcie liczb logarytmowanych.

2. A.

1. $\log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16$

2. $= 4$.

3. A.

1. $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}}$

2. $\log_4 4^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$.

3. C to $\log_2 \sqrt[3]{2}$.

4. A.

1. $4 \log_3 b = \log_3 b^4$

2. Suma logarytmów: $\log_3(ab^4)$.

5. PF.

1. $3 \log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125$.

2. $1 = \log_2 2$, więc $\log_2 5 + 1 = \log_2 10$, a nie $\log_2 6$.

6. 1. Potęgi. $\log_3 4 = 2 \log_3 2$, $\log_2 27 = 3 \log_2 3$.

2. Zamiana podstawy. $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$.

3. Wynik. $2 \cdot 3 = 6$.

1 pkt za sprowadzenie do jednej podstawy (np. $\frac{2 \log 2}{\log 3} \cdot \frac{3 \log 3}{\log 2}$) ALBO za zapis $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$. **2 pkt** za wynik 6.

7. 1. Zamiana podstawy.

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12}.$$

2. Rozkład. $\log_2 18 = \log_2(2 \cdot 3^2) = 1 + 2a$, $\log_2 12 = \log_2(2^2 \cdot 3) = 2 + a$.

3. Teza. $\log_{12} 18 = \frac{1 + 2a}{2 + a}$, co kończy dowód.

1 pkt za zamianę podstawy na 2 (albo inną wspólną). **2 pkt** za zapisanie licznika lub mianownika przez a . **3 pkt** za pełne rozumowanie.

Uwaga: sprawdzenie równości na przybliżeniach z kalkulatora nie jest dowodem: 0 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 1.3: Logarytmy · Na podstawie: Informatory o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy i rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt1_3.py).