

Potęgi i pierwiastki

Pierwsze dwa, trzy zadania arkusza podstawowego to prawie zawsze potęgi i pierwiastki: wspólna podstawa, pierwiastek z pierwiastka, pierwiastek trzeciego stopnia z liczby ujemnej. Jedna metoda rozwiązuje je wszystkie: zapisz każdą liczbę jako potęgę tej samej podstawy, a pierwiastki jako potęgi o wykładniku wymiernym.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

11 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 7
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: I.3,
I.4, I.5

W TEJ LEKCJI

- 0 Pierwiastek z pierwiastka
- 1 Potęgi o wykładniku całkowitym
- 2 Pierwiastki
- 3 Potęgi o wykładniku wymiernym
- 4 Notacja wykładnicza
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Pierwiastek z pierwiastka

Ile to jest $\sqrt{5\sqrt{5}}$? Kalkulator da 3,34... , ale w zadaniu zamkniętym odpowiedzi są zapisane jako potęgi piątki: $5^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{3}{4}}$, $5^{\frac{3}{2}}$. W maju 2026 roku takie zadanie rozwiązało 61% zdających. Wystarczy jedna zamiana: pierwiastek to potęga o wykładniku $\frac{1}{2}$. Wtedy

$$\sqrt{5\sqrt{5}} = \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{4}}.$$

Ta lekcja to prawa działań na potęgach, pierwiastki dowolnego stopnia (także z liczb ujemnych), potęgi o wykładniku wymiernym i zapis bardzo dużych i bardzo małych liczb.

Potęgi o wykładniku całkowitym

PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (\text{dla } a, b \neq 0).$$

Strategia: zapisz wszystko jako potęgi tej samej liczby pierwszej ($4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $0,2 = 5^{-1}$, $\frac{1}{8} = 2^{-3}$).

Przykład 1.1

Wspólna podstawa

Zapisz $\frac{25^{-2}}{125^{-4}}$ jako potęgę liczby 5.

- 1 $25 = 5^2$, $125 = 5^3$: licznik 5^{-4} , mianownik 5^{-12} .
- 2 Dzielenie potęg: $5^{-4-(-12)} = 5^8$.

Wynik: 5^8 .

Przykład 1.2

Suma potęg: wyłącz wspólny czynnik

Oblicz $\frac{3^{10} + 3^{11} + 3^{12}}{3^{10}}$.

- 1 Wyłącz 3^{10} w liczniku: $3^{10}(1 + 3 + 3^2) = 3^{10} \cdot 13$.
- 2 Skróć: $\frac{3^{10} \cdot 13}{3^{10}} = 13$.

Wynik: 13.

Pułapka: $3^{10} + 3^{11} \neq 3^{21}$. Prawo $a^m a^n = a^{m+n}$ dotyczy mnożenia, nie dodawania.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 8 min

1 Oblicz $\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^{-1}}$.

2 Oblicz $9^4 \cdot 3^{-5}$.

3 Oblicz $\frac{2^{10} + 2^{11}}{2^9}$.

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

2 Pierwiastki

PIERWIASTKI

$\sqrt[n]{a} = b$ znaczy $b^n = a$. Dla n parzystego: $a \geq 0$ i $b \geq 0$. Dla n nieparzystego a może być ujemne: $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (\text{dla } a, b, \text{ przy których pierwiastki istnieją});$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (\text{nie zawsze } a!), \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$

$$\text{Wyłączanie czynnika: } \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Pierwiastka z sumy nie rozkłada się na sumę pierwiastków: $\sqrt{9+16}=5$, a $\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$. Dodawać można tylko pierwiastki „podobne”, czyli z tą samą liczbą pod pierwiastkiem: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Usuwanie niewymierności z mianownika. Gdy w mianowniku stoi $\sqrt{a}$, mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{a}$. Gdy stoi $\sqrt{a} \pm b$, mnożymy przez $\sqrt{a} \mp b$ i korzystamy ze wzoru $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

Przykład 2.1

Pierwiastki trzeciego stopnia z liczb ujemnych

Oblicz $\frac{\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{-20}}{\sqrt[3]{-1000}}$.

1 Licznik: $\sqrt[3]{50 \cdot (-20)} = \sqrt[3]{-1000} = -10$.

2 Mianownik: $\sqrt[3]{-1000} = -10$.

Wynik: $\frac{-10}{-10} = 1$.

Przykład 2.2

Niewymierność w mianowniku

Zapisz $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ bez pierwiastka w mianowniku.

1 Pomnóż przez $\sqrt{5}+1$: $\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$.

2 Mianownik: $5-1=4$.

Wynik: $\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 10 min

1 Wyłącz czynnik przed pierwiastek: $\sqrt{72}$ i $\sqrt[3]{-54}$.

2 Oblicz $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$.

3 Zapisz $\frac{3}{\sqrt{7}+2}$ bez pierwiastka w mianowniku.

podstawowe średnie trudniejsze

3 Potęgi o wykładniku wymiernym

PIERWIĄSTEK JAKO POTĘGA

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0).$$

Wszystkie prawa działań na potęgach działają też dla wykładników wymiernych.

Licz w kolejności: najpierw pierwiastek, potem potęgę, bo tak liczby są mniejsze:

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4.$$

Przykład 3.1

Pierwiastki zagnieżdżone

Zapisz $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ jako potęgę liczby 2.

- 1 Pod pierwiastkiem: $2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.
- 2 Pierwiastek trzeciego stopnia: $(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}$.

Wynik: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 8 min

1 Oblicz $16^{\frac{3}{4}}$ i $27^{-\frac{2}{3}}$.

2 Zapisz $\sqrt{5\sqrt{5}}$ jako potęgę liczby 5.

3 Oblicz $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$.

podstawowe średnie trudniejsze

Notacja wykładnicza

Bardzo duże i bardzo małe liczby zapisuje się w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq a < 10$, a k jest liczbą całkowitą: $450\,000 = 4,5 \cdot 10^5$, $0,00032 = 3,2 \cdot 10^{-4}$. Przy mnożeniu i dzieleniu liczysz osobno liczby a i osobno potęgi dziesiątki, a na końcu poprawiasz a tak, żeby było między 1 a 10.

Przykład 4.1

Iloczyn w notacji wykładniczej

Oblicz $(3 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^{-2})$ i zapisz wynik w notacji wykładniczej.

- 1 $3 \cdot 4 = 12$, $10^5 \cdot 10^{-2} = 10^3$: razem $12 \cdot 10^3$.
- 2 $12 = 1,2 \cdot 10$, więc $12 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^4$.

Wynik: $1,2 \cdot 10^4$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Zapisz w notacji wykładniczej: 0,00045 oraz 72 000 000.

- 2 Oblicz $(6 \cdot 10^8) : (3 \cdot 10^{-2})$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 43 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · POTĘGI

ZESTAWY A

1 Zapisz jako jedną potęgę liczby 2, 3 albo 5.



a) $4^3 \cdot 8$

b) $25^{-2} \cdot 125$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Oblicz.



a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b) $(3^4 \cdot 3^{-6})^{-1}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · PIERWIASTKI

ZESTAWY B

1 Oblicz albo uprość.



a) $\sqrt{48}$

b) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Usuń niewymierność z mianownika.



a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{4}{3 + \sqrt{5}}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · WYKŁADNIKI WYMIERNE I NOTACJA WYKŁADNICZA

ZESTAWY C

1 Oblicz albo zapisz jako potęgę podanej liczby.



a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ (potęga 5)

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zapisz wynik w notacji wykładniczej.



a) $(2 \cdot 10^{-3}) \cdot (7 \cdot 10^5)$ b) $(5 \cdot 10^3)^2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

Pełny trening (43 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach podstawowych z lat 2025–2026 potęgi i pierwiastki to zwykle 2–3 pierwsze zadania arkusza, wszystkie zamknięte za 1 punkt. Wartość wyrażenia z pierwiastkami, iloraz potęg o różnych podstawach, pierwiastek z pierwiastka (61% poprawnych odpowiedzi w maju 2026), pierwiastek trzeciego lub piątego stopnia z liczby ujemnej. Trudniejsze bywa zadanie prawda/fałsz łączące potęgi z podzielnością albo liczbą cyfr (39% w maju 2026). Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

7 zadań · 8 pkt · ok. 15 min

1



(0–1 pkt) Liczba $\sqrt{\frac{49}{2}} \cdot \sqrt{2} + 3^{-1}$ jest równa

A. $\frac{22}{3}$

B. 7

C. $\frac{10}{3}$

D. 4

2



(0–1 pkt) Liczba $\frac{3^{10} + 3^{11} + 3^{12}}{3^{10}}$ jest równa

A. 13

B. 3^{23}

C. 3^3

D. 9

3



(0–1 pkt) Liczba $\frac{8^{-3}}{16^{-2}}$ jest równa

A. 2^{-1}

B. 2

C. 2^{-17}

D. 2^{17}

4



(0–1 pkt) Liczba $\sqrt[3]{-24} \cdot \sqrt[3]{9}$ jest równa

A. –6

B. 6

C. –36

D. $\sqrt[3]{-15}$

5



(0–1 pkt) Liczba $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ jest równa

A. $3^{\frac{2}{3}}$

B. $3^{\frac{1}{3}}$

C. $3^{\frac{4}{3}}$

D. $3^{\frac{5}{3}}$

6 (0-1 pkt) Dana jest liczba $N = 2^{20} \cdot 5^{18}$. Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. Liczba N jest podzielna przez 40. P / F
2. Zapis dziesiętny liczby N ma 20 cyfr. P / F

7 (0-2 pkt) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{4}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{5}$. Zapisz obliczenia.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $2^3 + 2^4 = 2^7$.”

Wykładniki dodaje się przy *mnożeniu* potęg. Sumę liczy się wprost albo przez wyłączenie wspólnego czynnika: $2^3 + 2^4 = 2^3(1 + 2) = 24$.

× „ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.”

Nieprawda: $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7$. Pierwiastek rozkłada się tylko na iloczyn i iloraz.

× „ $2^{-3} = -8$.”

Ujemny wykładnik daje odwrotność, nie liczbę ujemną: $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

× „Pierwiastek z liczby ujemnej nie istnieje.”

Nie istnieje pierwiastek *parzystego* stopnia. $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-1} = -1$.

× „ $\sqrt{x^2} = x$.”

$\sqrt{x^2} = |x|$. Dla $x = -3$: $\sqrt{9} = 3 = |-3|$.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jak zapisać $\frac{1}{27}$ jako potęgę liczby 3?

3^{-3} .

2 Ile to $(-8)^{\frac{1}{3}}$... i czy wolno tak pisać?

$\sqrt[3]{-8} = -2$ istnieje, ale potęgę o wykładniku wymiernym definiujemy dla podstawy dodatniej. Pisz $\sqrt[3]{-8}$.

3 Przez co pomnożyć licznik i mianownik ułamka $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$?

Przez $\sqrt{3} - 1$: mianownik da $3 - 1 = 2$.

4 Co oznacza $a^{\frac{m}{n}}$?

$\sqrt[n]{a^m}$, dla $a > 0$.

5 Ile cyfr ma liczba $5 \cdot 10^{12}$?

13: piątka i dwanaście zer.

POTĘGI

$$a^m a^n = a^{m+n}, a^m : a^n = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0)$$

PIERWIASTKI

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}; \sqrt{a^2} = |a|$$

stopień nieparzysty: także z liczb ujemnych

$$\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b^2}$$

Prawa działań na potęgach i pierwiastkach są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (rozdział 2). Strategii „wspólnej podstawy” i usuwania niewymierności broszura nie podaje.

Dalej: logarytmy, czyli pytanie odwrotne do potęgowania (lekcja 1.3 Logarytmy), oraz procent składany, który jest po prostu potęgą (1.4 Procenty, procent składany, lokaty i kredyty).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $2^{5-3-(-1)} = 2^3$
2. $= 8$.
1. $9^4 = 3^8$
2. $3^8 \cdot 3^{-5} = 3^3 = 27$.
1. $2^{10} + 2^{11} = 2^9(2 + 4)$
2. $\frac{2^9 \cdot 6}{2^9} = 6$.

Zadania • część 2

1. $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{-27 \cdot 2} = -3\sqrt[3]{2}$.
1. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
2. $= 6\sqrt{2}$.
1. $\frac{3(\sqrt{7} - 2)}{7 - 4}$
2. $= \sqrt{7} - 2$.

Zadania • część 3

1. $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$
2. $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{9}$.
1. $5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$
2. $\left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{3}}$.
1. $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{2}}$
2. $= 3\sqrt{3}$.

Zadania • część 4

1. $0,00045 = 4,5 \cdot 10^{-4}$
2. $72\,000\,000 = 7,2 \cdot 10^7$.
1. $\frac{6}{3} = 2$, $10^{8-(-2)} = 10^{10}$
2. $= 2 \cdot 10^{10}$.

Zestawy A

- a) 2^9 b) 5^{-1}
- a) $\frac{9}{4}$ b) 9

Zestawy B

- a) $4\sqrt{3}$ b) $5\sqrt[3]{2}$

2. a) $3\sqrt{2}$ b) $3 - \sqrt{5}$

Zestawy C

1. a) 4 b) $5^{\frac{1}{2}}$

2. a) $1,4 \cdot 10^3$ b) $2,5 \cdot 10^7$

Zadania w stylu maturalnym

1. A.

1. $\sqrt{\frac{49}{2} \cdot 2} = \sqrt{49} = 7$

2. $7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$.

3. D to 3^{-1} policzone jak -3 .

2. A.

1. $3^{10}(1 + 3 + 9) : 3^{10} = 13$.

2. B to dodawanie wykładników przy sumie potęg.

3. A.

1. $8^{-3} = 2^{-9}$, $16^{-2} = 2^{-8}$

2. $2^{-9-(-8)} = 2^{-1}$.

4. A.

1. $\sqrt[3]{-24 \cdot 9} = \sqrt[3]{-216}$

2. $= -6$.

5. A.

1. $3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$

2. $\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{3}}$.

3. C to zapomniany pierwiastek zewnętrzny.

6. PF.

1. $N = 2^2 \cdot (2 \cdot 5)^{18} = 4 \cdot 10^{18}$.

2. $4 \cdot 10^{18} = 40 \cdot 10^{17}$; podzielna przez 40.

3. Czwórka i 18 zer: 19 cyfr.

7. 1. Usunięcie niewymierności.

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1.$$

2. Wynik. $\sqrt{5}+1 - \sqrt{5} = 1$.

1 pkt za zapisanie $\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1$ (albo za pomnożenie licznika i mianownika przez $\sqrt{5}+1$). 2 pkt za wynik 1.