

Działania, przedziały i wartość bezwzględna

Trzy narzędzia, bez których nie ruszy żadne zadanie maturalne: sprawne liczenie na ułamkach i pierwiastkach, zapis zbiorów liczb jako przedziałów i wartość bezwzględna rozumiana jako odległość na osi. Na egzaminie to zwykle kilka szybkich punktów w zadaniach zamkniętych, które łatwo stracić na jednym nawiasie.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 6
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: I.1,
I.6, I.7

W TEJ LEKCJI

- 0 Odległość zamiast znaku
- 1 Liczby i działania
- 2 Przedziały
- 3 Wartość bezwzględna
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Odległość zamiast znaku

Ile rozwiązań ma równanie $|x - 5| = 3$? Kto pamięta tylko „wartość bezwzględna usuwa minus”, ten zaczyna kombinować ze znakami. Kto wie, że $|x - 5|$ to **odległość liczby x od liczby 5 na osi**, ten widzi odpowiedź od razu: liczby odległe od 5 o 3 to 2 i 8. Dwa rozwiązania, ich suma to 10, iloczyn 16. Dokładnie o to pytają zadania zamknięte na maturze.

Ta lekcja to trzy rzeczy: liczenie bez błędów (kolejność działań, ułamki, pierwiastki), zapis zbiorów liczb jako przedziałów (bo w nich podaje się rozwiązania nierówności i odczyty z wykresów) oraz wartość bezwzględna jako odległość.

Liczby i działania

🔧 ZBIORY LICZB

$\mathbb{N}$: liczby naturalne $0, 1, 2, \dots$; $\mathbb{Z}$: całkowite $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$\mathbb{Q}$: wymierne, czyli dające się zapisać jako $\frac{p}{q}$ z całkowitymi $p, q \neq 0$ (np. $-\frac{3}{4}, 0, 2, 0,(3)$);

$\mathbb{R}$: rzeczywiste, czyli wszystkie punkty osi; liczby rzeczywiste, które nie są wymierne, to **niewymierne** (np. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$).

Kolejność działań: nawiasy, potęgi i pierwiastki, mnożenie i dzielenie (od lewej), dodawanie i odejmowanie (od lewej).

Na maturze działania rzadko są celem samym w sobie, ale błąd w ułamku albo w znaku potęgi przekreśla całe zadanie. Dwie rzeczy warto mieć w ręku na pamięć: $(-2)^2 = 4$, ale $-2^2 = -4$ (potęga wiąże mocniej niż minus), oraz dzielenie przez ułamek to mnożenie przez jego odwrotność.

Przykład 1.1

Ułamki i potęgi

Oblicz $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) : \frac{1}{4} + 0,5 \cdot (-2)^2$.

- 1 Nawias: $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.
- 2 Dzielenie: $\frac{1}{6} : \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$.
- 3 Potęga i mnożenie: $0,5 \cdot (-2)^2 = 0,5 \cdot 4 = 2$.

Wynik: $\frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.

Przykład 1.2

Działania na liczbach niewymiernych

Oblicz $(\sqrt{3} - 1)^2 + 2\sqrt{3}$.

- 1 Wzór $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: $(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$.
- 2 Dodaj: $4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4$.

Wynik: 4, czyli liczba wymierna, choć składniki były niewymierne.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 8 min

- 1 Oblicz $3 - 2 \cdot (1 - 4)^2 : 6$.

- 2 Oblicz $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{6}{5}$.

- 3 Które z liczb $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$, $\sqrt{3} + 1$, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, 2π są wymierne?

 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Przedziały

Rozwiązania nierówności, dziedziny i zbiory wartości funkcji podaje się jako przedziały. Nawias kwadratowy oznacza, że koniec należy do zbioru, okrągły, że nie należy. Przy nieskończoności zawsze stoi nawias okrągły.

🔑 ZAPIS PRZEDZIAŁÓW (JAK W ARKUSZU CKE)

$[a, b]: a \leq x \leq b;$ $(a, b): a < x < b;$ $[a, b): a \leq x < b;$ $(a, b]: a < x \leq b;$

$[a, +\infty): x \geq a;$ $(-\infty, b): x < b;$ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$

$A \cap B$ (część wspólna): liczby należące do *obu* zbiorów; $A \cup B$ (suma): do *któregokolwiek*; $A \setminus B$ (różnica): do A , ale nie do B .

Przykład 2.1

Część wspólna, suma, różnica

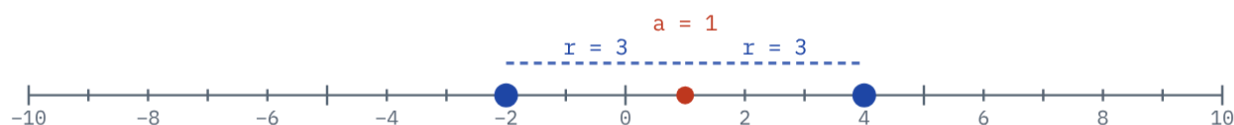
Dla $A = [-3, 4)$ i $B = (1, 6]$ wyznacz $A \cap B$, $A \cup B$ i $A \setminus B$.

- 1 Część wspólna: od większego początku do mniejszego końca, $(1, 4)$. Koniec 1 nie należy do B , a 4 nie należy do A , więc oba nawiasy są okrągłe.
- 2 Suma: przedziały na siebie zachodzą, więc to jeden przedział od -3 do 6 : $[-3, 6]$.
- 3 Różnica: z A usuwamy liczby większe od 1; sama 1 zostaje, bo nie należy do B : $[-3, 1]$.

Wynik: $A \cap B = (1, 4)$, $A \cup B = [-3, 6]$, $A \setminus B = [-3, 1]$.

SYMULACJA 1

Oś liczbowa w dwóch trybach. W trybie „przedziały A i B” ustaw końce i rodzaj nawiasów obu przedziałów i zobacz ich część wspólną i sumę. W trybie „ $|x - a| = r$ ” zobacz, które liczby są odległe od a o r . Sprawdź, co się dzieje dla $r = 0$ i dla $r < 0$.



— zbiór / rozwiązania — drugi zbiór — wynik działania

równanie $|x - 1| = 3$

rozwiązania $x = -2$ lub $x = 4$

$|x - 1| = 3$ pyta o liczby odległe od 1 o 3: jedna na lewo, druga na prawo. Suma rozwiązań to zawsze $2a = 2$.

Stan na rysunku: $|x - 1| = 3$; $x = -2$ lub $x = 4$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 8 min

1 Zapisz jako przedział zbiór liczb większych od -1 i nie większych od 3 .



2 Dla $A = (-\infty, 2]$ i $B = (-1, 5)$ wyznacz $A \cap B$ i $A \cup B$.



3 Ile liczb całkowitych należy do zbioru $[-2, 5) \cap (0, 7]$?



▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ to odległość x od zera, a $|a - b|$ to odległość liczb a i b na osi. Zawsze $|x| \geq 0$ i $|-x| = |x|$.

Równanie $|x - a| = r$: dla $r > 0$ dwa rozwiązania $x = a - r$ i $x = a + r$; dla $r = 0$ jedno, $x = a$; dla $r < 0$ brak rozwiązań.

Przy liczbach niewymiernych trzeba tylko ustalić znak wyrażenia pod modułem. Jeśli jest dodatnie, moduł nic nie zmienia; jeśli ujemne, zmienia znak całego wyrażenia: $|3 - \pi| = \pi - 3$, bo $3 - \pi < 0$.

Przykład 3.1

Moduł z pierwiastkiem

Oblicz $|\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} - 1|$.

- 1 $\sqrt{5} \approx 2,24$, więc $\sqrt{5} - 3 < 0$ i $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$.
- 2 $\sqrt{5} - 1 > 0$, więc $|\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$.
- 3 Suma: $3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 2$.

Wynik: 2. Na osi: to suma odległości $\sqrt{5}$ od 3 i od 1, czyli długość odcinka $[1, 3]$, bo $\sqrt{5}$ leży między nimi.

Przykład 3.2

Równanie z modułem

Rozwiąż równanie $|x + 4| = 7$ i oblicz sumę jego rozwiązań.

- 1 $|x + 4| = |x - (-4)|$: odległość x od -4 równa się 7.
- 2 $x = -4 - 7 = -11$ albo $x = -4 + 7 = 3$.

Wynik: $x = -11$ lub $x = 3$, suma -8 .

Skrót: rozwiązania leżą symetrycznie wokół -4 , więc ich suma to zawsze $2 \cdot (-4) = -8$. Sprawdzenie: $|-11 + 4| = 7 \checkmark$, $|3 + 4| = 7 \checkmark$.

Nierówności z modułem, np. $|x - 1| < 3$, czyta się tak samo: liczby odległe od 1 o mniej niż 3, czyli przedział $(-2, 4)$. Na poziomie podstawowym w zadaniach są tylko równania; nierówności z modułem rozwiązujemy w lekcji rozszerzonej 3.5 Równania i nierówności z wartością bezwzględną.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 10 min

- 1 Rozwiąż równanie $|2x - 1| = 5$.



- 2 Zapisz bez modułu: $|\pi - 4|$ i $|2 - \sqrt{3}|$.



- 3 Oblicz $|\sqrt{7} - 3| - |2 - \sqrt{7}|$.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 42 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · LICZENIE

ZESTAWY A

1 Oblicz.



a) $(-2)^3 + 3 \cdot (-1)^5$ b) $(1 - \frac{1}{3}) : (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zapisz bez wartości bezwzględnej i uprość.



a) $|1 - \sqrt{3}|$ b) $|2 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 3|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · PRZEDZIAŁY

ZESTAWY B

1 Zapisz zbiór jako przedział.



a) $-1 \leq x < 4$ b) $2 < x \leq 7$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz $A \cap B$ i $A \cup B$.



a) $A = [-3, 4), B = (1, 6]$ b) $A = [0, 3], B = [3, 8)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · RÓWNANIA Z MODUŁEM I NIERÓWNOŚCI LINIOWE

ZESTAWY C

1 Rozwiąż równanie.



a) $|x - 4| = 3$ b) $|2x - 1| = 7$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Rozwiąż nierówność i zapisz zbiór rozwiązań jako przedział.



a) $5 - 3(1 - x) \geq x - 8$ b) $\frac{x-1}{2} > x + 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

Pełny trening (42 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach podstawowych z lat 2025–2026 tematy tej lekcji to zwykle 2–3 zadania zamknięte za 1 punkt: suma lub iloczyn rozwiązań równania z modułem, wartość wyrażenia z modułem i pierwiastkiem, rysunek zbioru rozwiązań nierówności na osi. Przedziały wracają w zadaniach z wykresem funkcji, gdzie trzeba je wpisać samodzielnie, a punkt jest tylko wtedy, gdy nawiasy jednoznacznie pokazują, czy koniec należy do zbioru. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

6 zadań · 7 pkt · ok. 12 min

1 (0–1 pkt) Suma wszystkich rozwiązań równania $|x - 3| = 5$ jest równa



A. 6 B. -6 C. 10 D. 0

2 (0–1 pkt) Liczba $|\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} - 3|$ jest równa



A. $5 - 2\sqrt{3}$ B. -1 C. 1 D. $2\sqrt{3} - 5$

3 (0–1 pkt) Iloczyn wszystkich rozwiązań równania $|x + 2| = 6$ jest równy



A. -32 B. 32 C. -4 D. 12

4 (0–1 pkt) Dane są zbiory $A = [-2, 3]$ i $B = (1, 5]$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.



Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. $A \cap B = (1, 3)$. P / F

2. $A \cup B = [-2, 5]$. P / F

5 (0–1 pkt) Dane są zbiory $A = [-4, 2]$ i $B = (-1, 6]$. Uzupełnij zdanie. Do zbioru $A \cap B$ należy dokładnie liczb całkowitych.



6 (0-2 pkt) Oblicz wartość wyrażenia $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) + |2 - \sqrt{5}|$. Zapisz obliczenia.

podstawowe średnie trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

× „ $|\sqrt{5} - 3| = \sqrt{5} - 3$, bo moduł tylko usuwa minus przed liczbą.”

Moduł zmienia znak całego wyrażenia, gdy jest ono ujemne: $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$.
Najpierw ustal znak.

× „ $|x| = -3$ ma rozwiązanie $x = -3$.”

Odległość nie jest ujemna: to równanie nie ma rozwiązań. Sprawdzenie: $|-3| = 3 \neq -3$.

× „ $-2^2 = 4$.”

Potęga wiąże mocniej niż minus: $-2^2 = -(2^2) = -4$. Tylko $(-2)^2 = 4$.

× „Przy nieskończoności piszę nawias kwadratowy, bo przedział jest domknięty.”

Nieskończoność nie jest liczbą i nie należy do zbioru: zawsze $(-\infty$ i $+\infty)$.

× „Część wspólna zawiera koniec, jeśli należy do któregoś zbioru.”

Do części wspólnej koniec należy tylko wtedy, gdy należy do *obu* zbiorów. To suma bierze końce z któregośkolwiek.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co oznacza $|a - b|$ na osi liczbowej?

Odległość między liczbami a i b .

2 Ile rozwiązań ma $|x - a| = r$ dla $r > 0$, $r = 0$ i $r < 0$?

Dwa $(a \pm r)$, jedno (a) i żadnego.

3 Jaka jest suma rozwiązań równania $|x - a| = r$ dla $r > 0$?

2a: rozwiązania leżą symetrycznie wokół a .

4 Jak zapisać „ x jest większe od -2 i nie większe od 7 ”?

$(-2, 7]$.

5 Kiedy koniec przedziału należy do $A \cap B$?

Gdy należy do obu zbiorów.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$$|x| = x \text{ dla } x \geq 0, |x| = -x \text{ dla } x < 0$$

$$|a - b|: \text{odległość } a \text{ i } b$$

$$|x - a| = r, r > 0: x = a \pm r$$

PRZEDZIAŁY

[]: koniec należy, (): nie należy

$A \cap B$: oba zbiory; $A \cup B$: którykolwiek

przy $\pm\infty$ zawsze nawias okrągły

Definicja wartości bezwzględnej i jej interpretacja na osi są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” (rozdział 1). Zapisu przedziałów i działań na zbiorach broszura nie tłumaczy: to trzeba umieć.

Dalej: potęgi i pierwiastki (lekcja 1.2 Potęgi i pierwiastki), a przedziały w praktyce: nierówności liniowe (3.1 Równania i nierówności liniowe, przekształcenia równoważne) i odczytywanie własności funkcji z wykresu (5.1 Funkcja i jej wykres: odczytywanie własności).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. 1. $(1 - 4)^2 = 9$
2. $2 \cdot 9 : 6 = 3$
3. $3 - 3 = 0$.
2. 1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
2. $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$.
3. 1. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$: wymierna.
2. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$: wymierna.
3. $\sqrt{3} + 1$ i 2π są niewymierne.

Zadania • część 2

1. $(-1, 3]$: „większe” to bez -1 , „nie większe” to razem z 3 .
2. 1. $A \cap B = (-1, 2]$
2. $A \cup B = (-\infty, 5)$.
3. 1. Część wspólna: $(0, 5)$.
2. Liczby całkowite: $1, 2, 3, 4$, czyli cztery.

Zadania • część 3

1. 1. $2x - 1 = 5$ albo $2x - 1 = -5$
2. $x = 3$ albo $x = -2$.
2. 1. $\pi < 4$, więc $|\pi - 4| = 4 - \pi$.
2. $\sqrt{3} < 2$, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.
3. 1. $|\sqrt{7} - 3| = 3 - \sqrt{7}$
2. $|2 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 2$
3. $3 - \sqrt{7} - (\sqrt{7} - 2) = 5 - 2\sqrt{7}$.

Zestawy A

1. a) -11 b) 2
2. a) $\sqrt{3} - 1$ b) 1

Zestawy B

1. a) $[-1, 4)$ b) $(2, 7]$
2. a) $(1, 4)$; $[-3, 6]$ b) $\{3\}$; $[0, 8)$

Zestawy C

1. a) $x = 1$ lub $x = 7$ b) $x = -3$ lub $x = 4$
2. a) $[-5, +\infty)$ b) $(-\infty, -3)$

Zadania w stylu maturalnym

1. A.

1. Rozwiązania $3 - 5 = -2$ i $3 + 5 = 8$.
2. Suma $6 = 2 \cdot 3$.

2. A.

1. Oba wyrażenia pod modulem są ujemne.
2. $(2 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3}$.
3. D to wynik bez zmiany znaków.

3. A.

1. Rozwiązania $-2 - 6 = -8$ i $-2 + 6 = 4$.
2. Iloczyn -32 .

4. PF.

1. Część wspólna: od 1 (bez, bo $1 \notin B$) do 3 (bez, bo $3 \notin A$).
2. Suma kończy się w 5 razem z 5, bo $5 \in B$: $A \cup B = [-2, 5]$.

5. 2

1. $A \cap B = (-1, 2)$.
2. Liczby całkowite: 0 i 1.

6. 1. Iloczyn. $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$.

2. Moduł. $\sqrt{5} > 2$, więc $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.

3. Wynik. $1 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - 1$.

1 pkt za iloczyn równy 1 ALBO za $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$. 2 pkt za wynik $\sqrt{5} - 1$.

Matura z matematyki · Lekcja 1.1: Działania, przedziały i wartość bezwzględna · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań według arkuszy i zasad oceniania CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt1_1.py).