

Rachunek wariacyjny

Zwykła analiza szuka punktu, w którym funkcja jest najmniejsza. Rachunek wariacyjny szuka całej *funkcji*, dla której najmniejsza jest pewna całka: długość drogi, czas zjazdu, pole powierzchni, działanie. Warunek „pochodna równa zero” zamienia się w równanie różniczkowe Eulera–Lagrange’a. Z niego wynikają: prosta jako najkrótsza droga, cycloida jako najszybsza zjeżdżalnia, prawo Snelliusa i cała mechanika Newtona.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, wyd. 3, rozdz. 9; *Feynmana wykłady z fizyki*, t. II, rozdz. 19

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: najszybsza zjeżdżalnia
- 1 Funkcjonały i wariacje
- 2 Równanie Eulera–Lagrange’a
- 3 Brachistochrona i zasada Fermata
- 4 Zasada najmniejszego działania
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: najszybsza zjeżdżalnia

W 1696 roku Johann Bernoulli zadał matematykom Europy zadanie: koralik zsuwa się bez tarcia po drucie z punktu A do niżej położonego punktu B . Jaki kształt drutu daje najkrótszy czas? Prosta jest najkrótsza, ale na początku koralik jedzie po niej wolno. Stromy początek szybko nadaje prędkość, ale wydłuża drogę. Optimum leży gdzieś pomiędzy.

Nie szukamy tu liczby x , tylko krzywej $y(x)$, czyli nieskończenie wielu liczb naraz. Czas zjazdu to całka zależna od całej krzywej. Ta lekcja pokazuje, jak taki problem zamienić w równanie różniczkowe.

Pytanie na start. Zjazd z $A = (0; 0)$ do $B = (\pi; 2)$ m (oś y w dół). Po prostej trwa 1,19 s. Czy da się zjechać szybciej niż w 1,10 s? Odpowiedź w przykładzie 3.1.

Funkcjonały i wariacje

Funkcjonał przyporządkowuje liczbę całej funkcji. Najważniejsze funkcyjonały mają postać całki:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Przykład: długość wykresu, $F = \sqrt{1 + y'^2}$ (lekcja 1.5 Całki). Szukamy funkcji y , dla której J jest najmniejsze (albo stacjonarne), wśród funkcji o zadanych końcach.

WARIACJA: SPROWADZENIE DO JEDNEJ ZMIENNEJ

Niech y będzie szukaną funkcją, a $\eta(x)$ dowolną gładką funkcją z $\eta(a) = \eta(b) = 0$ (końce się nie ruszają). Porównujemy y z rodziną $y + \varepsilon\eta$. Wtedy $J(\varepsilon) = J[y + \varepsilon\eta]$ jest zwykłą funkcją jednej zmiennej ε , a warunek ekstremum to

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{dla każdego } \eta.$$

Wyrażenie $\delta J = \varepsilon \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_0$ to **pierwsza wariacja**; funkcję y , dla której $\delta J = 0$ dla każdego η , nazywamy **stacjonarną** (albo **ekstremalą**). Tak jak w lekcji 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych: zerowanie pochodnej to warunek konieczny, a nie dostateczny. por. Boas §9.2

Przykład 1.1

Prosta jest najkrótsza: test na rodzinie krzywych

Z $(0; 0)$ do $(1; 1)$ porównaj prostą $y = x$ z krzywymi $y = x + \varepsilon \sin \pi x$.

- 1 $y' = 1 + \varepsilon \pi \cos \pi x$, więc $J(\varepsilon) = \int_0^1 \sqrt{2 + 2\varepsilon \pi \cos \pi x + \varepsilon^2 \pi^2 \cos^2 \pi x} dx$.
- 2 Rozwinięcie Taylora pierwiastka (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce) do ε^2 :
 $J \approx \sqrt{2} \int_0^1 \left(1 + \frac{\varepsilon \pi}{2} \cos \pi x + \frac{\varepsilon^2 \pi^2}{8} \cos^2 \pi x\right) dx$.
- 3 $\int_0^1 \cos \pi x dx = 0$, $\int_0^1 \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{2}$. Zatem $J(\varepsilon) \approx \sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \varepsilon^2\right)$.

Wynik: wyraz liniowy w ε znika, a kwadratowy jest dodatni: prosta jest stacjonarna i (w tej rodzinie) daje minimum $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

Sprawdzenie: całkowanie numeryczne dla $\varepsilon = 0,1$ daje 1,42306, a przybliżenie 1,42294 ✓. Dla $\varepsilon = 0,3$ różnica rośnie (1,5013 wobec 1,4927), bo zaniedbaliśmy wyrazy rzędu ε^4 (wyraz z ε^3 znika z symetrii: $J(-\varepsilon) = J(\varepsilon)$).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Oblicz długość paraboli $y = x^2$ od $(0; 0)$ do $(1; 1)$ i porównaj z $\sqrt{2}$.

- 2 Dla $J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, oblicz J dla $y = x^n$. Które n daje najmniej?

- 3 Pokaż, że dla tego samego J i $y = x + \varepsilon \eta$ (z $\eta(0) = \eta(1) = 0$) zachodzi dokładnie $J(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \int_0^1 \eta'^2 dx$. Co to mówi o prostej?

- 4 Rozgrzewka z jedną zmienną: promień światła biegnie z $A = (0; 1)$ do lustra $y = 0$ i odbija się do $B = (2; 1)$. W którym punkcie $(x; 0)$ droga jest najkrótsza? Jakie prawo stąd wynika?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Równanie Eulera–Lagrange’a

Różniczkujemy $J(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx$ pod całką:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}\Big|_0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx.$$

W drugim kroku całkowaliśmy przez części drugi składnik; wyraz brzegowy $\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_a^b$ znika, bo $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Całka ma być zerem dla *każdego* η , a to możliwe tylko wtedy, gdy nawias jest zerem w każdym punkcie (lemat podstawowy rachunku wariacyjnego: gdyby ciągły nawias był w jakimś punkcie dodatni, wybralibyśmy $\eta \geq 0$ niezerowe tylko w małym otoczeniu tego punktu i całka wyszłaby dodatnia).

🔧 RÓWNANIE EULERA-LAGRANGE'A

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Na ogół jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu (lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne); dwa warunki brzegowe $y(a)$, $y(b)$ wyznaczają stałe. Dwa przypadki szczególne dają od razu pierwszą całkę:

- F nie zależy od y : $\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$
- F nie zależy od x (**tożsamość Beltramiego**): $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$

Więzy całkowe. Jeśli dodatkowo $K[y] = \int G dx$ ma mieć zadaną wartość (np. stałą długość), stosujemy mnożnik Lagrange'a jak w lekcji 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych: piszemy równanie Eulera-Lagrange'a dla $F - \lambda G$ i dobieramy λ z warunku więzów. por. Boas §9.2-9.6

Tożsamość Beltramiego sprawdza się różniczkowaniem (wyraz F_x znika, bo F nie zależy od x): $\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - y' \frac{d}{dx} F_{y'} = -y' \left(\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y \right) = 0$. W mechanice ta sama tożsamość to zasada zachowania energii (część 4).

Przykład 2.1

Błona mydlana między dwoma pierścieniami

Dwa współosiowe pierścienie o promieniu R leżą w płaszczyznach $x = \pm 1$. Błona mydlana przyjmuje kształt powierzchni obrotowej $y(x)$ o najmniejszym polu. Znajdź ten kształt.

- 1 Pole powierzchni obrotowej: $A = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+y'^2} dx$, więc $F = y \sqrt{1+y'^2}$ nie zależy od x .
- 2 Beltrami: $y \sqrt{1+y'^2} - y' \cdot \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c$.
- 3 Stąd $y' = \pm \sqrt{y^2/c^2 - 1}$, a całkowanie ($\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \operatorname{arccosh} \frac{y}{c}$, lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne) daje $y = c \cosh \frac{x-x_0}{c}$; z symetrii $x_0 = 0$.
- 4 Warunek brzegowy: $R = c \cosh \frac{1}{c}$. Dla $R = 2$ ma on dwa rozwiązania: $c \approx 1,697$ i $c \approx 0,470$.

Wynik: katenoida $y = c \cosh(x/c)$. Dla $R = 2$ płytsza ($c \approx 1,697$) ma pole $\approx 23,97$, głębsza ($c \approx 0,470$) $\approx 27,38$.

Sprawdzenie: dwa osobne krążki zamykające pierścienie mają pole $2\pi R^2 \approx 25,13$, więcej niż płytsza katenoida, a mniej niż głębsza $\checkmark$. Głębsza katenoida jest stacjonarna, ale nie jest minimum: równanie Eulera-Lagrange'a nie odróżnia minimum od innych funkcji stacjonarnych.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Zapisz równanie Eulera-Lagrange'a dla $F = y'^2 + y^2$ i rozwiąż je z $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
Oblicz J dla rozwiązania i porównaj z J dla $y = x$.
- 2 Pokaż, że dla $F = \sqrt{1+y'^2}$ (długość) z równania Eulera-Lagrange'a wynika prosta.
- 3 Znajdź ekstremalę funkcjonału $\int_1^e xy'^2 dx$ z $y(1) = 0$, $y(e) = 1$.
- 4 W przykładzie 2.1 zbadaj, dla jakich R równanie $R = c \cosh(1/c)$ ma rozwiązanie. Co się dzieje z błoną, gdy rozsuwamy pierścienie (czyli zmniejszamy R w stosunku do odstępów)?

- 5 Problem Dydony: krzywa o zadanej długości ℓ zaczyna się i kończy na osi x . Końce mogą leżeć w dowolnych miejscach osi x . Jaki kształt ogranicza największe pole $\int y \, dx$?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 Brachistochrona i zasada Fermata

Wróćmy do Bernoulliego. Oś y kierujemy w dół. Koralik startujący z $y = 0$ ma na wysokości y prędkość $v = \sqrt{2gy}$ (zasada zachowania energii, Dział 2: Energia). Na odcinku łuku $ds = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$ spędza czas ds/v , więc

$$T[y] = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} \, dx.$$

Przykład 3.1

Brachistochrona

Znajdź krzywą najszybszego zjazdu z $A = (0; 0)$ do $B = (\pi; 2)$ m i porównaj czas z prostą.

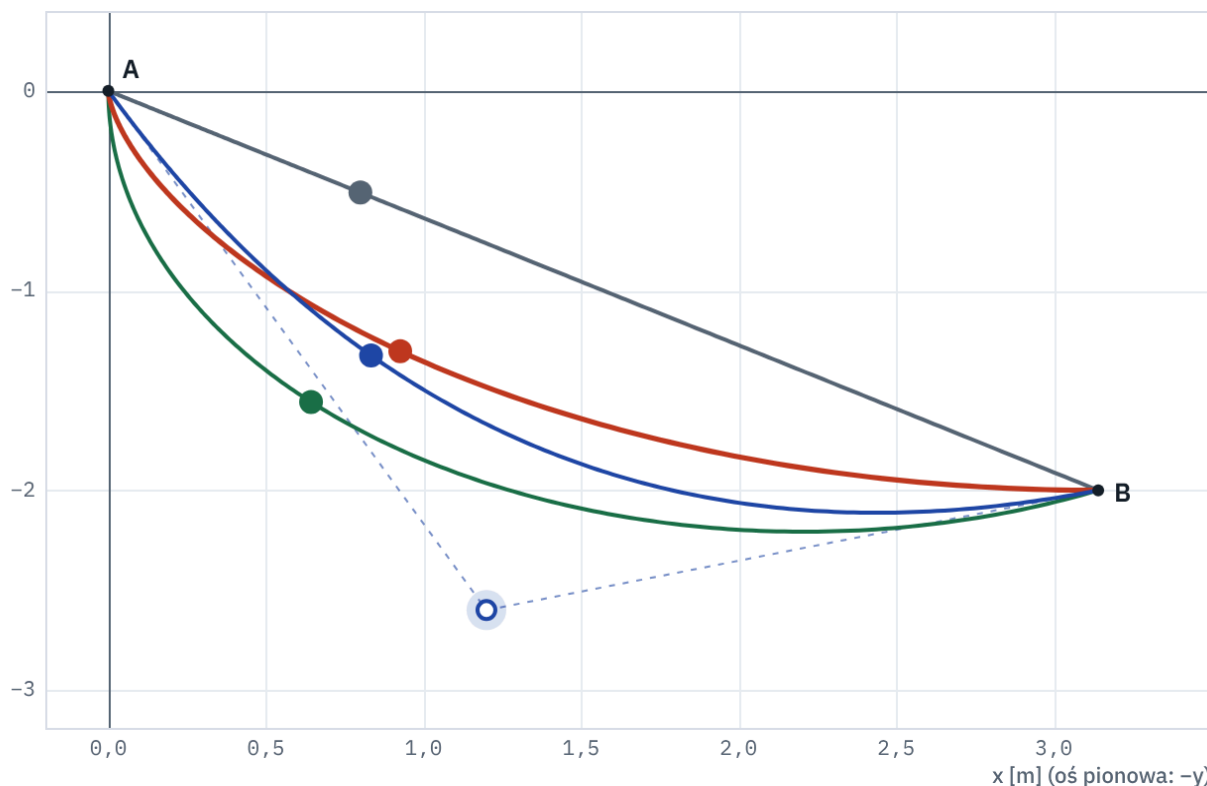
- 1 $F = \sqrt{(1 + y'^2)/y}$ (stały czynnik $1/\sqrt{2g}$ pomijamy) nie zależy od x . Beltrami: $F - y' F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{const}$, czyli $y(1 + y'^2) = 2r$.
- 2 Rozwiązaniem jest **cykloida** $x = r(\theta - \sin \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$, tor punktu obręczy toczącego się koła. Sprawdzenie: $y' = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$, $1 + y'^2 = \frac{2}{1 - \cos \theta}$, więc $y(1 + y'^2) = 2r \checkmark$.
- 3 Punkt $B = (\pi; 2)$ odpowiada $\theta = \pi$ i $r = 1$ m, bo $\frac{x_B}{y_B} = \frac{\pi}{2} = \frac{\theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta}$ daje $\theta = \pi$. Wzdłuż cykloidy $ds = 2r \sin \frac{\theta}{2} \, d\theta$, $v = 2\sqrt{gr} \sin \frac{\theta}{2}$, więc $dt = \sqrt{r/g} \, d\theta$ i $T = \pi \sqrt{r/g} \approx 1,003$ s.
- 4 Prosta: długość $\sqrt{\pi^2 + 4} \approx 3,724$ m, przyspieszenie $g \cdot \frac{2}{3,724}$, czas $\sqrt{2L/a} \approx 1,189$ s.

Wynik: cykloida, $T \approx 1,003$ s wobec 1,189 s po prostej: o 16% krócej.

Sprawdzenie: całkowanie numeryczne $T[y]$ wzdłuż cykloidy daje 1,00303 s $\checkmark$. Łuk okręgu przez A i B o pionowej stycznej w A (w duchu Galileusza) daje 1,028 s: lepiej niż prosta, gorzej niż cykloida $\checkmark$.

SYMULACJA 1

Wyścig koralików z $A = (0; 0)$ do $B = (\pi; 2)$ m: prosta, łuk okręgu, cykloida i Twoja krzywa (parabola Béziera, której punkt kontrolny przeciągasz). Uruchom wyścig przyciskiem odtwarzania. Odczyt podaje czasy zjazdu. Spróbuj pobić cykloidę: to niemożliwe, ale da się do niej zbliżyć.



— prosta — łuk okręgu — cykloida — Twoja krzywa

prosta 1,189 s

łuk okręgu 1,028 s

cykloida 1,003 s

Twoja krzywa 1,021 s

Twoja krzywa bije prostą o 168 ms, ale cykloida jest jeszcze o 18 ms szybsza. Spróbuj bardziej stromego startu.

Stan na rysunku: $t = 0,600$ s; punkt kontrolny $(1,20; 2,60)$; czasy: prosta 1,189 s, łuk 1,028 s, cykloida 1,003 s, Twoja 1,021 s.

Zasada Fermata. Światło biegnie między dwoma punktami po drodze, której czas przebycia jest stacjonarny. W ośrodku o współczynniku załamania n prędkość światła to c/n , więc szukamy krzywej stacjonarnej dla $\int n ds$. Jeśli n zależy tylko od y , Beltrami daje $\frac{n}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$, czyli

$$n(y) \sin \theta = \text{const},$$

gdzie θ to kąt promienia z osią y . Przy skokowej zmianie n to prawo Snelliusa $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ (Dział 12: Optyka: zasada najmniejszego czasu, interferencja, dyfrakcja). Bernoulli rozwiązał swoje zadanie właśnie tak: brachistochrona to promień światła w ośrodku z $n \propto 1/\sqrt{y}$.

FLP I-26-3

- 1 Światło przechodzi z powietrza ($n_1 = 1$) do szkła ($n_2 = 1,5$) pod kątem 30° do normalnej. Wyprowadź prawo Snelliusa z minimum czasu dla promienia $A = (0; h_1) \rightarrow (x; 0) \rightarrow B = (d; -h_2)$ i oblicz kąt załamania.
- 2 Inna droga z $A = (0; 0)$ do $B = (\pi; 2)$ m: najpierw spadek pionowo o 2 m, potem jazda poziomo (zakładamy, że zakręt nie zabiera energii). Oblicz czas. Porównaj z prostą i cykloidą.
- 3 Tautochrone. Koralek puszczony z dowolnego punktu cykloidy z przykładu 3.1 zjeżdża do najniższego punktu. Pokaż, że czas zawsze wynosi $\pi\sqrt{r/g}$.
- 4 Nad rozgrzany asfalter powietrze jest najcieplejsze przy ziemi, więc tam ma najmniejsze n . Korzystając z $n(y) \sin \theta = \text{const}$, wyjaśnij, dlaczego widać „kałuże” (miraż dolny).

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Zasada najmniejszego działania

Ten sam rachunek opisuje mechanikę. Zmienną niezależną jest czas t , funkcją położenie $x(t)$, a funkcjonałem działanie:

🔧 ZASADA HAMILTONA

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt, \quad L = E_k - E_p.$$

Spośród ruchów z zadanymi $x(t_1)$ i $x(t_2)$ rzeczywisty jest ten, dla którego $\delta S = 0$. Równanie Eulera-Lagrange'a $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$ dla $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ daje $m\ddot{x} = -V'(x)$: drugą zasadę dynamiki. Jeśli L nie zależy od t , Beltrami daje stałość wielkości $\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = E_k + E_p$, czyli zachowanie energii. (FLP II-19)

Zaletą tej postaci: L można zapisać w dowolnych współrzędnych (kącie, długość łuku), a równanie Eulera-Lagrange'a ma w każdym układzie współrzędnych tę samą postać. Nie trzeba rozkładać sił ani znać sił reakcji więzów.

Przykład 4.1

Oscylator i znak drugiej wariacji

Oscylator $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$ ($m = k = 1$), ruch od $x(0) = 1$ do $x(T) = \cos T$. Wyprowadź równanie ruchu i sprawdź, czy działanie jest minimalne.

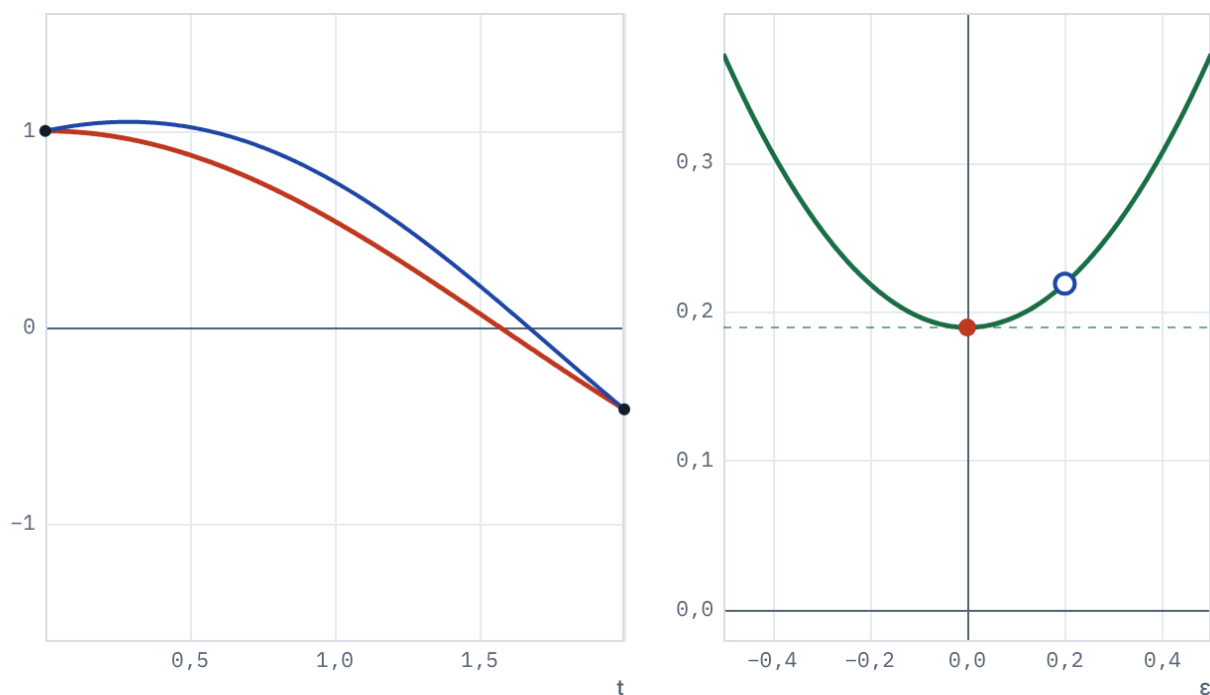
- 1 Euler-Lagrange: $\ddot{x} = -x$; rozwiązanie spełniające warunki brzegowe to $x = \cos t$.
- 2 Zaburzenie $\eta = \sin \frac{n\pi t}{T}$ znika na końcach. Ponieważ L jest kwadratowe, a wyraz liniowy znika (bo $x = \cos t$ spełnia równanie Eulera-Lagrange'a), $S[\cos t + \varepsilon\eta] = S[\cos t] + \varepsilon \cdot 0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T (\dot{\eta}^2 - \eta^2) dt$.
- 3 $\int_0^T \dot{\eta}^2 = \frac{T}{2} \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2$, $\int_0^T \eta^2 = \frac{T}{2}$, więc $\Delta S = \varepsilon^2 \frac{T}{4} \left(\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - 1\right)$.

Wynik: dla $T < \pi$ każde zaburzenie zwiększa S (każde η jest sumą takich sinusów, a wyrazy mieszane całkują się do zera): minimum. Dla $T > \pi$ zaburzenie z $n = 1$ zmniejsza S : rzeczywisty ruch jest punktem siodłowym działania.

Sprawdzenie: numerycznie dla $\varepsilon = 0,2$: $T = 2$, $n = 1$ daje $\Delta S = +0,0293$, a $T = 4$, $n = 1$ daje $-0,0153$; oba zgodne ze wzorem ✓. Nazwa „najmniejsze działanie” jest więc nieściśła: fizyka wymaga tylko $\delta S = 0$.

SYMULACJA 2

Działanie oscylatora dla ruchów $x(t) = \cos t + \varepsilon \sin(n\pi t/T)$. Pierwszy wykres: rzeczywisty ruch i ruch zaburzony; drugi: $S(\varepsilon)$. Zmieniaj czas trwania T i numer zaburzenia n . Dla $T < n\pi$ parabola $S(\varepsilon)$ ma minimum w zerze, dla $T > n\pi$ maksimum, a w obu przypadkach jej nachylenie w $\varepsilon = 0$ jest zerowe.



— ruch rzeczywisty $x = \cos t$ — ruch zaburzony — $S(\varepsilon)$

S (rzeczywisty) 0,1892

S (zaburzony) 0,2185

ΔS 0,0293

$n\pi / T$ 1,571

$T < \pi$: każde zaburzenie zwiększa działanie. Rzeczywisty ruch jest minimum, a $S(\varepsilon)$ to parabola z wierzchołkiem w $\varepsilon = 0$.

Stan na rysunku: $T = 2,00$, $n = 1$, $\varepsilon = 0,20$; $S = 0,1892$, S zaburzone = 0,2185, $\Delta S = 0,0293$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 40 min

1 Ciało rzucone pionowo: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$. Wyprowadź równanie ruchu.

2 Wahadło matematyczne: masa m na nici o długości l , kąt θ od pionu. Zapisz L i wyprowadź równanie ruchu.

3 Swobodna cząstka ($L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$) jedzie ze stałą prędkością v w czasie T . Oblicz, o ile wzrośnie działanie dla ruchu $x = vt + \varepsilon \sin(\pi t/T)$.

- 4 Pokaż, że dla $L(x, \dot{x})$ niezależnego od czasu wielkość $E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$ jest stała. Oblicz E dla $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$.

- 5 W przykładzie 4.1 przyjmij $T = 7$. Dla których n zaburzenie zmniejsza działanie? Sprawdź w symulacji 2. Co się dzieje przy $T = \pi$?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Równanie Eulera–Lagrange’a daje minimum.”

Daje funkcje stacjonarne: minimum, maksimum albo siodło. Głębsza katenoida (przykład 2.1) i ruch oscylatora dłuższy niż pół okresu (przykład 4.1) nie są minimami.

× „Ciało »wie«, jaki ruch minimalizuje działanie, i wybiera go z góry.”

Warunek $\delta S = 0$ jest równoważny lokalnemu równaniu ruchu w każdej chwili. To ta sama fizyka zapisana inaczej, a nie przewidywanie przyszłości.

× „Najkrótsza droga jest najszybsza.”

Tylko przy stałej prędkości. Przy zmiennej (koralik, światło w ośrodku niejednorodnym) opłaca się wydłużyć drogę, żeby szybciej jechać.

× „Wariacja δy to to samo co różniczka $dy = y' dx$.”

dy to zmiana y przy przesunięciu x wzdłuż tej samej krzywej. $\delta y = \varepsilon \eta(x)$ to zmiana przy stałym x : przejście do sąsiedniej krzywej. Na końcach $\delta y = 0$ i dlatego znika wyraz brzegowy z całkowania przez części.

6 Sprawdź się

1 Co to jest funkcjonal?

Przyporządkowanie liczby funkcji, np. $J[y] = \int F(x, y, y') dx$.

- 2 Zapisz równanie Eulera-Lagrange'a.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

- 3 Jaką pierwszą całkę daje F niezależne od x ?

Beltrami: $F - y' F_{y'} = \text{const.}$

- 4 Jaki kształt ma brachistochrona?

Cykloida.

- 5 Jak uwzględnić więź $\int G dx = \text{const}$?

Równanie Eulera-Lagrange'a dla $F - \lambda G$ z mnożnikiem Lagrange'a λ .

- 6 Czym jest lagranżjan w mechanice?

$L = E_k - E_p$; ruch rzeczywisty spełnia $\delta \int L dt = 0$.

- 7 Jakie prawo zachowania wynika z L niezależnego od czasu?

Zachowanie energii.

RACHUNEK WARIACYJNY

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad J(\varepsilon) = J[y + \varepsilon\eta], \\ \eta(a) = \eta(b) = 0$$

$$\text{E-L: } \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$$

$$F_y = 0 \rightarrow F_{y'} = \text{const}; \quad F_x = 0 \rightarrow F - y' F_{y'} = \text{const}$$

$$\text{więzy } \int G = \text{const: E-L dla } F - \lambda G$$

ZASTOSOWANIA

$$\text{długość } \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow \text{prosta}; \quad y \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow c \cosh \frac{x-x_0}{c}$$

$$\text{brachistochrona: } y(1 + y'^2) = 2r; \quad x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta); \quad T = \theta_B \sqrt{r/g}$$

$$\text{Fermat: } \delta \int n ds = 0; \quad n \sin \theta = \text{const}$$

$$\text{mechanika: } L = E_k - E_p; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}; \\ E = \dot{x} L_{\dot{x}} - L$$

Do przeczytania

- **M. L. Boas**, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, wyd. 3, rozdz. 9: rachunek wariacyjny z wieloma zadaniami z fizyki (geodezyjne, Fermat, Lagrange, więzy).
- *Feynmana wykłady z fizyki*, t. II, rozdz. 19 „Zasada najmniejszego działania”: zapis wykładu Feynmana; t. I, rozdz. 26: zasada Fermata.

W automatyce funkcjonal to koszt sterowania: regulator LQR minimalizuje $\int (x^T Q x + u^T R u) dt$ (4.3 LQR: koszt zamiast biegunów), a zasada maksimum Pontriagina to rachunek wariacyjny z ograniczeniami na sterowanie (5.1 Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasooptymalne i metoda strzałów). Następna lekcja, 6.2 Metody numeryczne: Python i C++, pokaże, jak równania ruchu z tej lekcji rozwiązywać numerycznie.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh} 2}{4} \approx 1,4789$, o 4,6% więcej niż $\sqrt{2} \approx 1,4142$.
2. $J = \frac{n^2}{2n-1}$; $1; \frac{4}{3}; 1,8$ dla $n = 1, 2, 3$. Minimum w tej rodzinie: $n = 1$, czyli prosta.
3. $J = \int (1 + \varepsilon \eta')^2 = 1 + 2\varepsilon \int_0^1 \eta' + \varepsilon^2 \int \eta'^2$, a $\int_0^1 \eta' = \eta(1) - \eta(0) = 0$. Każde zaburzenie zwiększa J , więc prosta daje globalne minimum.
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(2-x)^2 + 1}$, $f'(x) = 0$ dla $x = 1$; droga $2\sqrt{2}$. Ogólnie $f' = 0$ oznacza równość cosinusów kątów z lustrem, czyli kąt padania równy kątowi odbicia (Heron z Aleksandrii).

Zadania · część 2

1. $2y'' - 2y = 0$, więc $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$. $J = y(1)y'(1) = \coth 1 \approx 1,3130$; dla $y = x$: $1 + \frac{1}{3} \approx 1,3333$. Rozwiązanie wygrywa.
2. F nie zależy od y , więc $F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \text{const}$, czyli $y' = \text{const}$: prosta.
3. F nie zależy od y : $2xy' = C$, $y = \frac{C}{2} \ln x + D$. Z warunków brzegowych $y = \ln x$.
4. $f'(c) = 0$ daje $\coth u = u$, $u \approx 1,1997$, $c \approx 0,8336$, $R_{\min} = f(c) \approx 1,509$. Dla $R < 1,509$ (pierścienie dalej niż ok. $1,33R$ od siebie) katenoidy nie ma: błona pęka i zostają dwa płaskie krążki (rozwiązanie Goldschmidta). Już od odstępu ok. $1,06R$ dwa krążki mają mniejsze pole, ale katenoida pozostaje minimum lokalnym aż do $1,33R$.
5. Beltrami: $y - \lambda\sqrt{1+y'^2} + \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C$. Stąd $(y-C)^2(1+y'^2) = \lambda^2$, a to równanie okręgu o promieniu $|\lambda|$: $(x-x_0)^2 + (y-C)^2 = \lambda^2$. Przy swobodnych końcach okrąg musi przecinać oś prostopadłe, więc odpowiedź to półokrąg o promieniu ℓ/π i polu $\ell^2/(2\pi)$. Mnożnik Lagrange'a okazał się promieniem, zgodnie z lekcją 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych: $\lambda = dA/d\ell = \ell/\pi$.

Zadania · część 3

1. $t(x) = \frac{n_1}{c}\sqrt{x^2 + h_1^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}$; $t'(x) = 0$ daje $n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}$, czyli $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. $\theta_2 = \arcsin \frac{0,5}{1,5} \approx 19,47^\circ$.
2. Spadek: $\sqrt{2 \cdot 2/g} \approx 0,639$ s; potem prędkość $\sqrt{2g \cdot 2} \approx 6,26$ m/s i $\pi/6,26 \approx 0,502$ s. Razem $\approx 1,14$ s: szybciej niż prosta (1,189 s), wolniej niż cycloida (1,003 s). Szybki start się opłaca.
3. Od dna ($\theta = \pi$) długość łuku to $s = 4r \cos \frac{\theta}{2}$, a wysokość nad dnem $h = r(1 + \cos \theta) = 2r \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{s^2}{8r}$. Z zasady zachowania energii $\frac{1}{2}s^2 + gh(s) = \text{const}$; po zrózniczkowaniu $\ddot{s} = -g \frac{dh}{ds} = -\frac{g}{4r}s$, czyli drgania harmoniczne o $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{g/r}$ niezależnie od amplitudy. Do dna jest ćwierć okresu: $\frac{\pi}{2\omega} = \pi\sqrt{r/g}$. Numerycznie dla startu z połowy wysokości: 1,0030 s ✓. Huygens użył tego w zegarze wahadłowym.
4. Promień biegnący ukośnie w dół wchodzi w warstwy o coraz mniejszym n , więc $\sin \theta$ musi rosnąć: promień pochyla się ku poziomowi, aż zawróci w górę. Do oka dociera światło nieba z kierunku pod horyzontem i mózg interpretuje je jako odbicie w wodzie.

Zadania · część 4

1. $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -mg$, czyli $\ddot{x} = -g$.
2. $E_k = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$, $E_p = -mgl \cos \theta$, $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$. $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$, czyli $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$. Siła naciągu nici w ogóle się nie pojawiła.
3. $\dot{x} = v + \frac{\varepsilon\pi}{T} \cos \frac{\pi t}{T}$; wyraz mieszany całkuje się do zera, więc $\Delta S = \frac{1}{2}m\frac{\varepsilon^2\pi^2}{T^2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{m\varepsilon^2\pi^2}{4T}$. Dla $m = 1$, $T = 1$, $\varepsilon = 0,1$: 0,0247. Zawsze dodatnie: dla swobodnej cząstki działanie jest naprawdę minimalne.
4. To tożsamość Beltramiego z t zamiast x . $E = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V$: energia całkowita. Zachowanie energii wynika z tego, że prawa ruchu nie zmieniają się w czasie (szczególny przypadek twierdzenia Noether).
5. $\Delta S < 0$ gdy $n\pi < T$, czyli $n = 1$ i $n = 2$ ($2\pi \approx 6,28 < 7$). Np. $n = 2$, $\varepsilon = 0,2$: $\Delta S \approx -0,0136$. Przy $T = \pi$ i $n = 1$ jest $\Delta S = 0$: ruch $\cos t + \varepsilon \sin t$ też spełnia równanie ruchu i warunki brzegowe ($x(\pi) = -1$ dla każdego ε). To punkt sprzężony: wszystkie ruchy startujące z $x = 1$, z dowolną prędkością początkową, po pół okresu są w $x = -1$.

Matematyka · Rachunek wariacyjny. Źródła: M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, wyd. 3 (Wiley 2006), rozdz. 9; R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I, rozdz. 26 i t. II, rozdz. 19. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.