

Statystyka pomiarów i dopasowania

Wynik pomiaru bez niepewności to tylko połowa informacji. Zmierzone $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ może być świetnym potwierdzeniem albo bezwartościową liczbą, zależnie od tego, czy towarzyszy mu $\pm 0,01$, czy $\pm 0,5$. Ta lekcja zbiera narzędzia laboratorium: niepewności typu A i B według międzynarodowego przewodnika GUM, ich łączenie i przenoszenie, dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów z niepewnościami parametrów oraz test χ^2 , który mówi, czy model w ogóle pasuje do danych.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, wyd. 2, rozdz. 3, 4, 8, 12; JCGM 100:2008 (GUM)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: ile wart jest wynik?
- 1 Niepewności typu A i B
- 2 Przenoszenie niepewności
- 3 Metoda najmniejszych kwadratów
- 4 Test
- χ^2 : czy model pasuje?
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: ile wart jest wynik?

Mierzysz okres wahadła dla pięciu długości i chcesz wyznaczyć przyspieszenie ziemskie. Z teorii $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$, więc punkty $(L; T^2)$ powinny leżeć na prostej przez zero o nachyleniu $4\pi^2/g$. Nie leżą dokładnie, bo każdy pomiar ma rozrzut. Pytania są trzy: jak poprowadzić „najlepszą” prostą, jak niepewne jest jej nachylenie (a więc i g) oraz czy rozrzut punktów wokół prostej jest taki, jakiego się spodziewaliśmy.

Pytanie na start. Co jest lepsze: zmierzyć okres raz dla każdej z pięciu długości i dopasować prostą, czy pięć razy dla jednej długości i uśrednić? Wróć do tego pytania po części 3.

Niepewności typu A i B

W lekcji 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru niepewność standardowa była „typowym odchyleniem”. Międzynarodowy przewodnik GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) rozróżnia dwa sposoby jej wyznaczania.

🔧 TYP A I TYP B

- **Typ A:** z rozrzutu powtarzanych pomiarów, statystycznie: $u_A = s/\sqrt{N}$ (lekcje 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru, 5.1 Prawdopodobieństwo i rozkłady).
- **Typ B:** z innej wiedzy (rozdzielczość przyrządu, dane producenta, świadectwo wzorcowania). Jeśli wiemy tylko, że błąd leży w przedziale $\pm a$, przyjmujemy rozkład jednostajny i $u_B = a/\sqrt{3}$. Dla rozdzielczości (działki) Δ jest $a = \Delta/2$, czyli $u_B = \Delta/\sqrt{12}$.
- **Niepewność złożona niezależnych składników:** $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$. **Niepewność rozszerzona** $U = ku_c$; dla $k = 2$ i rozkładu bliskiego normalnemu przedział $\pm U$ zawiera wartość wielkości mierzonej z prawdopodobieństwem ok. 95%.

por. GUM §4.2, 4.3, 6

Podział na A i B dotyczy *metody* wyznaczenia, a nie natury błędu: obie niepewności traktuje się tak samo, jako odchylenia standardowe. Błąd systematyczny, o którym wiemy, poprawiamy, a niepewność tej poprawki zwykle wliczamy jako składnik typu B.

Przykład 1.1

Średnica pręta

Osiem pomiarów suwmiarką o działce 0,01 mm dało (mm): 12,32; 12,35; 12,30; 12,34; 12,33; 12,31; 12,33; 12,36. Podaj wynik z niepewnością standardową i rozszerzoną.

- 1 $\bar{d} = 12,330 \text{ mm}$; $s = 0,020 \text{ mm}$; $u_A = \frac{0,020}{\sqrt{8}} = 0,0071 \text{ mm}$.
- 2 $u_B = \frac{0,01}{\sqrt{12}} = 0,0029 \text{ mm}$.
- 3 $u_c = \sqrt{0,0071^2 + 0,0029^2} = 0,0076 \text{ mm}$; $U = 2u_c \approx 0,015 \text{ mm}$.

Wynik: $d = (12,330 \pm 0,008) \text{ mm}$ (niepewność standardowa) albo $(12,330 \pm 0,015) \text{ mm}$ przy $k = 2$.

Sprawdzenie: rozrzut ręki (u_A) przeważa nad rozdzielczością (u_B), więc więcej pomiarów by pomogło; lepsza suwmiarka prawie nic by nie dała ✓. Niepewności podajemy z jedną albo dwiema cyframi znaczącymi, a wynik zaokrąglamy do tego samego miejsca (lekcja 0.5).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Pięć pomiarów średnicy (mm): 12,32; 12,35; 12,30; 12,34; 12,33. Oblicz średnią, s i u_A .

- 2 Linijka ma działkę 1 mm. Jaka jest niepewność typu B pojedynczego odczytu długości?

- 3 Połącz u_A z zadania 1.1 z niepewnością rozdzielczości suwmiarki 0,01 mm.

- 4 Producent woltomierza podaje, że błąd odczytu na danym zakresie nie przekracza $\pm 0,05 \text{ V}$. Jaka jest niepewność standardowa typu B? Czy powtarzanie pomiaru ją zmniejszy?

- 5 Dla małej liczby pomiarów sam s jest niepewny, więc przedział $\bar{x} \pm 2u_A$ obejmuje mniej niż 95%. Zamiast $k = 2$ używa się współczynnika t Studenta (dla 95% i $\nu = N - 1$): dla $N = 3, 5, 10, 30$ wynosi on 4,30; 2,78; 2,26; 2,05. Co z tego wynika dla trzech pomiarów?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Przenoszenie niepewności

W lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce wyprowadziliśmy z różniczki prawo przenoszenia niepewności. Jeśli $f = f(x_1, \dots, x_n)$, a wielkości x_i są niezależne:

PRAWO PRZENOSZENIA NIEPEWNOŚCI

$$u_f^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2.$$

Dla iloczynów i ilorazów potęg, $f = Cx^a y^b$, wygodniej względnie: $\left(\frac{u_f}{f} \right)^2 = a^2 \left(\frac{u_x}{x} \right)^2 + b^2 \left(\frac{u_y}{y} \right)^2$. To ta sama reguła co dodawanie wariancji niezależnych zmiennych (lekcja 5.1), zastosowana do przybliżenia liniowego f .

por. Taylor rozdz. 3

Przykład 2.1

g

z jednego wahadła

$L = (1,000 \pm 0,002) \text{ m}$, $T = (2,007 \pm 0,004) \text{ s}$. Oblicz $g = 4\pi^2 L/T^2$ z niepewnością.

- 1 $g = \frac{4\pi^2 \cdot 1,000}{2,007^2} \approx 9,801 \text{ m/s}^2$.
- 2 Względnie: $\frac{u_L}{L} = 0,0020$, $2\frac{u_T}{T} = 0,0040$ (potęga 2!). $\frac{u_g}{g} = \sqrt{0,0020^2 + 0,0040^2} \approx 0,0045$.
- 3 $u_g \approx 0,044 \text{ m/s}^2$.

Wynik: $g = (9,80 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$.

Sprawdzenie: główny wkład daje okres, choć jego niepewność względna jest taka sama jak długości, bo wchodzi w kwadracie $\checkmark$. Żeby poprawić wynik, trzeba lepiej mierzyć czas: np. mierzyć 20 okresów naraz, co dzieli u_T przez 20, o ile niepewność pochodzi głównie z włączania i zatrzymywania stopera.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Prostokąt ma boki $a = (20,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ i $b = (10,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. Oblicz pole z niepewnością.

- 2 Krótsze wahadło: $L = (0,500 \pm 0,001)$ m, $T = (1,419 \pm 0,003)$ s. Oblicz g i u_g .
- 3 Kulka ma masę $m = (50,0 \pm 0,1)$ g i średnicę $d = (2,30 \pm 0,01)$ cm. Oblicz gęstość $\rho = \frac{6m}{\pi d^3}$ z niepewnością. Z czego może być zrobiona?
- 4 Prawo przenoszenia zakłada niezależność. Zmierzono $x = (10,0 \pm 0,1)$ i liczysz $f = x - x$. Co daje wzór, a jaki jest prawdziwy wynik? Gdzie w praktyce pojawiają się skorelowane niepewności?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

3 Metoda najmniejszych kwadratów

Mamy punkty $(x_i; y_i)$, $i = 1 \dots N$, z jednakową niepewnością w y i zaniedbywalną w x . Szukamy prostej $y = a + bx$, która minimalizuje sumę kwadratów odchyleń w pionie:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i)^2.$$

To funkcja dwóch zmiennych; w minimum obie pochodne cząstkowe są równe zero (lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych). Z $\partial S / \partial a = 0$ i $\partial S / \partial b = 0$ dostajemy dwa równania liniowe na a i b (równania normalne, lekcja 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań).

🔧 PROSTA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

$$b = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}, \quad a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}, \quad \Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2.$$

Rozrzut punktów wokół prostej szacuje $s_y = \sqrt{S_{\min} / (N - 2)}$ (dwa parametry zużywają dwa stopnie swobody). Niepewności parametrów: $u_b = s_y \sqrt{N / \Delta}$, $u_a = s_y \sqrt{\sum x_i^2 / \Delta}$. Parametry a i b są skorelowane: $\text{cov}(a, b) = -s_y^2 \sum x_i / \Delta$.

por. Taylor rozdz. 8

Dlaczego kwadraty? Jeśli błędy y_i mają rozkład normalny o tym samym σ , to prawdopodobieństwo otrzymania naszych danych jest proporcjonalne do $\prod e^{-(y_i - a - bx_i)^2 / 2\sigma^2} = e^{-S/2\sigma^2}$. Najmniejsze S to największe prawdopodobieństwo: metoda najmniejszych kwadratów to metoda największej wiarygodności dla błędów gaussowskich (zadanie 3.5).

Wahadło: g **z dopasowania**

Pomiary: $L = 0,20; 0,40; 0,60; 0,80; 1,00 \text{ m}$; $T^2 = 0,817; 1,590; 2,422; 3,244; 4,009 \text{ s}^2$. Dopasuj prostą $T^2 = a + bL$ i wyznacz g z niepewnością.

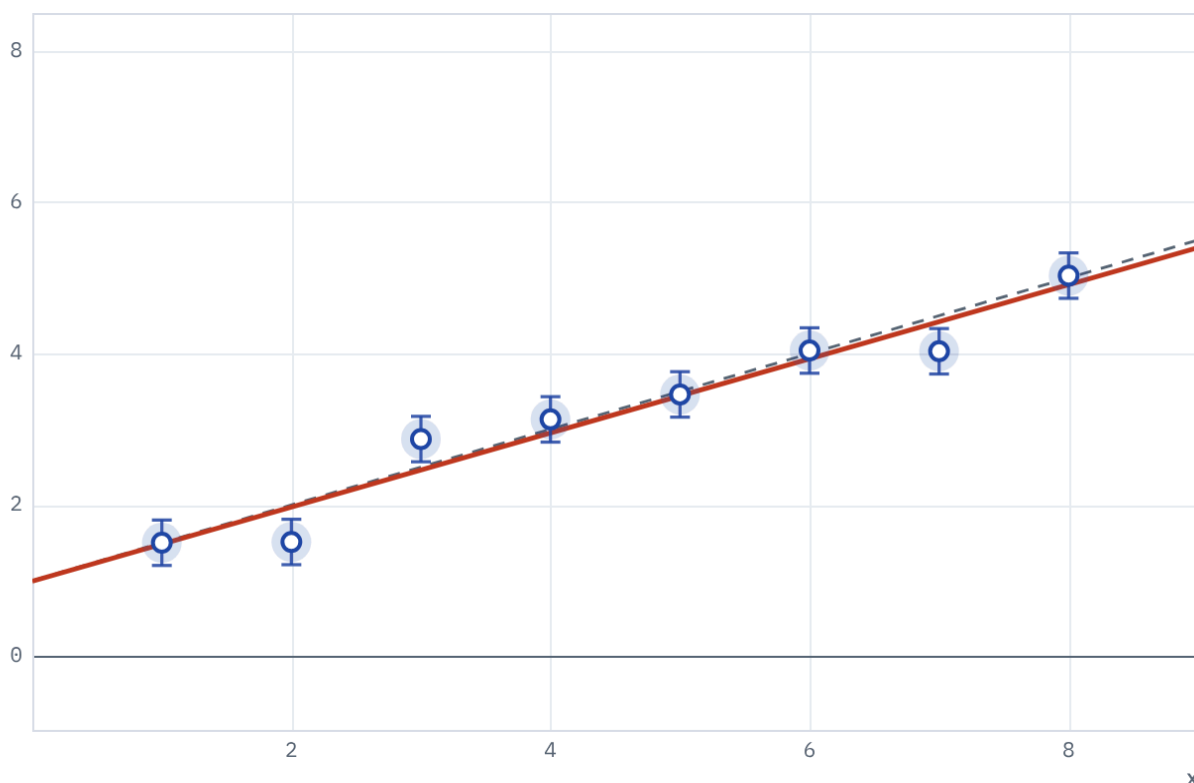
- 1 Sumy: $\sum x = 3,0$; $\sum y = 12,082$; $\sum x^2 = 2,2$; $\sum xy = 8,8568$; $\Delta = 5 \cdot 2,2 - 9 = 2,0$.
- 2 $b = \frac{5 \cdot 8,8568 - 3,0 \cdot 12,082}{2,0} = 4,019 \text{ s}^2/\text{m}$; $a = \frac{2,2 \cdot 12,082 - 3,0 \cdot 8,8568}{2,0} = 0,005 \text{ s}^2$.
- 3 Reszty: $0,0082; -0,0226; 0,0056; 0,0238; -0,0150$. $S_{\min} = 0,00140$, $s_y = \sqrt{0,00140/3} \approx 0,0216 \text{ s}^2$.
- 4 $u_b = 0,0216\sqrt{5/2} \approx 0,034$; $u_a = 0,0216\sqrt{2,2/2} \approx 0,023$.
- 5 $g = \frac{4\pi^2}{b} = 9,823 \text{ m/s}^2$; $u_g = g \frac{u_b}{b} \approx 0,084$.

Wynik: $T^2 = (0,005 \pm 0,023) + (4,019 \pm 0,034)L$; $g = (9,82 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$.

Sprawdzenie: wyraz wolny jest zgodny z zerem w granicach niepewności, tak jak przewiduje teoria ✓. Wartość tablicowa dla Polski, ok. $9,81 \text{ m/s}^2$, leży w odległości ok. $0,15u_g$ ✓. Prosta najmniejszych kwadratów zawsze przechodzi przez punkt $(\bar{x}; \bar{y}) = (0,6; 2,4164)$: $0,005 + 4,019 \cdot 0,6 = 2,4164$ ✓.

SYMULACJA 1

Dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów. Punkty wylosowano z prostej $y = 1 + 0,5x$ z szumem o odchyleniu 0,3. Przeciągaj punkty w pionie (zrób odstający punkt), losuj nowe dane i zmieniaj niepewność σ , którą zakładasz przy liczeniu χ^2 . Odczyt podaje a , b z niepewnościami oraz χ^2/ν . Niepewności a i b liczone są z rozrzutu punktów s_y , więc suwak σ ich nie zmienia; zmienia tylko χ^2 i p . Przycisk „Punkt odstający” przesuwa punkt nr 6 o 2,2 w górę.



— punkty pomiarowe $\pm \sigma$ (przeciągaj w pionie) — prosta najmniejszych kwadratów
 - - prawdziwa prosta $y = 1 + 0,5x$

$a = 0,992 \pm 0,245$

$b = 0,490 \pm 0,048$

$s_y = 0,314$

$\chi^2 (\nu = 6) = 6,57$

$\chi^2/\nu = 1,10$

$p = 0,362$

χ^2/ν bliskie 1: rozrzut punktów zgadza się z zakładaną niepewnością, a prosta dobrze opisuje dane. Prawdziwe wartości to $a = 1$, $b = 0,5$.

Stan na rysunku: $\sigma = 0,30$; $a = 0,992 \pm 0,245$, $b = 0,490 \pm 0,048$; $\chi^2 = 6,57$, $\chi^2/\nu = 1,10$, $p = 0,362$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Wyprowadź wzór na nachylenie prostej przechodzącej przez zero, $y = bx$, metodą najmniejszych kwadratów.

- 2 Dopasuj prostą do punktów (0; 1), (1; 3), (2; 4), (3; 6). Podaj a , b , s_y , u_a i u_b .
■ ■
- 3 Liczba jąder maleje jak $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Jak przekształcić dane, żeby dopasować prostą? Na co trzeba uważać?
■ ■
- 4 Wróć do pytania z prologu. Wzór $u_b = s_y \sqrt{N/\Delta}$ zależy od rozstawu punktów w x . Pokaż, że $\Delta = N \sum (x_i - \bar{x})^2$, i wyjaśnij, dlaczego punkty warto rozłożyć szeroko.
■ ■
- 5 Pokaż, że przy błędach gaussowskich o jednakowym σ minimalizacja S maksymalizuje prawdopodobieństwo danych. Jaka wielkość należy minimalizować, gdy niepewności u_i są różne?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Test χ^2 : czy model pasuje?

Dopasowanie zawsze coś daje, nawet gdy model jest zły. Test pyta, czy odchylenia od modelu są takie, jakich spodziewamy się przy znanych niepewnościach:

📊 STATYSTYKA χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i)}{u_i} \right)^2, \quad \nu = N - (\text{liczba dopasowanych parametrów}).$$

Jeśli model jest dobry, a u_i poprawne, χ^2 ma rozkład chi kwadrat o ν stopniach swobody (dla prawdziwych parametrów byłaby to suma N kwadratów niezależnych zmiennych normalnych standardowych; każdy dopasowany parametr liniowy „zabiera” jeden stopień swobody), o średniej ν i odchyleniu $\sqrt{2\nu}$. Zatem $\chi^2/\nu \approx 1$. Dużo większe: model jest zły albo niepewności niedoszacowane. Dużo mniejsze: niepewności przeszacowane (albo dane „podrasowane”). por. Taylor rozdz. 12

Liczbowo rozstrzyga wartość p : prawdopodobieństwo, że przy dobrym modelu wyszłoby χ^2 co najmniej takie jak zmierzone. Zwyczajowo $p < 0,05$ uznaje się za sygnał, że model nie pasuje. To umowa, a nie prawo przyrody: przy wielu testach poprawnych modeli średnio co dwudziesty da $p < 0,05$ przypadkiem.

Ten sam test sprawdza zgodność liczebności z oczekiwaniami (np. czy kostka jest uczciwa): $\chi^2 = \sum \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$, gdzie O_k to zaobserwowane liczebności, a E_k oczekiwane (test jest wiarygodny, gdy $E_k \gtrsim 5$). Mianownik E_k to wariancja rozkładu Poissona (lekcja 5.1).

Przykład 4.1

Czy wahadło pasuje do prostej?

Dla danych z przykładu 3.1 przyjmij niepewność każdego T^2 równą $0,02 \text{ s}^2$. Oblicz χ^2 , χ^2/ν i oceń dopasowanie.

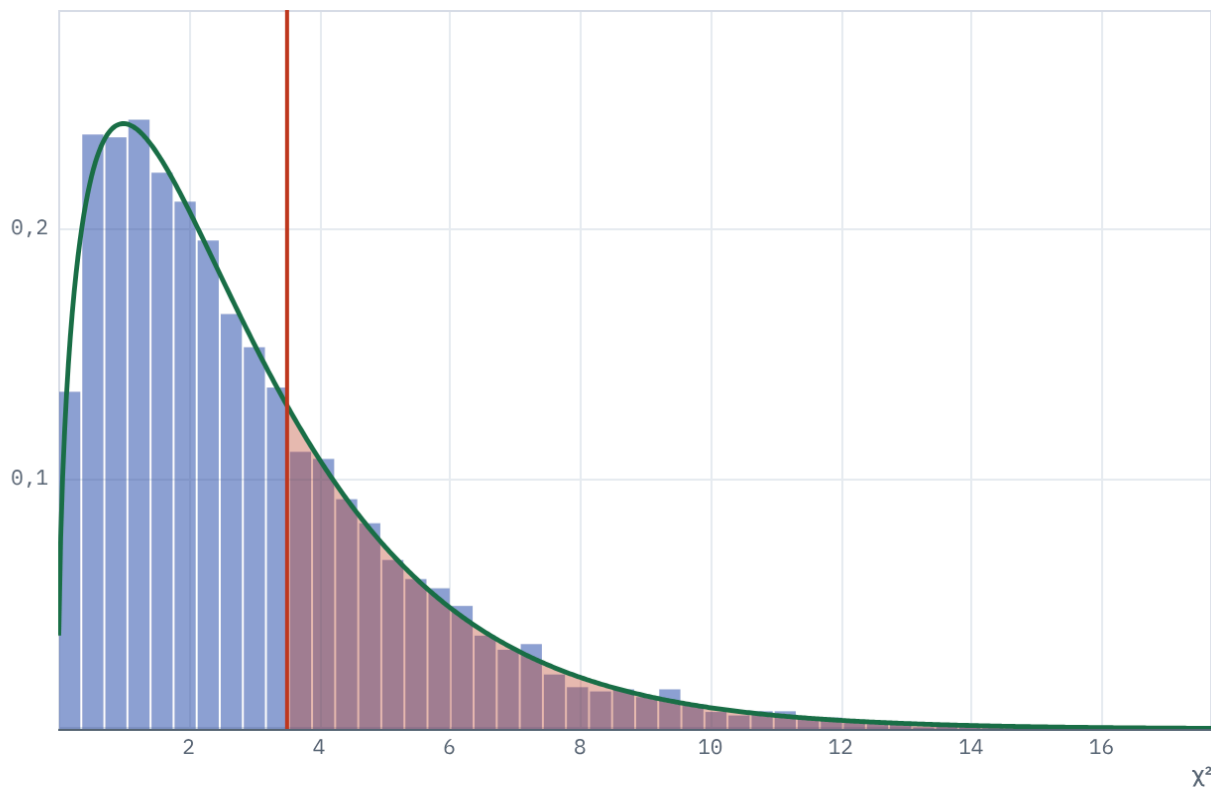
- 1 $\chi^2 = S_{\min}/u^2 = 0,00140/0,0004 \approx 3,50$.
- 2 $\nu = 5 - 2 = 3$; $\chi^2/\nu \approx 1,17$.
- 3 Z rozkładu chi kwadrat dla $\nu = 3$: $P(\chi^2 \geq 3,50) \approx 0,32$.

Wynik: $\chi^2/\nu \approx 1,2$, $p \approx 0,32$: dane są zgodne z prostą przy założonej niepewności.
Zauważ, że $\chi^2/\nu = (s_y/u)^2 = (0,0216/0,02)^2 \approx 1,17$.

Sprawdzenie: dla $\nu = 3$ typowy zakres to $3 \pm \sqrt{6}$, czyli ok. 0,5–5,5; wynik 3,5 jest w środku ✓. Gdyby niepewność wynosiła $0,005 \text{ s}^2$, χ^2 wzrósłby do ok. 56, a p spadłoby praktycznie do zera: wtedy albo prosta jest zła, albo ktoś zaniżył niepewności.

SYMULACJA 2

Rozkład χ^2 . Symulujemy 10 000 „doświadczeń”, w których model jest dobry: każde daje sumę ν kwadratów zmiennych normalnych standardowych. Histogram porównujemy z gęstością chi kwadrat. Przesuwaj zaobserwowaną wartość χ^2/ν , a odczyt poda wartość p (zacięnięty ogon) i porówna ją z ułamkiem symulacji. Dla dużego ν rozkład χ^2/ν skupia się wokół 1 (szerokość $\sqrt{2/\nu}$), a sam rozkład χ^2 staje się prawie symetryczny.



— histogram 10 000 symulacji — gęstość rozkładu χ^2 o ν stopniach swobody
— ogon $P(\chi^2 \geq \text{zaobserwowane})$

zaobserwowane χ^2 3,51

p (teoria) 0,319

ułamek symulacji $\geq \chi^2$ 0,319

średnia (ν / symulacja) 3 / 2,99

$\sigma(\sqrt{2\nu})$ / symulacja) 2,45 / 2,45

$p = 0,319$: takie χ^2 jest typowe dla dobrego modelu. Przy małym ν rozkład jest szeroki, więc nawet $\chi^2/\nu = 2$ może niewiele znaczyć.

Stan na rysunku: $\nu = 3$, $\chi^2 = 3,51$ ($\chi^2/\nu = 1,17$); $p = 0,319$, w symulacji 0,319.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

- 1 Dla dopasowania z zadania 3.2 przyjmij niepewność każdego y równą 0,2. Oblicz χ^2 i χ^2/ν . Dla $\nu = 2$ wartość $p = e^{-\chi^2/2}$; ile wynosi?

- 2 W 600 rzutach kostką wypadło: 95; 108; 92; 110; 89; 106 razy odpowiednio 1–6 oczek. Czy kostka jest uczciwa? (Wartość krytyczna χ^2 dla $\nu = 5$ i $p = 0,05$ to 11,07.)
- 3 Student dopasował model do 22 punktów (dwa parametry) i dostał $\chi^2 = 4$. Co to sugeruje?
- 4 Pokaż, że jeśli Z ma rozkład normalny standardowy, to $E[Z^2] = 1$ i $\text{Var } Z^2 = 2$ (skorzystaj z $E[Z^4] = 3$). Wywnioskuj, że $\chi^2/\nu \approx 1 \pm \sqrt{2/\nu}$. Jak szeroki jest typowy zakres χ^2/ν dla $\nu = 10$ i $\nu = 100$?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Niepewność typu B to błąd systematyczny, a typu A przypadkowy.”

A i B różnią się metodą wyznaczenia (statystyka albo inna wiedza), a nie naturą błędu. Obie podajemy jako odchylenia standardowe.

× „Więcej pomiarów zawsze zmniejsza niepewność.”

Tylko składnik typu A, jak $1/\sqrt{N}$. Rozdzielczość przyrządu i błąd kalibracji zostają (zadanie 1.4).

× „Im mniejsze χ^2 , tym lepiej.”

Oczekujemy $\chi^2 \approx \nu$. Bardzo małe χ^2 oznacza przeszacowane niepewności (zadanie 4.3).

× „Metoda najmniejszych kwadratów działa zawsze.”

Zakłada niezależne błędy w y o znanej (lub jednakowej) wielkości i zaniedbywalne błędy w x ; gaussowskość jest potrzebna do uzasadnienia przez największą wiarygodność i do testu χ^2 . Pojedynczy punkt odstający potrafi mocno przesunąć prostą (symulacja 1).

× „Wartość p to prawdopodobieństwo, że model jest prawdziwy.”

To prawdopodobieństwo uzyskania tak dużego χ^2 , *gdyby* model był prawdziwy. Odwrócenie wymaga wzoru Bayesa (lekcja 5.1) i prawdopodobieństw a priori.

Sprawdź się

- 1 Jak obliczyć niepewność typu B z rozdzielczości Δ ?

$u_B = \Delta/\sqrt{12}$ (rozkład jednostajny w $\pm\Delta/2$).

- 2 Jak łączy się niepewności niezależnych składników?

Pierwiastek z sumy kwadratów: $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$.

- 3 Zapisz prawo przenoszenia niepewności.

$$u_f^2 = \sum (\partial f / \partial x_i)^2 u_{x_i}^2.$$

- 4 Co minimalizuje metoda najmniejszych kwadratów?

Sumę kwadratów odchyleń w pionie $\sum (y_i - a - bx_i)^2$.

- 5 Od czego zależy niepewność nachylenia?

Od rozrzutu punktów s_y i rozstawu w x : $u_b = s_y / \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

- 6 Jakiego χ^2 oczekujemy przy dobrym modelu?

Około ν , z rozrzutem $\sqrt{2\nu}$.

- 7 Ile stopni swobody ma dopasowanie prostej do N punktów?

$N - 2$.

NIEPEWNOŚCI

A: $u_A = s/\sqrt{N}$; B: przedział $\pm a \rightarrow a/\sqrt{3}$;
działka $\Delta \rightarrow \Delta/\sqrt{12}$

$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$; $U = ku_c$, $k = 2$ (ok. 95%);
małe N : t Studenta

$$u_f^2 = \sum (\partial_i f)^2 u_i^2; f = Cx^a y^b: (u_f/f)^2 = a^2 (u_x/x)^2 + b^2 (u_y/y)^2$$

DOPASOWANIE I TEST

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2; b = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta};$$

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$s_y = \sqrt{S_{\min}/(N-2)}; u_b = s_y \sqrt{N/\Delta};$$

$$u_a = s_y \sqrt{\sum x^2/\Delta}$$

$$\chi^2 = \sum ((y_i - f_i)/u_i)^2; \nu = N - \text{liczba parametrów}; \chi^2/\nu \approx 1 \pm \sqrt{2/\nu}$$

$$\text{liczebności: } \chi^2 = \sum (O - E)^2/E; \nu = k - 1 \text{ (potrzeba } E \gtrsim 5)$$

Do przeczytania

- J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, wyd. 2: rozdz. 3 (przenoszenie niepewności), 4 (analiza statystyczna niepewności przypadkowych), 8 (dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów), 12 (test χ^2). Podstawowa książka laboratorium fizycznego.
- JCGM 100:2008 (GUM): międzynarodowy przewodnik wyrażania niepewności, dostępny bezpłatnie na stronie BIPM; rozdziały 4–6.

Na tym kończy się część V. Dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów wróci w automatyce przy identyfikacji układów (1.2 Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa), a jego rekurencyjna wersja z modelem dynamiki to filtr Kalmana (4.4 Filtr Kalmana). W fizyce te narzędzia są potrzebne przy każdym ćwiczeniu laboratoryjnym, a pierwsze z nich to pomiar g i ruch po równi (Dział 1: Ruch i jego przyczyny).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

- $\bar{d} = 12,328 \text{ mm}$; $s \approx 0,0192 \text{ mm}$; $u_A = s/\sqrt{5} \approx 0,0086 \text{ mm}$.
- $u_B = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,29 \text{ mm}$. Długość to różnica dwóch odczytów (dwa końce), więc ostrożniej $\sqrt{2} \cdot 0,29 \approx 0,41 \text{ mm}$.
- $u_c = \sqrt{0,0086^2 + 0,0029^2} \approx 0,0091 \text{ mm}$. Wynik: $(12,328 \pm 0,009) \text{ mm}$.
- $u_B = \frac{0,05}{\sqrt{3}} \approx 0,029 \text{ V}$. Nie: jeśli przyrząd ma stały błąd w tym przedziale, każdy odczyt ma ten sam błąd. Powtarzanie zmniejsza tylko składnik przypadkowy.
- Przy trzech pomiarach 95% obejmuje dopiero $\bar{x} \pm 4,3u_A$, przedział ponad dwa razy szerszy niż $\pm 2u_A$, który przy $N = 3$ obejmuje tylko ok. 82%. Oszacowanie s z trzech liczb jest bardzo niepewne. Przy 30 pomiarach $t \approx 2$ i wraca reguła z rozkładu normalnego.

Zadania · część 2

- $A = 200 \text{ cm}^2$; $u_A = \sqrt{(b u_a)^2 + (a u_b)^2} = \sqrt{1 + 4} \approx 2,2 \text{ cm}^2$.
- $g \approx 9,803 \text{ m/s}^2$; $\frac{u_g}{g} = \sqrt{0,002^2 + (2 \cdot 0,00211)^2} \approx 0,0047$; $u_g \approx 0,046$. Wynik $(9,80 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$.
- $\rho \approx 7,85 \text{ g/cm}^3$. $\frac{u_\rho}{\rho} = \sqrt{0,002^2 + (3 \cdot 0,00435)^2} \approx 0,013$, $u_\rho \approx 0,10$. Wynik $(7,85 \pm 0,10) \text{ g/cm}^3$: stal. Średnica w trzeciej potęgce dominuje niepewność.
- Wzór dla dwóch „niezależnych” składników daje $\sqrt{2} \cdot 0,1 \approx 0,14$, a $f = 0$ dokładnie. Wielkość, która występuje we wzorze kilka razy, uwzględnia się raz: najpierw zapisz f przez niezależne zmienne (tu $f \equiv 0$). W praktyce korelacje daje ten sam przyrząd użyty w kilku pomiarach (wspólny błąd kalibracji) i parametry dopasowania, jak a i b w części 3.

Zadania · część 3

- $S = \sum (y_i - b x_i)^2$, $S'(b) = -2 \sum x_i (y_i - b x_i) = 0$, czyli $b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$. Dla danych z przykładu 3.1: $b = \frac{8,8568}{2,2} = 4,026$ i $g \approx 9,806$.
- $\sum x = 6$, $\sum y = 14$, $\sum x^2 = 14$, $\sum xy = 29$, $\Delta = 20$. $b = 1,6$, $a = 1,1$. Reszty $-0,1$; $0,3$; $-0,3$; $0,1$, $S = 0,2$, $s_y = \sqrt{0,1} \approx 0,32$. $u_b \approx 0,14$, $u_a \approx 0,26$.
- $\ln N = \ln N_0 - \lambda t$: prosta w $(t; \ln N)$ z nachyleniem $-\lambda$. Uwaga: niepewności się zmieniają, $u_{\ln N} = u_N/N$, więc małe liczby zliczeń mają po logarytmowaniu duże niepewności. Poprawnie robi się to ważoną metodą najmniejszych kwadratów (każdy składnik S dzielony przez u_i^2).
- $N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = N (\sum x_i^2 - N \bar{x}^2) = N \sum (x_i - \bar{x})^2$. Zatem $u_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$: im szerzej rozłożone punkty, tym pewniejsze nachylenie. Pięć pomiarów przy jednej długości daje dobrą średnią, ale nie mówi o nachyleniu (bez założenia, że prosta przechodzi przez zero) i nie sprawdza, czy zależność jest liniowa.
- Prawdopodobieństwo (gęstość) danych to $\prod \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(y_i - a - b x_i)^2 / 2\sigma^2} \propto e^{-S/2\sigma^2}$, maksymalne dla minimalnego S . Przy różnych u_i : $\prod e^{-(y_i - f_i)^2 / 2u_i^2}$, więc minimalizujemy $\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - f_i}{u_i} \right)^2$: ważne najmniejsze kwadraty z wagami $1/u_i^2$.

Zadania · część 4

1. $\chi^2 = \frac{0,2}{0,04} = 5$, $\nu = 2$, $\chi^2/\nu = 2,5$. $p = e^{-2,5} \approx 0,082$: dopasowanie słabe, ale nie odrzucamy prostej na poziomie 0,05. Warto sprawdzić, czy 0,2 to realistyczna niepewność.
2. $E_k = 100$; $\chi^2 = \frac{25+64+64+100+121+36}{100} = 4,10$; $\nu = 6 - 1 = 5$ (sumy muszą się zgadzać, więc jeden stopień swobody odpada). $4,10 < 11,07$, $p \approx 0,54$: brak powodów do podejrzeń.
3. $\nu = 20$, $\chi^2/\nu = 0,2$. Przy poprawnych niepewnościach $P(\chi^2 \leq 4) \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Niemal na pewno niepewności są mocno przeszacowane (np. przyjęte jako niepewności graniczne zamiast standardowych). Jeśli niepewności a i b liczono z tych u_i (np. $u_b = u\sqrt{N/\Delta}$), też będą zawyżone; liczone z rozrzutu s_y (jak w części 3) tego problemu nie mają.
4. $E[Z^2] = \text{Var } Z = 1$; $\text{Var } Z^2 = E[Z^4] - 1 = 2$. Suma ν niezależnych: średnia ν , wariancja 2ν ; podzielona przez ν : $1 \pm \sqrt{2/\nu}$. Dla $\nu = 10$: $1 \pm 0,45$, dla $\nu = 100$: $1 \pm 0,14$. Przy małym ν nawet $\chi^2/\nu = 1,5$ niewiele znaczy (dla $\nu = 10$: $p \approx 0,13$).

Matematyka · Statystyka pomiarów i dopasowania. Źródła: J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, wyd. 2 (University Science Books 1997), rozdz. 3, 4, 8, 12; JCGM 100:2008, *Evaluation of measurement data: Guide to the expression of uncertainty in measurement*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.