

Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a

Struna gitary, stygnący pręt i potencjał elektryczny wokół przewodnika to trzy różne zjawiska, a rządzą nimi trzy równania z tym samym laplasjanem: falowe, dyfuzji i Laplace'a. Feynman podkreśla, że „te same równania mają te same rozwiązania”: raz zrozumiane, działają w akustyce, cieple i elektrostatyce. W tej lekcji poznasz jedną metodę, która rozwiązuje wszystkie trzy w prostych obszarach: rozdzielenie zmiennych. Jej wynikiem są mody, a do złożenia z nich warunku początkowego wystarczy szereg Fouriera z lekcji 4.2.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści, z odpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 47-3, 47-4, 49-2; t. II, 12-1, 12-2; W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, rozdz. 10.5–10.8

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dlaczego struna gra harmoniczne
- 1 Trzy równania
- 2 Struna: rozdzielenie zmiennych
- 3 Stygnący pręt
- 4 Równanie Laplace'a
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dlaczego struna gra harmoniczne

W lekcji 4.2 Szeregi Fouriera barwa dźwięku wynikała z tego, że struna drga naraz z częstotliwościami $f, 2f, 3f, \dots$. Skąd struna „wie”, że ma drgać akurat z wielokrotnościami jednej częstotliwości, a nie z dowolnymi? Feynman odpowiada: fala w ograniczonym obszarze odbija się od końców i może istnieć tylko z takimi długościami fal, które „mieszczą się” między nimi.

FLP I-49-2 Rachunek, który to pokazuje, to rozdzielenie zmiennych w równaniu falowym.

Pytanie na start. Struna o długości L jest zamocowana na obu końcach, a fale biegną po niej z prędkością c . Jakie częstotliwości może wydawać? Odpowiedź w części 2.

Trzy równania

Szukana funkcja u zależy od położenia i czasu, więc w równaniach występują pochodne cząstkowe (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). Wszystkie trzy zawierają laplasjan $\nabla^2 u$ z lekcji 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja: miarę tego, o ile średnia z otoczenia punktu różni się od wartości w punkcie.

🔊 RÓWNANIA FALI, DYFUZJI I LAPLACE'A

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u, \quad \nabla^2 u = 0.$$

Fala: przyspieszenie proporcjonalne do zakrzywienia, zaburzenia biegną z prędkością c . Dyfuzja (przewodnictwo ciepła): tempo zmiany proporcjonalne do zakrzywienia, nierówności się wygładzają. Laplace: stan ustalony dyfuzji, a także potencjał elektryczny w pustej przestrzeni, kształt naciągniętej membrany, potencjał prędkości cieczy. FLP II-12-1, 12-2

Skąd równanie falowe dla struny? Kawałek struny o długości Δx i masie $\mu \Delta x$ jest ciągnięty przez napięcie T z obu stron. Jeśli struna jest wygięta, siły z obu końców nie znoszą się: dla małych wychyleń ($\sin \theta \approx \tan \theta = u_x$, napięcie stałe) wypadkowa w pionie to $T(u_x(x + \Delta x) - u_x(x)) \approx T u_{xx} \Delta x$. Druga zasada dynamiki daje $\mu u_{tt} = T u_{xx}$, czyli równanie falowe z $c = \sqrt{T/\mu}$. Feynman wyprowadza to samo równanie dla dźwięku w gazie. FLP I-47-3

W jednym wymiarze każde rozwiązanie równania falowego ma postać $u = f(x - ct) + g(x + ct)$ (rozwiązanie d'Alemberta): dwa kształty biegnące w przeciwne strony bez zmiany kształtu.

FLP I-47-4

Przykład 1.1

Struna gitary

Struna ma długość $L = 0,65 \text{ m}$, gęstość liniową $\mu = 0,4 \text{ g/m}$ (tu μ to masa na metr, nie współczynnik tarcia) i napięcie $T = 70 \text{ N}$. Oblicz prędkość fali i sprawdź, że $u = f(x - ct)$ spełnia równanie falowe.

- 1 $c = \sqrt{T/\mu} = \sqrt{70/0,0004} \approx 418 \text{ m/s}$.
- 2 Dla $u = f(x - ct)$: $u_t = -cf'$, $u_{tt} = c^2 f''$, $u_{xx} = f''$, więc $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ✓ (reguła łańcuchowa, lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych).

Wynik: $c \approx 418 \text{ m/s}$.

Sprawdzenie: jednostki: $\sqrt{\text{N}/(\text{kg}/\text{m})} = \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2}$ ✓. To szybciej niż dźwięk w powietrzu (343 m/s), ale fala na strunie to inna fala niż ta, którą słyszymy: struna pobudza powietrze z tą samą częstotliwością, nie z tą samą długością fali.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Rozpoznaj równania: $u_t = 3u_{xx}$; $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Podaj D albo c .
■ ■ ■
- 2 Sprawdź, że $u = \sin(x - 2t)$ spełnia $u_{tt} = 4u_{xx}$. W którą stronę i z jaką prędkością biegnie ta fala?
■ ■ ■
- 3 Struna z przykładu 1.1 ma częstotliwość podstawową $f_1 = \frac{c}{2L}$ (część 2). Oblicz ją. Jakie napięcie da dokładnie e^1 (329,6 Hz)?
■ ■ ■
- 4 Sprawdź, że $u = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$ spełnia równanie dyfuzji. Co opisuje i jak szybko się rozszerza?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

2 Struna: rozdzielenie zmiennych

Struna zamocowana w $x = 0$ i $x = L$: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Szukamy najpierw rozwiązań, w których kształt się nie zmienia, a tylko skaluje w czasie: $u = X(x)G(t)$. Wstawienie i

podzielenie przez $c^2 X T$ daje

$$\frac{G''}{c^2 G} = \frac{X''}{X}.$$

Lewa strona zależy tylko od t , prawa tylko od x , więc obie są równe stałej, oznaczmy ją $-k^2$ (stała dodatnia lub zero nie spełnia warunków brzegowych). Równanie cząstkowe rozpada się na dwa zwyczajne (lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne): $X'' = -k^2 X$ i $G'' = -c^2 k^2 G$. Warunki brzegowe $X(0) = X(L) = 0$ dopuszczają tylko $X = \sin kx$ z $\sin kL = 0$, czyli $k = n\pi/L$.

por. Boyce i DiPrima §10.7

MODY STRUNY

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad f_n = \frac{nc}{2L}.$$

Częstotliwości modów to całkowite wielokrotności $f_1 = \frac{c}{2L}$: stąd harmoniczne z lekcji 4.2. A_n to współczynniki szeregu Fouriera (samy sinusy) kształtu początkowego, a B_n wynikają z prędkości początkowej.

Przykład 2.1

Struna szarpnięta w środku

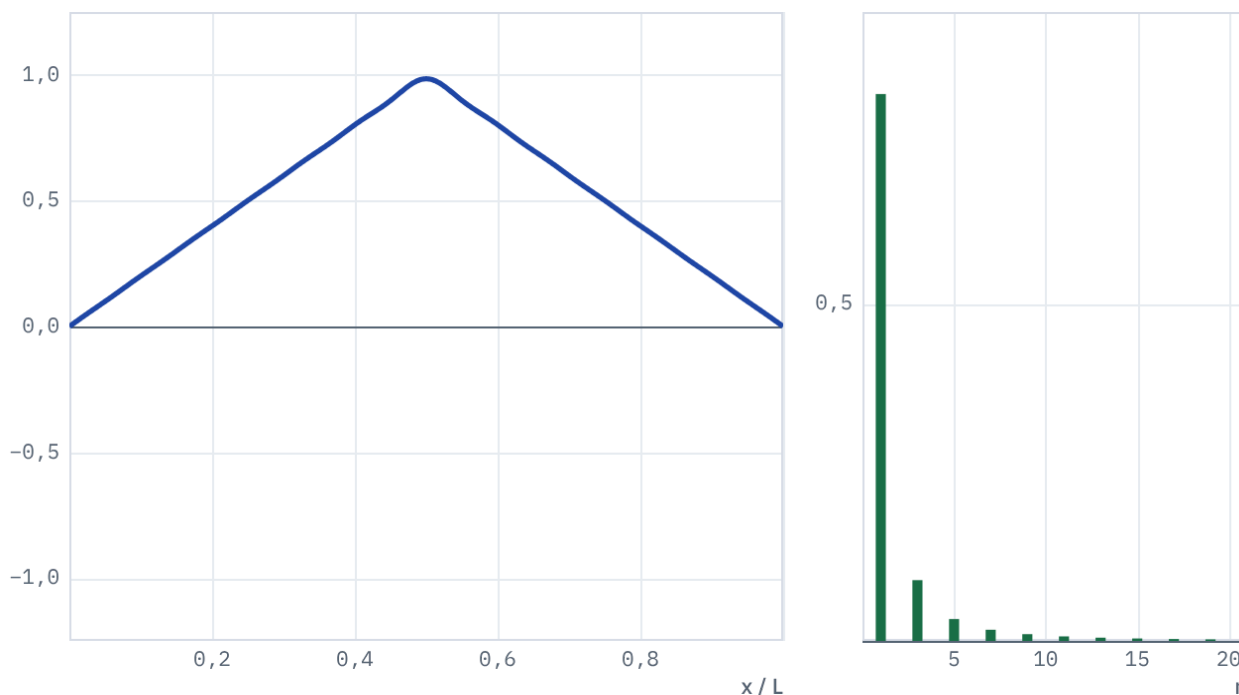
Struna została odciągnięta w środku na wysokość h (kształt trójkąta) i puszczona bez prędkości. Wyznacz A_n i porównaj natężenia harmonicznych.

- 1 Prędkość początkowa zero, więc $B_n = 0$. $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$.
- 2 Całkowanie przez części na obu połówkach trójkąta daje $A_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$.
- 3 Dla parzystych n : $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$. Dla nieparzystych: $\pm \frac{8h}{\pi^2 n^2}$.

$$\text{Wynik: } u = \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{L} \cos \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \omega_3 t + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{L} \cos \omega_5 t - \dots \right).$$

Sprawdzenie: parzyste mody mają w środku węzeł, więc szarpnięcie w węźle ich nie pobudza ✓. Amplitudy maleją jak $\frac{1}{n^2}$, bo kształt jest ciągły z załamaniem (lekcja 4.2, część 3) ✓. W $x = L/2, t = 0$: $\frac{8h}{\pi^2} (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots) = \frac{8h}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = h$ ✓.

SYMULACJA 1 Drgania struny jako suma módów. Wybierz kształt początkowy i liczbę módów N , a potem uruchom animację. Słupki pokazują amplitudy $|A_n|$. Szarpnięcie w punkcie $L/5$ nie pobudza modu 5 ani 10: te mody mają tam węzeł.



— struna $u(x, t)$ — kształt początkowy — amplitudy módów

t / T_1 0,00

częstotliwości módów $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$

mody nieobecne ($n \leq 20$) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

Szarpnięcie w środku: brak parzystych módów (mają w środku węzeł), amplitudy maleją jak $1/n^2$. Po połowie okresu kształt jest odwrócony.

Stan na rysunku: szarpnięta w środku, $N = 25$, $t = 0,00 T_1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 45 min

- Gdzie leżą węzły (punkty nieruchome) modu $n = 3$? Ile wynosi jego częstotliwość, jeśli $f_1 = 110$ Hz?
- Strunę o kształcie $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{L} + 0,5 \sin \frac{3\pi x}{L}$ puszczono bez prędkości. Zapisz $u(x, t)$. Czy kształt struny się zmienia w czasie?
- Ile razy słabsza (w amplitudzie i w energii) jest trzecia harmoniczna struny z przykładu 2.1 od pierwszej? Energia modu jest proporcjonalna do $\omega_n^2 A_n^2$.

4 Gitarzysta szarpie strunę w $\frac{1}{5}$ długości od mostka. Których harmonicznych w ogóle nie słychać? Jak zmienia się barwa, gdy szarpie bliżej mostka?

5 Pokaż, że szarpnięcie (albo uderzenie) w punkcie L/m nie pobudza harmonicznych o numerach podzielnych przez m . Producenci fortepianów umieszczają młotek mniej więcej w $\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$ długości struny. Jaki może być powód?

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ feynmanowskie

3 Stygnący pręt

Te same kroki dla równania dyfuzji $u_t = Du_{xx}$ z końcami trzymanymi w temperaturze 0: $X = \sin \frac{n\pi x}{L}$ jak przy strunie, ale teraz $G' = -Dk^2G$, czyli $G = e^{-Dk^2t}$ zamiast drgań:

por. Boyce i DiPrima §10.5

⚡ PRZEWODNICTWO W PRĘCIE Z ZIMNYMI KOŃCAMI

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-t/\tau_n}, \quad \tau_n = \frac{L^2}{\pi^2 n^2 D}.$$

Mod n gaśnie z czasem życia τ_n , n^2 razy krótszym niż mod podstawowy. Po czasie rzędu τ_1 zostaje praktycznie sam mod $\sin \frac{\pi x}{L}$: profil temperatury upodabnia się do pół sinusoidy i maleje jako całość. To ta sama zależność $\tau \propto \lambda^2$, którą widzieliśmy w lekcji 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja (zadanie 4.4).

Przykład 3.1

Miedziany pręt

Miedziany pręt o długości 1 m ($D \approx 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$) ma temperaturę o T_0 wyższą od otoczenia, a w chwili 0 jego końce zanurzamy w wodzie o temperaturze otoczenia. Wyznacz $u(x, t)$, czas τ_1 i temperaturę środka po czasie τ_1 (boczna powierzchnia izolowana).

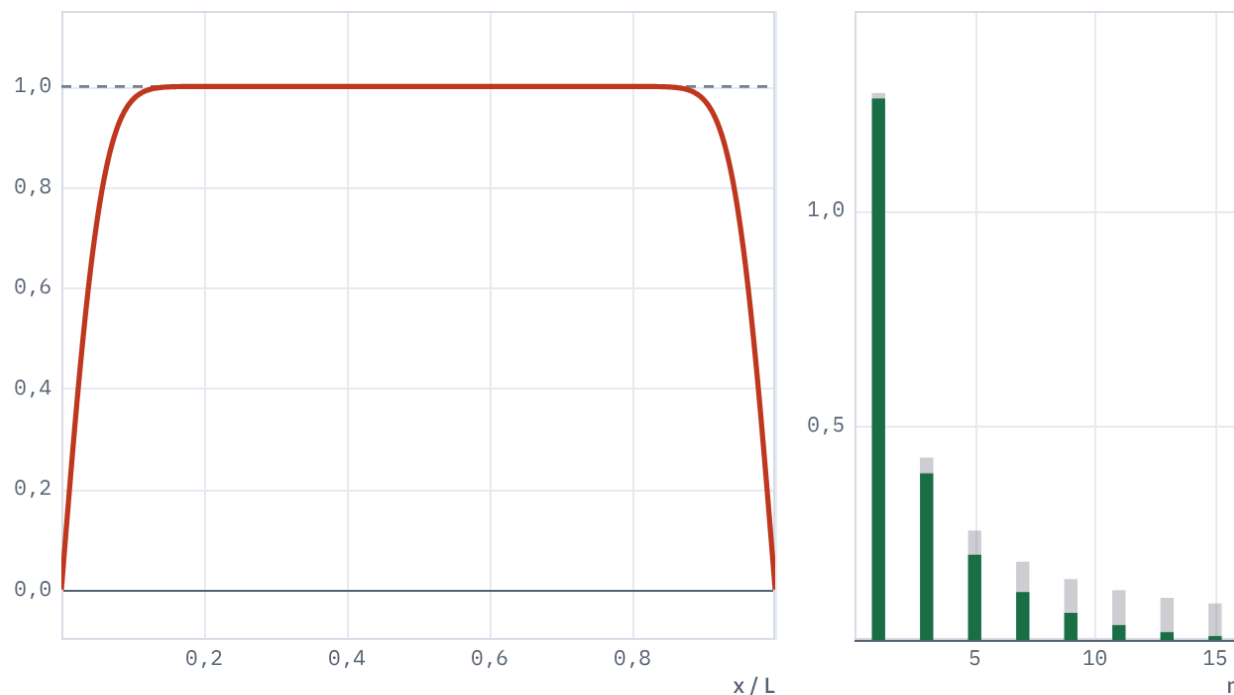
- 1 $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2T_0(1-(-1)^n)}{n\pi} : \frac{4T_0}{n\pi}$ dla nieparzystych n , 0 dla parzystych.
- 2 $\tau_1 = \frac{1}{\pi^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}} \approx 913 \text{ s}$, czyli ok. 15 minut.
- 3 W środku $\sin \frac{n\pi}{2} = \pm 1$. Po czasie τ_1 : $u = \frac{4T_0}{\pi} (e^{-1} - \frac{1}{3}e^{-9} + \dots) \approx 0,468 T_0$.

Wynik: $u = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ nieparz.}} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2 t/\tau_1}$, $\tau_1 \approx 15 \text{ min}$, w środku po τ_1 zostaje ok. 47% początkowej nadwyżki temperatury.

Sprawdzenie: po τ_1 mod 3 jest stłumiony o $e^{-9} \approx 10^{-4}$, więc wynik to praktycznie $\frac{4}{\pi}e^{-1} \approx 0,468 \checkmark$. W $t = 0$ szereg daje T_0 wewnątrz pręta (szereg fali prostokątnej, lekcja 4.2) $\checkmark$. Pręt dziesięć razy krótszy stygnie sto razy szybciej: $\tau_1 \approx 9 \text{ s}$.

SYMULACJA 2

Temperatura w pręcie z zimnymi końcami, policzona jako suma modów. Wybierz profil początkowy i uruchom stygnięcie (czas w jednostkach τ_1). Słupki pokazują, jak każdy mod gaśnie: wyższe znikają najpierw, a po czasie rzędu τ_1 profil staje się połówką sinusoidy.



— temperatura $u(x, t)$ — profil początkowy — amplitudy modów teraz (szare: na początku)

t / τ_1 0,010

temperatura w środku 1,000

średnia temperatura pręta 0,928

Na początku liczą się wszystkie mody; ostre krawędzie profilu to wysokie mody, które zgasną najszybciej.

Stan na rysunku: profil stała temperatura, $t = 0,010 \tau_1$; temperatura w środku 1,000, średnia 0,928.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 30 min

1 Ile razy szybciej gaśnie mod 3 niż mod 1? A mod 10?

2 Oblicz τ_1 dla miedzianego pręta o długości 10 cm. Dlaczego łyżeczka w gorącej herbacie szybko się nagrzewa, a długi pręt powoli?

3 Pręt ma izolowane końce: $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$. Jakie funkcje X są teraz dozwolone? Jaka temperatura ustali się po długim czasie, jeśli na początku $u(x, 0) = x$?

- 4 Współczynnik dyfuzji cząsteczek zapachu w nieruchomym powietrzu to ok. $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Z zadania 1.4: typowa odległość dyfuzji po czasie t to $\sqrt{2Dt}$. Ile trwałoby dotarcie zapachu na odległość 1 m przez samą dyfuzję? Dlaczego w rzeczywistości dzieje się to w kilka sekund?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

4 Równanie Laplace'a

Gdy temperatura przestaje się zmieniać, $u_t = 0$ i z równania dyfuzji zostaje $\nabla^2 u = 0$. Funkcje spełniające to równanie to **funkcje harmoniczne**. Z lekcji 3.5 wiemy, że wartość takiej funkcji w punkcie to średnia z otoczenia, więc (jeśli nie jest stała) nie ma ścisłych maksimów ani minimów wewnątrz obszaru: najcieplejszy i najzimniejszy punkt płyty w stanie ustalonym leżą na brzegu (zadanie 4.5).

Przykład 4.1

Płyta z jednym gorącym bokiem

Kwadratowa płyta $[0; 1]^2$ ma górny bok w temperaturze 1, a trzy pozostałe w temperaturze 0. Znajdź rozkład temperatury w stanie ustalonym i temperaturę środka.

- 1 Rozdzielenie $u = X(x)Y(y)$: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2$. Boki pionowe dają $X = \sin n\pi x$; dolny bok ($u = 0$ dla $y = 0$) daje $Y = \sinh n\pi y$ (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne).
- 2 Górny bok: $\sum C_n \sin n\pi x \sinh n\pi = 1$. To szereg sinusów funkcji stałej: $C_n \sinh n\pi = \frac{4}{n\pi}$ dla nieparzystych n .
- 3 $u(x, y) = \sum_{n \text{ nieparz.}} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x) \frac{\sinh n\pi y}{\sinh n\pi}$.
- 4 Środek: sumujemy szereg w $(0,5; 0,5)$: 0,2500.

Wynik: szereg z punktu 3; w środku dokładnie $\frac{1}{4}$.

Sprawdzenie bez rachunku: zsumuj cztery takie problemy, każdy z gorącym innym bokiem. Suma ma temperaturę 1 na całym brzegu, więc (jedyne rozwiązanie) $u = 1$ wszędzie. Z symetrii każdy z czterech daje w środku tyle samo: $\frac{1}{4}$ ✓. To superpozycja, możliwa, bo równanie jest liniowe.

4.1 We współrzędnych sferycznych

Rozdzielając zmienne we współrzędnych sferycznych (lekcja 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne), dostaje się rozwiązania postaci $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$ oraz $r^{-(l+1)} Y_l^m$ (te drugie poza kulą, np. potencjał ładunku), gdzie Y_l^m to **harmoniki sferyczne**: „mody” na powierzchni sfery, odpowiednik $\sin nx$ na odcinku. Dla funkcji niezależnych od φ to wielomiany Legendre'a od $\cos \theta$:

$$r^0 \cdot 1, \quad r \cos \theta = z, \quad r^2 \cdot \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) = z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Wszystkie są harmoniczne (zadanie 4.3). Pierwsza to potencjał stały, druga to potencjał jednorodnego pola, trzecia to potencjał pola kwadrupolowego wokół środka (np. w pułapce jonowej); pole samego kwadrupola na zewnątrz to $r^{-3} P_2$. Te same funkcje kątowe dają kształty orbitali atomowych: $l = 0, 1, 2$ to orbitale s, p i d (Dział 19: Atom wodoru i układ okresowy).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Które z funkcji są harmoniczne w płaszczyźnie: $x^2 - y^2$, xy , $x^2 + y^2$, $e^x \cos y$?

- 2 Oblicz numerycznie temperaturę płyty z przykładu 4.1 w punktach (0,5; 0,9) i (0,5; 0,1), biorąc pierwsze wyrazy szeregu. Ile wyrazów potrzeba w każdym punkcie?

- 3 Sprawdź, że z i $z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ są harmoniczne w przestrzeni. Dlaczego z^2 nie jest?

- 4 Na brzegu koła jednostkowego temperatura to $\cos 2\theta$. Jaka jest temperatura wewnątrz w stanie ustalonym?

- 5 Uzasadnij zasadę maksimum: funkcja harmoniczna w obszarze ograniczonym osiąga największą wartość na brzegu. Wywnioskuj, że rozwiązanie równania Laplace'a z danymi wartościami na brzegu jest jedyne.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Rozdzielenie zmiennych daje wszystkie rozwiązania od razu.”

Daje tylko rozwiązania iloczynowe (mody). Ogólne rozwiązanie to ich suma, a współczynniki trzeba dopasować szeregiem Fouriera do warunku początkowego lub brzegowego.

× „Struna drga z jedną częstotliwością.”

Drga ze wszystkimi pobudzonymi modami naraz. Częstotliwość podstawowa daje wysokość dźwięku, pozostałe barwę.

× „Ciepło rozchodzi się ze stałą prędkością, jak fala.”

Dyfuzja nie ma stałej prędkości: odległość rośnie jak $\sqrt{t}$, a czas wyrównania jak kwadrat rozmiaru (zadania 3.2, 3.4).

× „W płycie w stanie ustalonym może być gorąca plama w środku.”

Bez źródeł ciepła nie: funkcja harmoniczna nie ma maksimum wewnątrz (zadanie 4.5).

× „Trzy równania to trzy różne działy fizyki, każdy z własnymi metodami.”

Feynman: te same równania mają te same rozwiązania. Ustalony rozkład temperatury jest rozwiązaniem problemu elektrostatycznego o tych samych warunkach brzegowych.

FLP II-12-1

6 Sprawdź się

1 Zapisz równania fali, dyfuzji i Laplace'a.

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u; \quad u_t = D \nabla^2 u; \quad \nabla^2 u = 0.$$

2 Na czym polega rozdzielenie zmiennych?

Szukamy $u = X(x)T(t)$; po podzieleniu każda strona zależy od jednej zmiennej, więc obie równają się stałej, i dostajemy równania zwyczajne.

3 Jakie częstotliwości ma struna zamocowana na końcach?

$$f_n = \frac{nc}{2L}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

4 Skąd biorą się współczynniki A_n ?

Z szeregu Fouriera (sinusów) kształtu początkowego.

5 Jak szybko gaśnie mod n w stygnącym pręcie?

$$\text{Jak } e^{-t/\tau_n} \text{ z } \tau_n = \frac{L^2}{\pi^2 n^2 D}.$$

6 Gdzie funkcja harmoniczna osiąga maksimum?

Na brzegu obszaru.

7 Co to są harmoniki sferyczne?

Funkcje $Y_l^m(\theta, \varphi)$: kątowne części rozwiązań $r^l Y_l^m$ równania Laplace'a; mody na sferze.

FALA I DYFUZJA

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, struna: $c = \sqrt{T/\mu}$; d'Alembert:
 $f(x - ct) + g(x + ct)$

struna: $\sum \sin \frac{n\pi x}{L} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$,
 $f_n = \frac{nc}{2L}$

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$; środek: $A_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$

$u_t = Du_{xx}$: $\sum B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-t/\tau_n}$, $\tau_n = \frac{L^2}{\pi^2 n^2 D}$

punkt: Gauss o szerokości $\sqrt{2Dt}$

LAPLACE

$\nabla^2 u = 0$: stan ustalony, potencjał w pustej przestrzeni

płyta: $\sin(n\pi x) \frac{\sinh n\pi y}{\sinh n\pi}$; środek kwadratu z jednym gorącym bokiem: $\frac{1}{4}$

biegunowo: $r^n \cos n\theta$, $r^n \sin n\theta$; sferycznie: $r^l Y_l^m$

$1, z, z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $l = 0, 1, 2$

zasada maksimum $\Rightarrow$ jednoznaczność;
 superpozycja

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. I, 47-3 i 47-4 (równanie falowe i jego rozwiązania), 49-2 (fale w ograniczonym obszarze, mody); t. II, 12-1 i 12-2 (te same równania, te same rozwiązania; przepływ ciepła).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **W. E. Boyce, R. C. DiPrima**, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*: 10.5 (rozdzielenie zmiennych, przewodnictwo w pręcie), 10.6 (inne problemy cieplne), 10.7 (struna), 10.8 (równanie Laplace'a).
- **D. J. Griffiths**, *Introduction to Electrodynamics*, rozdz. 3.3: rozdzielenie zmiennych w elektrostatyce, także we współrzędnych sferycznych (wielomiany Legendre'a).

Na tym kończy się część IV. Równanie falowe dla pola elektromagnetycznego wynika z równań Maxwella (Dział 16: Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne), równanie dyfuzji wróci w termodynamice i w błędzeniu losowym (część V), a równanie Laplace'a w elektrostatyce (Dział 14: Potencjał, przewodniki i kondensatory). W mechanice kwantowej równanie Schrödingera ma strukturę bardzo podobną do równania dyfuzji, ale z jednostką urojoną, która zamienia gaśnięcie modów w obracanie się ich fazy w płaszczyźnie zespolonej (Dział 19: Atom wodoru i układ okresowy).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Dyfuzji z $D = 3$; falowe z $c = 2$; Laplace'a w płaszczyźnie.
2. $u_{tt} = -4 \sin(x - 2t)$, $u_{xx} = -\sin(x - 2t) \checkmark$. W prawo, z prędkością 2.
3. $f_1 = \frac{418}{1,3} \approx 322$ Hz. Ponieważ $f \propto \sqrt{T}$, trzeba $T = 70 \cdot \left(\frac{329,6}{321,8}\right)^2 \approx 73,5$ N. Strojenie gitary to zmiana napięcia o kilka procent.
4. $\ln u = -\frac{1}{2} \ln(4\pi Dt) - \frac{x^2}{4Dt}$; $\frac{u_t}{u} = -\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2}$; $\frac{u_x}{u} = -\frac{x}{2Dt}$, $\frac{u_{xx}}{u} = \frac{x^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt}$. Zatem $u_t = Du_{xx} \checkmark$. To rozpyływanie się kropli substancji wpuszczonej w punkt $x = 0$ (w chwili 0 to delta Diraca, lekcja 4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca): krzywa Gaussa o odchyleniu standardowym $\sqrt{2Dt}$, rosnącym jak pierwiastek z czasu.

Zadania · część 2

1. $\sin \frac{3\pi x}{L} = 0$: $x = \frac{L}{3}$ i $\frac{2L}{3}$ (plus końce). $f_3 = 330$ Hz.
2. $u = \sin \frac{\pi x}{L} \cos \omega_1 t + 0,5 \sin \frac{3\pi x}{L} \cos 3\omega_1 t$. Kształt się zmienia, bo mody drgają z różnymi częstotliwościami. Po czasie $T_1 = 2\pi/\omega_1$ wraca do początkowego.
3. Amplituda: 9 razy. Energia: $\left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$, czyli 9 razy mniej. Wyższa częstotliwość częściowo kompensuje mniejszą amplitudę.
4. $A_n \propto \frac{\sin(n\pi/5)}{n^2}$, więc znikają $n = 5, 10, 15 \dots$ (numerycznie $A_5 = A_{10} = 0$). Bliżej mostka znika dopiero bardzo wysoka harmoniczna, a niskie są względnie słabsze: dźwięk jest „ostrzejszy”, bogatszy w wysokie tony.
5. Mod n ma w $x = L/m$ wartość $\sin \frac{n\pi}{m}$, równą zero dla n podzielnych przez m ; pobudzenie w węźle modu nie przekazuje mu energii, więc w A_n pojawia się czynnik $\sin \frac{n\pi}{m} = 0$. Klasyczne wyjaśnienie (Helmholtz): siódma harmoniczna brzmi fałszywie względem skali, a uderzenie blisko jej węzła ją osłabia. Współcześnie uważa się je za wątpliwe: w $\frac{1}{8} - \frac{1}{9}$ mod 7 nie ma węzła ($\sin \frac{7\pi}{8} \approx 0,38$), a o miejscu uderzenia decydują głównie czas kontaktu młotka i sztywność struny.

Zadania · część 3

1. $\tau_n \propto \frac{1}{n^2}$: mod 3 gaśnie 9 razy szybciej, mod 10 100 razy.
2. $\tau_1 = \frac{0,01}{\pi^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}} \approx 9$ s. Czas rośnie z kwadratem długości: 10 razy dłuższy pręt potrzebuje 100 razy więcej czasu.
3. $X = \cos \frac{n\pi x}{L}$, $n = 0, 1, 2 \dots$; mod $n = 0$ (stała) nie gaśnie. Po długim czasie zostaje średnia $\frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{L}{2}$: ciepło nie ucieka, tylko się wyrównuje.
4. $t = \frac{x^2}{2D} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-5}} = 25\,000$ s, prawie 7 godzin. W praktyce zapach przenoszą ruchy powietrza (konwekcja, przeciągi), a dyfuzja działa tylko na krótkich odległościach. Ta różnica jest typowa: dyfuzja jest szybka na małych skalach i bardzo wolna na dużych.

Zadania · część 4

1. Wszystkie oprócz $x^2 + y^2$ (laplasjan 4).

2. $(0,5; 0,1)$: już pierwszy wyraz daje $\approx 0,035$ (dokładnie 0,0351), bo czynnik $\frac{\sinh n\pi y}{\sinh n\pi} \approx e^{-n\pi(1-y)}$ jest tam bardzo mały dla $n \geq 3$. $(0,5; 0,9)$: $\approx 0,802$, potrzeba ok. pięciu wyrazów, bo blisko gorącego boku wyższe mody gasną wolniej.
3. $\nabla^2 z = 0$; $\nabla^2 (z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2) = 2 - 1 - 1 = 0$. $\nabla^2 z^2 = 2 \neq 0$: trzeba odjąć część „kulistą”, $\frac{1}{3}r^2$ (wynik to $\frac{2}{3}$ tego samego wielomianu), żeby zostać z czystym wyrazem $l = 2$.
4. $u = r^2 \cos 2\theta = x^2 - y^2$. Na brzegu ($r = 1$) zgadza się z warunkiem, a $\nabla^2(x^2 - y^2) = 0$. W środku temperatura 0: średnia z brzegu.
5. Niech maksimum M będzie osiągnięte w punkcie wewnętrznym i będzie większe od wartości na brzegu. Wartość M równa się średniej z małego okręgu wokół tego punktu (lekcja 3.5), a żadna wartość na okręgu nie przekracza M , więc na całym okręgu $u = M$. Powiększając okręgi (i przesuwając środek), dochodzimy do brzegu, gdzie $u < M$. Sprzeczność. Jednoznaczność: jeśli u_1, u_2 mają te same wartości na brzegu, to $w = u_1 - u_2$ jest harmoniczna i zerowa na brzegu, więc z zasady maksimum (i minimum) $w = 0$ wszędzie. Z tego korzystaliśmy w sprawdzeniu przykładu 4.1.

Matematyka · Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I, 47-3, 47-4, 49-2; t. II, 12-1, 12-2 (Addison-Wesley 1963–1964; New Millennium Edition 2011); W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, rozdz. 10.5–10.8; D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, rozdz. 3.3. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.