

Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność

Wahadło przy małych wychyleniach to oscylator harmoniczny, ale rozkręcone potrafi przejść przez górę i krążyć. Lisy i zające nie dążą do stanu równowagi, tylko na zmianę się mnożą i giną. Serce bije w stałym rytmie, nawet gdy coś je na chwilę zaburzy. Żadnego z tych zjawisk nie opisze układ liniowy. Równań nieliniowych zwykle nie da się rozwiązać wzorem, ale da się narysować, co robią: wystarczy znaleźć punkty równowagi, zlinearyzować układ w ich okolicy (lekcja 4.5) i połączyć kawałki w portret fazowy.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5
h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści,
z
podpowiedziami i
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

W. E. Boyce, R. C.
DiPrima,
*Elementary
Differential
Equations*, rozdz.
9.2–9.5, 9.7; S. H.
Strogatz,
*Nonlinear
Dynamics and
Chaos*, rozdz. 5–7

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: wahadło, które przechodzi przez górę
- 1 Punkty równowagi i linearyzacja
- 2 Portret fazowy wahadła
- 3 Drapieżniki i ofiary
- 4 Cykle graniczne
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: wahadło, które przechodzi przez górę

Wahadło (sztywny pręt z ciężarkiem) spełnia $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$. Dla małych kątów $\sin \theta \approx \theta$ (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce) i dostajemy oscylator harmoniczny z okresem $2\pi\sqrt{L/g}$. Ale przybliżenie przestaje działać, gdy wahadło wychyli się mocno. Przy wychyleniu 90° okres jest już o 18% dłuższy. Jeśli nadamy mu dość prędkości, przejdzie przez położenie pionowe u góry i zacznie się kręcić. Pionowe położenie u góry ($\theta = \pi$) też jest równowagą: niestabilną.

Pytanie na start. Jaką co najmniej prędkość kątową trzeba nadać wahadłu w najniższym punkcie, żeby przeszło przez górę? Jak wygląda ruch dokładnie na granicy? Odpowiedź w części 2.

Punkty równowagi i linearyzacja

Układ autonomiczny w płaszczyźnie to $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$: prawe strony zależą od stanu, ale nie od czasu (lekcja 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów). **Punkt równowagi** (x^* ; y^*) to miejsce, gdzie $f = g = 0$: układ tam stoi. Blisko równowagi zmienne $\xi = x - x^*$, $\eta = y - y^*$ są małe, więc f i g zastępujemy przybliżeniem liniowym z różniczki (lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych):

LINEARYZACJA W PUNKCIE RÓWNOWAGI

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \approx J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix}_{(x^*; y^*)}.$$

Macierz Jacobiego J gra rolę macierzy A z lekcji 4.5. Jeśli żadna wartość własna J nie ma zerowej części rzeczywistej (równowaga **hiperboliczna**), to w pobliżu równowagi układ nieliniowy wygląda jak liniowy: trajektorie jednego da się ciągle odkształcić w trajektorie drugiego (twierdzenie Hartmana–Grobmana), więc stabilność jest ta sama, a siodło pozostaje siodłem. Silniejszy wynik dla układów lokalnie liniowych mówi więcej: spirala pozostaje spiralą, a węzeł węzłem, z wyjątkiem równych wartości własnych, gdy węzeł może stać się spiralą.

(por. Boyce i DiPrima §9.3) Gdy wartości własne są czysto urojone (środek liniowy), linearyzacja nie rozstrzyga: decydują wyrazy nieliniowe (zadanie 1.5).

Przykład 1.1

Równowagi wahadła

Dla wahadła $\dot{\theta} = \omega$, $\dot{\omega} = -\sin \theta - \gamma\omega$ (jednostki, w których $g/L = 1$) znajdź równowagi i ich typ dla $\gamma = 0$ i $\gamma = 0,5$.

- 1 $\omega = 0$ i $\sin \theta = 0$: równowagi $(k\pi; 0)$. Wystarczy zbadać $(0; 0)$ (na dole) i $(\pi; 0)$ (u góry).
- 2 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta & -\gamma \end{pmatrix}$. Na dole $\cos 0 = 1$: $\lambda^2 + \gamma\lambda + 1 = 0$. U góry $\cos \pi = -1$: $\lambda^2 + \gamma\lambda - 1 = 0$.
- 3 $\gamma = 0$: na dole $\lambda = \pm i$ (środek liniowy), u góry $\lambda = \pm 1$ (siodło).
- 4 $\gamma = 0,5$: na dole $\lambda = -0,25 \pm 0,968i$ (spirala stabilna), u góry $\lambda \approx 0,78$ i $-1,28$ (siodło).

Wynik: położenie dolne: środek liniowy bez tarcia, spirala stabilna z tarciem;
położenie górne: siodło w obu przypadkach.

Sprawdzenie: dla $\gamma = 0$ dolna równowaga nie jest hiperboliczna, więc sama linearyzacja nie mówi, czy orbity są zamknięte. Rozstrzyga to zasada zachowania energii w części 2 ✓. Siodło u góry: wahadło ustawione pionowo w górę spada przy najmniejszym zaburzeniu ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Znajdź równowagi układu $\dot{x} = x - x^2$, $\dot{y} = -y$ i określ ich typ.

- 2 Wahadło bez tarcia ma równowagi w $(k\pi; 0)$. Które z nich są siodłami? Dlaczego to tylko dwa fizycznie różne położenia?

- 3 Dla jakiego tłumienia γ dolna równowaga wahadła przestaje być spiralą (od $\gamma = 2$ węzeł; przy $\gamma = 2$ zdegenerowany, tłumienie krytyczne)? Co to znaczy fizycznie?

- 4 Sprężyna „miękknąca”: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + x^3$. Znajdź równowagi i ich typ z linearyzacji.


5



Układ $\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = x + y(x^2 + y^2)$ ma w zerze linearyzację $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (środek). Przejdź do współrzędnych biegunowych i pokaż, że naprawdę to niestabilna spirala.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

2 Portret fazowy wahadła

Portret fazowy to rysunek wielu trajektorii na płaszczyźnie stanów: z niego od razu widać, co się stanie z każdym stanem początkowym. (por. Strogatz rozdz. 6) Dla wahadła bez tarcia pomaga zasada zachowania energii (Dział 2: Energia). Mnożąc $\ddot{\theta} = -\sin \theta$ przez $\dot{\theta}$, dostajemy $\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega^2}{2} - \cos \theta \right) = 0$, czyli

$$E(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - \cos \theta = \text{const.}$$

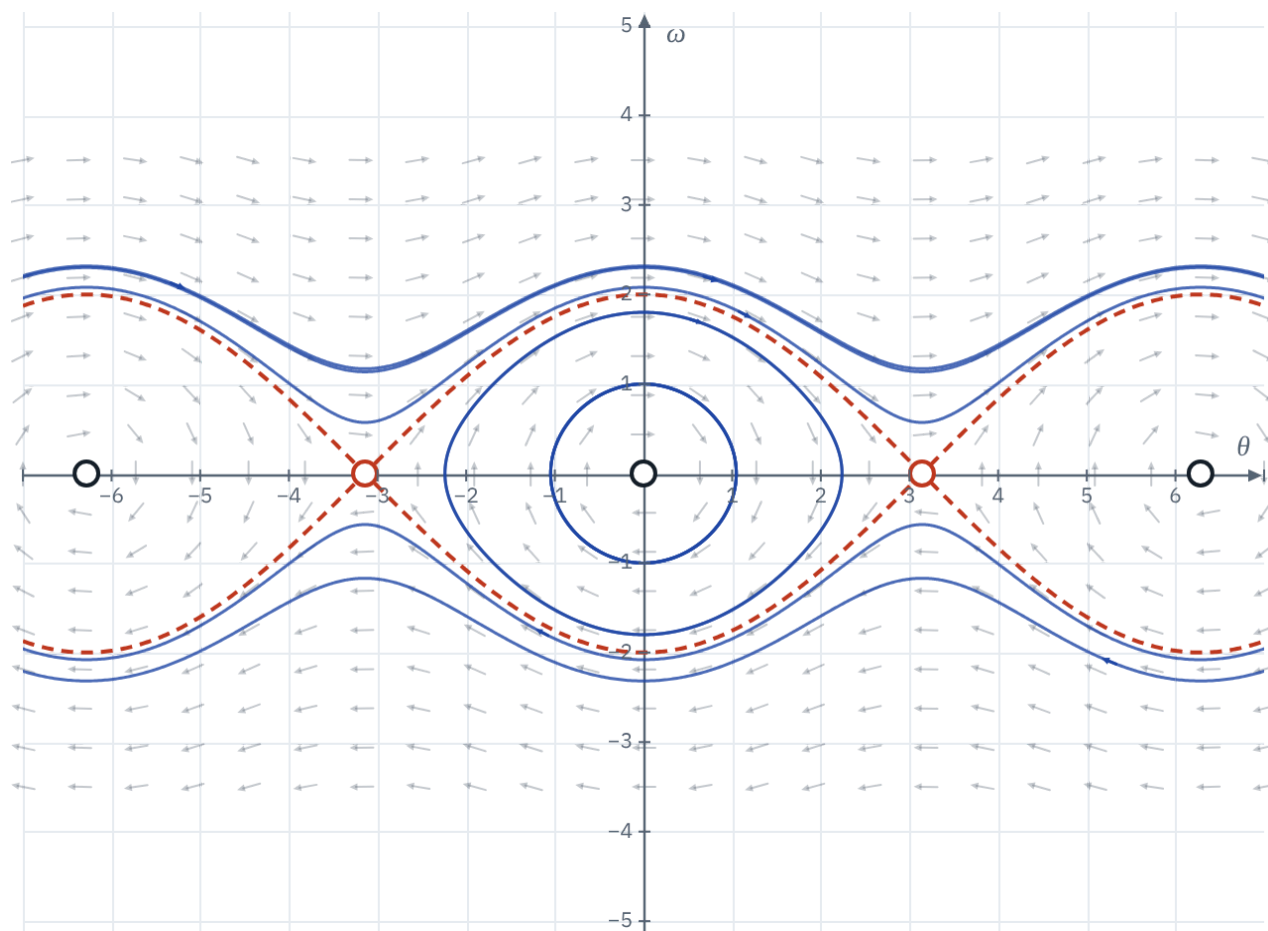
Trajektorie to poziomice funkcji E (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). Dla $-1 < E < 1$ to zamknięte krzywe wokół $(0; 0)$: wahania. Dla $E > 1$ to linie falujące, idące w prawo lub w lewo: obroty. Granicą jest **separatrysa** $E = 1$:

$$\omega = \pm 2 \cos \frac{\theta}{2}.$$

Wahadło na separatrysie zmierza ku pionowi u góry i dochodzi do niego dopiero po nieskończenie długim czasie. Najniższy punkt mija z prędkością kątową 2 (w jednostkach, w których $g/L = 1$), czyli $2\sqrt{g/L}$: to odpowiedź na pytanie z prologu. Okres wahań rośnie z amplitudą i dąży do nieskończoności przy zbliżaniu się do separatrysy.

SYMULACJA 1

Portrety fazowe czterech układów nieliniowych. Kliknij w płaszczyznę, żeby wypuścić trajektorię z tego punktu (linia w przód i w tył w czasie). Punkty równowagi są oznaczone, a ich typ wynika z wartości własnych jacobianu. Dla wahadła zmieniaj tłumienie γ : zamknięte orbity zamieniają się w spirale, a separatrisy dzielą płaszczyznę na obszary przyciągania kolejnych dolnych położeń.



— trajektorie — kliknięte — równowaga stabilna — niestabilna / siodło — środek liniowy
 - - - separatrysta (wahadło bez tarcia)

równowagi $(-6,28; 0,00)$: środek liniowy; $(-3,14; 0,00)$: siodło; $(0,00; 0,00)$:
 środek liniowy; $(3,14; 0,00)$: siodło; $(6,28; 0,00)$: środek liniowy

Bez tarcia trajektorie to poziomice energii: zamknięte (wahania) albo falujące (obroty). Granicą jest separatrysta łącząca siodła w $\theta = \pm\pi$.

Stan na rysunku: wahadło, $\gamma = 0,00$; równowagi: $(-6,28; 0,00)$: środek liniowy; $(-3,14; 0,00)$: siodło; $(0,00; 0,00)$: środek liniowy; $(3,14; 0,00)$: siodło; $(6,28; 0,00)$:
 środek liniowy.

- 1 ■ ■ ■ Sprawdź, że $E = \frac{\omega^2}{2} - \cos \theta$ jest stała wzdłuż rozwiązań wahadła bez tarcia, licząc $\frac{dE}{dt}$ regułą łańcuchową.

- 2 ■ ■ ■ Sprawdź, że $\omega = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ leży na poziomicy $E = 1$. Oblicz minimalną prędkość kątową w dole, przy której wahadło o długości 1 m przejdzie przez górę ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

- 3 ■ ■ ■ Okres wahadła o amplitudzie θ_0 to $T = 4K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right) \sqrt{L/g}$, gdzie $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$ to zupełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju z modułem k (liczy się ją numerycznie; uwaga: w SciPy `ellipk(m)` przyjmuje $m = k^2$). Dla $\theta_0 = 90^\circ$ wychodzi $T \approx 7,42 \sqrt{L/g}$. O ile procent dłużej niż dla małych wahań? Dlaczego przy $\theta_0 \rightarrow 180^\circ$ okres rośnie bez ograniczeń?

- 4 ■ ■ ■ Wahadło z tarcie ($\gamma = 0,5$) dostaje w dole bardzo dużą prędkość. Opisz jego ruch w portrecie fazowym. Od czego zależy, w którym dolnym położeniu ($2k\pi; 0$) się zatrzyma?

■ ■ ■ podstawowe
 ■ ■ ■ średnie
 ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Drapieżniki i ofiary

Model Lotki-Volterry: zające x rozmnażają się w tempie a i giną zjadane przez lisy (wyraz $-bxy$), lisy y wymierają bez pożywienia (tempo c) i mnożą się dzięki zającom ($+dxy$):

por. Boyce i DiPrima §9.5

$$\dot{x} = x(a - by), \quad \dot{y} = y(-c + dx).$$

Funkcja $V = dx - c \ln x + by - a \ln y$ jest stała wzdłuż rozwiązań (zadanie 3.3), więc trajektorie w pierwszej ćwiartce to zamknięte krzywe wokół równowagi współistnienia: populacje oscylują bez końca, z amplitudą ustaloną przez warunki początkowe.

Przykład 3.1

Zające i lisy

Dla $a = 1$, $b = 0,5$, $c = 0,75$, $d = 0,25$ (czas w latach, populacje w tysiącach) znajdź równowagi, ich typ i okres małych oscylacji.

- 1 Równowagi: $(0; 0)$ oraz $x^* = c/d = 3$, $y^* = a/b = 2$.
- 2 $J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$. W $(0; 0)$: $\text{diag}(1, -0,75)$, siodło (bez lisów zające rosną, bez zające lisy giną).
- 3 W $(3; 2)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda^2 = -0,75$, $\lambda = \pm 0,866i$: środek liniowy.
- 4 Okres małych oscylacji $\frac{2\pi}{0,866} \approx 7,26$ roku.

Wynik: siodło w $(0; 0)$, środek w $(3; 2)$; oscylacje z okresem ok. 7,3 roku.

Sprawdzenie: środek liniowy nie rozstrzyga sam (część 1), ale zachowana wielkość V ma w $(3; 2)$ minimum, więc orbity są zamknięte ✓. Numerycznie: start z $(3,3; 2)$ daje okres 7,26, a start z $(8; 2)$ okres 8,00: duże oscylacje są wolniejsze. Z linearyzacji: przy małych oscylacjach maksimum lisów spóźnia się za maksimum zające o ćwierć okresu (dla dużych orbit mniej, np. ok. 0,15 okresu przy starcie z $(8; 2)$).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Wyjaśnij biologicznie znaczenie każdego wyrazu modelu Lotki-Volterry. Który wyraz jest nieliniowy?
- 2 Pokaż, że w ogólnym modelu jacobian w $(c/d; a/b)$ ma wartości własne $\pm i\sqrt{ac}$. Ile wynosi okres małych oscylacji?
- 3 Pokaż, że $V = dx - c \ln x + by - a \ln y$ jest stała wzdłuż rozwiązań.
- 4 Pokaż, że średnie po okresie wynoszą $\bar{x} = c/d$ i $\bar{y} = a/b$. Co się stanie ze średnimi, jeśli ludzie odławiają oba gatunki w tempie h (czyli $a \rightarrow a - h$, $c \rightarrow c + h$)?

- 5 Dwa gatunki konkurują o pokarm: $\dot{x} = x(1 - x - y)$, $\dot{y} = y(0,75 - y - 0,5x)$. Znajdź wszystkie równowagi i zbadaj, czy współistnienie jest stabilne.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

4 Cykle graniczne

Zamknięte orbity wahadła i modelu Lotki-Volterry tworzą rodziny: każdy stan początkowy ma swoją orbitę, a zaburzenie przenosi układ na sąsiednią. Zegar, serce czy brzęczący przewód zachowują się inaczej: po zaburzeniu wracają do *tej samej* oscylacji. Taka izolowana zamknięta orbita, do której zbiegają sąsiednie trajektorie, to **cykl graniczny** (stabilny).

por. Strogatz rozdz. 7

Klasyczny przykład to oscylator van der Pola, model obwodu z lampą elektronową:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0.$$

Dla małych $|x|$ „tłumienie” $-\mu(1 - x^2)$ jest ujemne: układ dostaje energię, drgania rosną. Dla $|x| > 1$ jest dodatnie: energia jest tracona. Równowaga między tymi efektami ustala jedną amplitudę, bliską 2 niezależnie od μ . W płaszczyźnie istnienie cyklu gwarantuje twierdzenie Poincarégo-Bendixsona: trajektoria, która od pewnej chwili pozostaje w domkniętym, ograniczonym obszarze bez punktów równowagi, jest orbitą zamkniętą albo do niej dąży. Dla van der Pola takim obszarem jest pierścień wokół niestabilnego zera. por. Boyce i DiPrima §9.7

Przykład 4.1

Oscylator van der Pola

Dla $\mu = 1$ zbadaj równowagę w zerze i opisz, co dzieje się z trajektoriami startującymi blisko zera i daleko od niego.

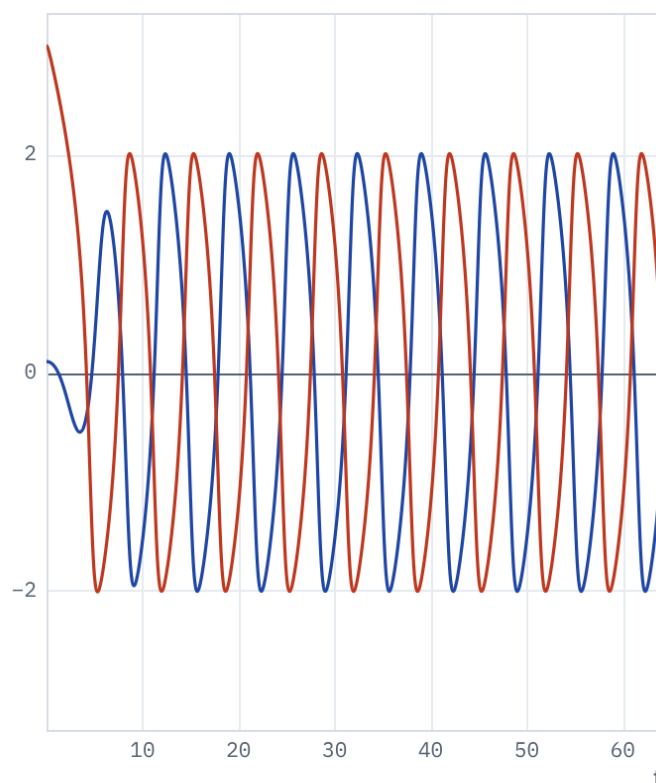
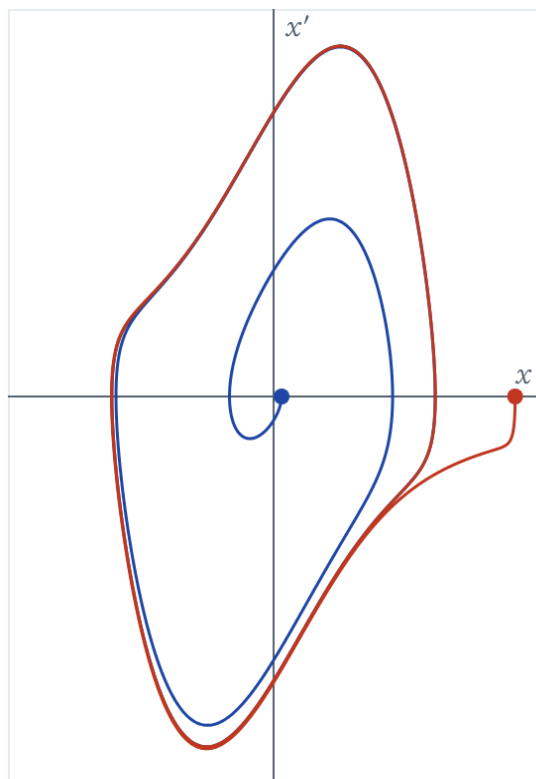
- 1 Stan $[x; y]$ z $y = \dot{x}$: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$. Jedyna równowaga: $(0; 0)$.
- 2 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$: spirala niestabilna. Trajektorie blisko zera odkręcają się.
- 3 Daleko od zera dominuje tłumienie $\mu x^2 \dot{x}$: trajektorie zakręcają do środka. Pośrodku leży cykl graniczny.
- 4 Numerycznie: amplituda cyklu $\approx 2,01$, okres $\approx 6,66$ (dla $\mu = 0,1$: 2,00 i 6,29; dla $\mu = 3$: 2,02 i 8,86).

Wynik: niestabilna spirala w zerze, stabilny cykl graniczny o amplitudzie ok. 2 i okresie ok. 6,66.

Sprawdzenie: dla małego μ układ to prawie oscylator harmoniczny, więc okres powinien być bliski $2\pi \approx 6,28$ ✓. Dla dużego μ drgania stają się „relaksacyjne”: powolne narastanie i gwałtowny przeskok (symulacja 2).

SYMULACJA 2

Oscylator van der Pola. Dwie trajektorie startują wewnątrz i na zewnątrz cyklu i zbiegają do tej samej zamkniętej orbity. Po lewej płaszczyzna fazowa, po prawej przebieg $x(t)$. Zmieniaj μ : przy małym μ cykl jest prawie okręgiem, przy dużym drgania stają się relaksacyjne. Odczyt podaje zmierzoną amplitudę i okres.



— start wewnątrz (0,1; 0) — start na zewnątrz (3; 0)

amplituda cyklu 2,009

okres 6,665

2π 6,283

Obie trajektorie, z wnętrza i z zewnątrz, zbiegają do tej samej zamkniętej orbity. Amplituda nie zależy od warunków początkowych.

Stan na rysunku: $\mu = 1,00$; amplituda cyklu 2,009, okres 6,665.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 30 min

1 Dla jakich $\mu > 0$ zero jest w oscylatorze van der Pola niestabilną spiralą, a dla jakich niestabilnym węzłem?

2 Dlaczego układ liniowy $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ nie może mieć cyklu granicznego?

- 3 Czym różni się zamknięta orbita modelu Lotki-Volterry od cyklu granicznego van der Pola? Co się stanie w obu układach po krótkim zaburzeniu?

- 4 Układ we współrzędnych biegunowych: $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\varphi} = 1$. Pokaż, że $r = 1$ to stabilny cykl graniczny, i sprawdź, że $r(t) = (1 + Ce^{-2t})^{-1/2}$ spełnia równanie.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

- × „Linearyzacja zawsze mówi, czy równowaga jest stabilna.”

Tylko dla równowag hiperbolicznych. Środek liniowy może być naprawdę środkiem, spiralą stabilną albo niestabilną (zadanie 1.5).

- × „Stabilna równowaga przyciąga wszystkie trajektorie.”

Tylko te z jej obszaru przyciągania. Wahadło z tarciem ma nieskończenie wiele stabilnych położeń, a każde przyciąga swój pas płaszczyzny (zadanie 2.4).

- × „Okres wahadła nie zależy od amplitudy.”

To prawda tylko dla małych wychyleń. Przy 90° okres jest o 18% dłuższy, a przy amplitudzie bliskiej 180° rośnie bez ograniczeń.

- × „Każda zamknięta orbita to cykl graniczny.”

Cykl graniczny jest izolowany. Orbity wahadła bez tarcia i modelu Lotki-Volterry tworzą ciągłe rodziny (zadanie 4.3).

- × „Populacje w modelu drapieżnik–ofiara dążą do równowagi.”

W modelu Lotki-Volterry oscylują bez końca wokół równowagi; zbieżność pojawia się dopiero w modelach z dodatkowymi efektami, np. z ograniczoną pojemnością środowiska dla ofiar.

Sprawdź się

- 1 Jak znaleźć punkty równowagi układu $\dot{x} = f, \dot{y} = g$?

Rozwiązać $f = 0$ i $g = 0$ jednocześnie.

- 2 Jaka macierz opisuje układ blisko równowagi?

Jakobian J (pochodne cząstkowe f i g) policzony w równowadze.

- 3 Kiedy linearyzacja wiernie oddaje typ równowagi?

Gdy żadna wartość własna nie ma zerowej części rzeczywistej (równowaga hiperboliczna).

- 4 Jakiego typu jest górne położenie wahadła?

Siodło.

- 5 Czym jest separatrix wahadła i jakie ma równanie?

Granica między wahaniami a obrotami: $E = 1$, czyli $\omega = \pm 2 \cos(\theta/2)$ (dla $g/L = 1$).

- 6 Ile wynoszą średnie liczebności w modelu Lotki-Volterra?

$\bar{x} = c/d, \bar{y} = a/b$: współrzędne równowagi.

- 7 Czym jest cykl graniczny?

Izolowaną zamkniętą orbitą; stabilny przyciąga sąsiednie trajektorie.

LINEARYZACJA

równowaga: $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$

$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$ w równowadze; typ z wartości własnych (lekcja 4.5)

hiperboliczna ($\operatorname{Re} \lambda \neq 0$): stabilność i siodło jak w układzie liniowym (węzeł/spirała: poza $\lambda_1 = \lambda_2$)

środek liniowy: rozstrzygają wyrazy nieliniowe (np. zachowana energia)

wahadło: $E = \frac{\omega^2}{2} - \cos \theta$; separatrixa $\omega = \pm 2 \cos \frac{\theta}{2}$

MODELE

Lotka-Volterra: $\dot{x} = x(a - by)$, $\dot{y} = y(-c + dx)$

równowaga $(c/d; a/b)$, okres małych drgań $2\pi/\sqrt{ac}$, $\bar{x} = c/d$, $\bar{y} = a/b$

van der Pol: $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$; cykl o amplitudzie ≈ 2

$\dot{r} = r(1 - r^2)$: cykl graniczny $r = 1$

Poincaré-Bendixson: trajektoria uwięziona w ograniczonym, domkniętym obszarze bez równowag $\rightarrow$ orbita zamknięta (lub dąży do niej)

Do przeczytania w podręcznikach

- **W. E. Boyce, R. C. DiPrima**, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*: 9.2 (układy autonomiczne i stabilność), 9.3 (układy lokalnie liniowe), 9.4 (konkurencja gatunków), 9.5 (drapieżnik-ofiara), 9.7 (rozwiązania okresowe i cykle graniczne).
- **S. H. Strogatz**, *Nonlinear Dynamics and Chaos*: rozdz. 5 (układy liniowe), 6 (płaszczyzna fazowa), 7 (cykle graniczne). Najlepsza książka na dalszą lekturę.

Trzy wymiary to już inna historia: tam trajektorie mogą się plątać bez końca, nie zbiegając ani do równowagi, ani do cyklu, i pojawia się chaos (Strogatz, rozdz. 9). W automatyce stabilność układów nieliniowych bada się bez rozwiązywania równań, funkcjami podobnymi do energii z części 2 (4.6 Stabilność Lapunowa i sterowanie nieliniowe). Następna lekcja, 4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a, przechodzi od równań zwyczajnych do cząstkowych.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $(0; 0)$: $J = \text{diag}(1, -1)$, siodło. $(1; 0)$: $J = \text{diag}(-1, -1)$, węzeł stabilny.
2. Dla nieparzystych k ($\cos k\pi = -1$) siodła, dla parzystych środki. Kąty różniące się o 2π to to samo położenie wahadła: płaszczyzna fazowa to w istocie walec.
3. Wyróżnik $\gamma^2 - 4$ zmienia znak przy $\gamma = 2$. Dla $\gamma > 2$ wartości własne są rzeczywiste i ujemne: węzeł. Wahadło wraca do pionu bez przechodzenia na drugą stronę (tłumienie nadkrytyczne, lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne).
4. $(0; 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm i$: środek liniowy (energia $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ jest zachowana, więc orbity w pobliżu są zamknięte). $(\pm 1; 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$: siodła. Dla dużych wychyleń sprężyna „puszcza” i ruch ucieka.
5. $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)^2 = r^4$, czyli $\dot{r} = r^3 > 0$, a $\dot{\varphi} = 1$. Trajektorie odkręcają się od zera, choć liniowa część przewiduje zamknięte okręgi. Z $\dot{r} = r^3$: $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1-2r_0^2t}}$, ucieczka do nieskończoności w skończonym czasie $t = \frac{1}{2r_0^2}$.

Zadania · część 2

1. $\dot{E} = \omega\dot{\omega} + \sin\theta\dot{\theta} = \omega(-\sin\theta) + \sin\theta\omega = 0$. Z tarciem $\dot{E} = -\gamma\omega^2 \leq 0$: energia maleje.
2. $\frac{4\cos^2(\theta/2)}{2} - \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - (2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1) = 1 \checkmark$. Prędkość kątowna w dole musi przekroczyć $2\sqrt{g/L} \approx 6,26$ rad/s. To samo z energii: $\frac{1}{2}mL^2\omega^2 > 2mgL$.
3. $\frac{7,416}{2\pi} \approx 1,18$; o ok. 18%. Przy amplitudzie bliskiej 180° wahadło długo „wisi” blisko górnego siodła, gdzie prawie się nie porusza; na samej separatrixie dojście do siodła trwa nieskończenie długo. Dla 170° okres jest już ok. 2,4 razy dłuższy.
4. Na początku kręci się (energia ponad separatrixą), ale każdy obrót traci energię. W końcu trajektoria spada poniżej górnego siodła i zawiąza się spiralą do jednego z dolnych położań. To, do którego, zależy od tego, między którymi różnościami stabilnymi siodła (krzywymi, po których trajektorie wpadają do siodła) leży stan początkowy: płaszczyzna dzieli się na pasy, czyli obszary przyciągania. Fizycznie: wahadło zatrzyma się po k pełnych obrotach.

Zadania · część 3

1. ax : rozmnażanie zajęcy; $-bxy$: spotkania zając-lis kończące się zjedzeniem (proporcjonalne do iloczynu liczebności); $-cy$: śmiertelność lisów; dxy : przyrost lisów dzięki pożywieniu. Nieliniowe są wyrazy xy .
2. $J = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda^2 = -ac$. Okres $\frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$; dla przykładu 3.1: $\frac{2\pi}{\sqrt{0,75}} \approx 7,26 \checkmark$. Okres nie zależy od b i d .
3. $\dot{V} = (d - \frac{c}{x})\dot{x} + (b - \frac{a}{y})\dot{y} = (dx - c)(a - by) + (by - a)(-c + dx) = 0$.
4. Po okresie $\ln y$ wraca do tej samej wartości, więc $0 = -cT + d \int_0^T x dt$, czyli $\bar{x} = c/d$; analogicznie $\bar{y} = a/b$. Przy odłowieniu: $\bar{x} = \frac{c+h}{d}$ rośnie, $\bar{y} = \frac{a-h}{b}$ maleje. Umiarkowany odłów zwiększa średnią liczbę ofiar.

Tak Volterra wyjaśnił, dlaczego w czasie I wojny światowej, gdy łowiono mniej, w połowach na Adriatyku wzrósł udział ryb drapieżnych (dane Umberta D'Ancony).

5. Równowagi: $(0; 0)$ (węzeł niestabilny), $(1; 0)$ i $(0; 0,75)$ (siodła: $\lambda = \frac{1}{4}, -1$ i $\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$) oraz $(0,5; 0,5)$. Tam $J = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,25 & -0,5 \end{pmatrix}$, $\text{tr} = -1$, $\det = 0,125$: węzeł stabilny ($\lambda \approx -0,15$ i $-0,85$). Gatunki współistnieją, bo konkurencja wewnątrzgatunkowa jest łącznie silniejsza od międzygatunkowej: iloczyn współczynników samoograniczenia $1 \cdot 1$ przewyższa iloczyn współczynników konkurencji $1 \cdot 0,5$.

por. Boyce i DiPrima §9.4

Zadania · część 4

- $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$, część rzeczywista dodatnia zawsze. Spirala dla $\mu < 2$, węzeł dla $\mu \geq 2$ (dla $\mu = 3$: $\lambda \approx 0,38$ i $2,62$).
- Jeśli $\vec{x}(t)$ jest rozwiązaniem okresowym, to $c\vec{x}(t)$ też, dla każdego c . Orbitsy zamknięte (gdzie są, przy czysto urojonych wartościach własnych) tworzą więc rodzinę przeskalowanych kopii, żadna nie jest izolowana i żadna nie przyciąga sąsiednich. Cykl graniczny wymaga nieliniowości, która wybiera jedną amplitudę.
- W modelu Lotki-Volterry zaburzenie przenosi układ na inną orbitę z rodziny i populacje oscylują dalej z nową amplitudą (układ „pamięta” zaburzenie). W oscylatorze van der Pola sąsiednie trajektorie wracają do cyklu: amplituda i okres się odtwarzają. Dlatego modele rzeczywistych oscylatorów (zegar, serce) mają cykle graniczne, a model Lotki-Volterry jest strukturalnie niestabilny: drobna zmiana równań niszczy rodzinę orbit.
- $\dot{r} > 0$ dla $0 < r < 1$ i $\dot{r} < 0$ dla $r > 1$: trajektorie z obu stron zbiegają do okręgu $r = 1$, po którym układ krąży z $\dot{\varphi} = 1$. Sprawdzenie: $\dot{r} = Ce^{-2t}(1 + Ce^{-2t})^{-3/2}$, a $r(1 - r^2) = (1 + Ce^{-2t})^{-1/2} \cdot \frac{Ce^{-2t}}{1 + Ce^{-2t}}$: to samo $\checkmark$. $C > 0$: start wewnątrz, $-1 < C < 0$: na zewnątrz.

Matematyka · Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność. Źródła: W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, rozdz. 9.2–9.5, 9.7; S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, rozdz. 5–7. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.