

Układy równań liniowych i przestrzeni stanów

Dwa pokoje wymieniają ciepło przez ścianę i oba tracą je na zewnątrz. Satelita ma położenie, prędkość, orientację i prędkość obrotu. Obwód ma kilka kondensatorów i cewek. Wszystkie takie układy da się zapisać jednym równaniem $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, gdzie $\vec{x}$ to wektor stanu, a A to macierz. Rozwiązanie daje się wyrazić przez wartości i wektory własne A (lekcja 2.3) albo jednym wzorem: $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$, z wykładniczą funkcją macierzy. To język, w którym pisze się współczesną automatykę i mechanikę lotu.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, rozdz. 7.1, 7.5–7.9; *Feynmana wykłady z fizyki*, t. I, 25-4, 49-4, 49-5

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dwa pokoje
- 1 Stan i równanie stanu
- 2 Rozwiązanie przez wartości własne
- 3 Macierz wykładnicza
- 4 Wejście, wyjście i transmitancja
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwa pokoje

Dwa sąsiednie pokoje są cieplejsze od otoczenia o x_1 i x_2 stopni. Każdy traci ciepło na zewnątrz, a przez wspólną ścianę ciepło płynie z cieplejszego do chłodniejszego. W prostym modelu (prawo stygnięcia Newtona, lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne) z wybranymi stałymi:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + (x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + (x_1 - x_2).$$

Każde równanie zawiera obie niewiadome, więc nie da się ich rozwiązać po kolei. W lekcji 2.3 Wartości i wektory własne mieliśmy podobny kłopot z dwoma wahadłami połączonymi sprężyną i rozwiązaliśmy go, szukając *modów*: kombinacji, które zachowują się niezależnie. FLP I-49-4

Pytanie na start. W chwili 0 pierwszy pokój jest o 1 stopień cieplejszy od otoczenia, a drugi ma temperaturę otoczenia. Jak zmieniają się oba w czasie? Która kombinacja temperatur gaśnie szybciej: średnia czy różnica? Odpowiedź w przykładzie 2.1.

Stan i równanie stanu

Stan układu to zestaw liczb, który razem z przyszłymi wymuszeniami wyznacza całą przyszłość. Dla punktu materialnego to położenie i prędkość, nie samo położenie. Dla liniowego układu bez wymuszeń zapisujemy go jako wektor $\vec{x}$ i dostajemy

RÓWNANIE STANU

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0,$$

gdzie A to stała macierz $n \times n$. Przestrzeń wszystkich możliwych wektorów $\vec{x}$ to **przestrzeń stanów**. Każde jednorodne równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach sprowadza się do tej postaci: za zmienne stanu bierze się funkcję i jej pochodne do rzędu $n - 1$. por. Boyce i DiPrima §7.1

Przykład 1.1

Oscylator jako układ pierwszego rzędu

Zapisz równanie oscylatora $m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = 0$ w postaci $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ i sprawdź, że wielomian charakterystyczny A to (z dokładnością do czynnika) wielomian charakterystyczny równania.

- 1 Stan: $x_1 = y$ (położenie), $x_2 = \dot{y}$ (prędkość).
- 2 $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2$.
- 3 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m}$.

Wynik: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}$, a $\det(A - \lambda I) = \frac{1}{m}(m\lambda^2 + \gamma\lambda + k)$.

Sprawdzenie: pierwiastki to wykładniki z lekcji 4.1 i bieguny transmitancji z lekcji 4.4 Transformata Laplace'a ✓. Ten sam układ, trzy języki: równanie charakterystyczne, bieguny, wartości własne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Zapisz $y'' + 5y' + 6y = 0$ jako układ $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

- 2 Zapisz $y''' + 2y'' - y = 0$ jako układ trzech równań pierwszego rzędu.

- 3 Dwie masy m połączone sprężynami k (ściana-sprężyna-masa-sprężyna-masa-sprężyna-ściana) spełniają $m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$, $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2$. Zapisz układ w przestrzeni stanów. Jaki ma wymiar?

- 4 Obwód szeregowy RLC z napięciem $V(t)$: $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = V$. Zapisz go jako $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}V$ ze stanem $[q; i]$, gdzie $i = \dot{q}$.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Rozwiązanie przez wartości własne

Dla jednego równania $\dot{x} = ax$ rozwiązanie to $e^{at}x_0$. Zgadnijmy więc $\vec{x} = \vec{v}e^{\lambda t}$ ze stałym wektorem $\vec{v}$. Wstawienie daje $\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = A\vec{v}e^{\lambda t}$, czyli $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$: λ musi być wartością własną, a $\vec{v}$ wektorem własnym (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne).

ROZWIĄZANIE OGÓLNE (MACIERZ DIAGONALIZOWALNA)

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t},$$

gdzie $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$, a stałe c_k wyznacza warunek początkowy: $\vec{x}_0 = \sum c_k \vec{v}_k$, czyli rozkład $\vec{x}_0$ w bazie wektorów własnych. Każdy wektor własny to **mod**: dla rzeczywistej λ kierunek w przestrzeni stanów, wzdłuż którego układ tylko rośnie albo gaśnie z własnym wykładnikiem. (por. Boyce i DiPrima §7.5)

Gdy A nie jest diagonalizowalna (wartość własna wielokrotna z za małą liczbą wektorów własnych), pojawiają się wyrazy $t e^{\lambda t}$ (Boyce i DiPrima §7.8); wzór $e^{At} \vec{x}_0$ z części 3 działa zawsze.

Przykład 2.1

Dwa pokoje

Rozwiąż układ z prologu, $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ z $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ i $\vec{x}_0 = [1; 0]$.

- 1 $\det(A - \lambda I) = (\lambda + 3)^2 - 1 = 0$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$.
- 2 Wektory własne: dla -2 : $[1; 1]$ (oba pokoje tak samo ciepłe); dla -4 : $[1; -1]$ (różnica temperatur).
- 3 $[1; 0] = \frac{1}{2}[1; 1] + \frac{1}{2}[1; -1]$, więc $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.
- 4 $\vec{x}(t) = \frac{1}{2}[1; 1]e^{-2t} + \frac{1}{2}[1; -1]e^{-4t}$.

Wynik: $x_1 = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-4t})$, $x_2 = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-4t})$. Średnia gaśnie jak e^{-2t} , różnica dwa razy szybciej, jak e^{-4t} .

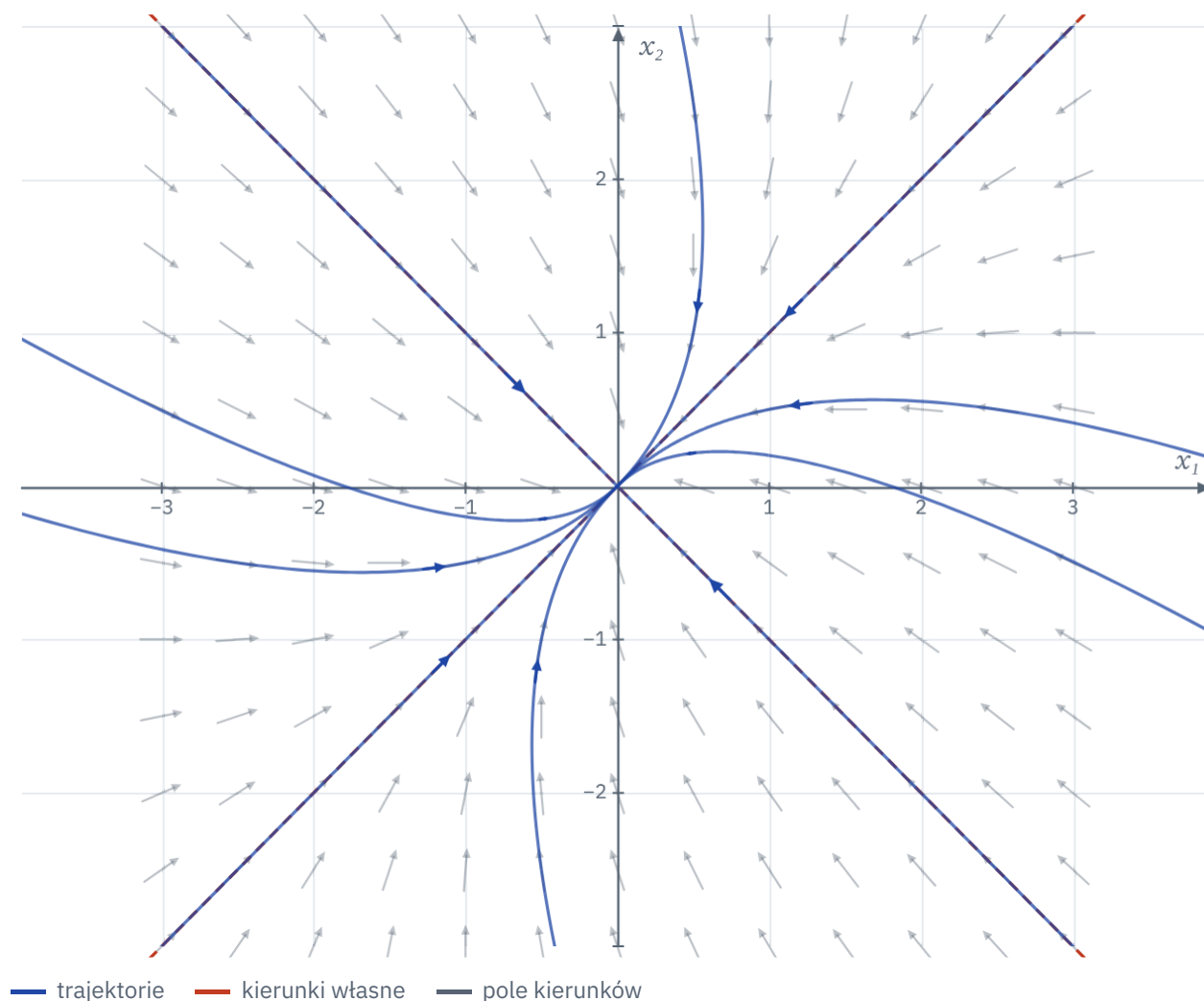
Sprawdzenie: $\vec{x}(0) = [1; 0] \checkmark$. Fizycznie: średnia temperatura spada tylko przez straty na zewnątrz (stała 2); różnica maleje przez straty i dodatkowo przez wymianę przez ścianę ($2 + 2 \cdot 1 = 4$) $\checkmark$. Dla $t = 0,5$: $x_1 \approx 0,252$, $x_2 \approx 0,116$.

Gdy wartości własne są zespolone, $\lambda = \sigma \pm i\omega$ (macierz rzeczywista daje je w parach sprzężonych), rozwiązania rzeczywiste to kombinacje $e^{\sigma t} \cos \omega t$ i $e^{\sigma t} \sin \omega t$: spirala w przestrzeni stanów, gasnąca lub rosnąca zależnie od znaku σ (dla $\sigma = 0$ zamknięta orbita, środek).

(por. Boyce i DiPrima §7.6) Tak wygląda słabo tłumiony oscylator z przykładu 1.1 na płaszczyźnie (położenie, prędkość).

SYMULACJA 1

Trajektorie układu $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ na płaszczyźnie stanów. Wybierz macierz albo ustaw jej elementy suwakami; kliknij w rysunek, żeby dodać trajektorię z tego punktu. Proste przerywane to kierunki własne (dla rzeczywistych wartości własnych). Odczyt podaje wartości własne, ślad i wyznacznik.



wartości własne -2,00; -4,00

tr A -6,00

det A 8,00

typ węzeł stabilny

Węzeł stabilny: obie wartości ujemne. Trajektorie dochodzą do zera wzdłuż wolniejszego kierunku własnego (bliżej zera wartości).

Stan na rysunku: $A = \begin{bmatrix} -3,0 & 1,0 \\ 1,0 & -3,0 \end{bmatrix}$; wartości własne -2,00; -4,00; węzeł stabilny.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 45 min

1 Rozwiąż $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ dla dowolnego $\vec{x}_0$. Jak wyglądają trajektorie?

2 Rozwiąż $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}_0 = [1; 0]$.

3 Znajdź wartości i wektory własne macierzy z zadania 1.1 i porównaj z pierwiastkami $\lambda^2 + 5\lambda + 6$. Co oznacza wektor własny $[1; -2]$?

4 Znajdź wartości własne $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i opisz ruch w przestrzeni stanów. Ile trwa jeden obrót spirali?

5 Dla mas z zadania 1.3 przyjmij $k/m = 1$. Pokaż, że szukając rozwiązań $\vec{q} = \vec{u}e^{i\omega t}$ równania $\ddot{\vec{q}} = -K\vec{q}$, gdzie $\vec{q} = [x_1; x_2]$ to same położenia, dostajesz ω^2 jako wartości własne K . Znajdź częstotści i mody i porównaj z lekcją 2.3.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Macierz wykładnicza

Dla liczby $e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots$ (lekcja 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe). Ten sam szereg ma sens dla macierzy kwadratowej, bo potęgi macierzy są określone:

🔧 MACIERZ WYKŁADNICZA

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots, \quad \vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0.$$

Szereg jest zbieżny dla każdej macierzy. Różniczkując wyraz po wyrazie: $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, więc $e^{At}\vec{x}_0$ spełnia równanie stanu i warunek początkowy.

(por. Boyce i DiPrima §7.7) Jeśli $A = VDV^{-1}$ (diagonalizacja, lekcja 2.3), to $A^k = VD^kV^{-1}$ i $e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1}$, gdzie e^{Dt} ma na przekątnej $e^{\lambda_k t}$. Przez transformatę Laplace'a: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$.

Przykład 3.1

Dwie macierze, w których szereg się urywa albo zamyka

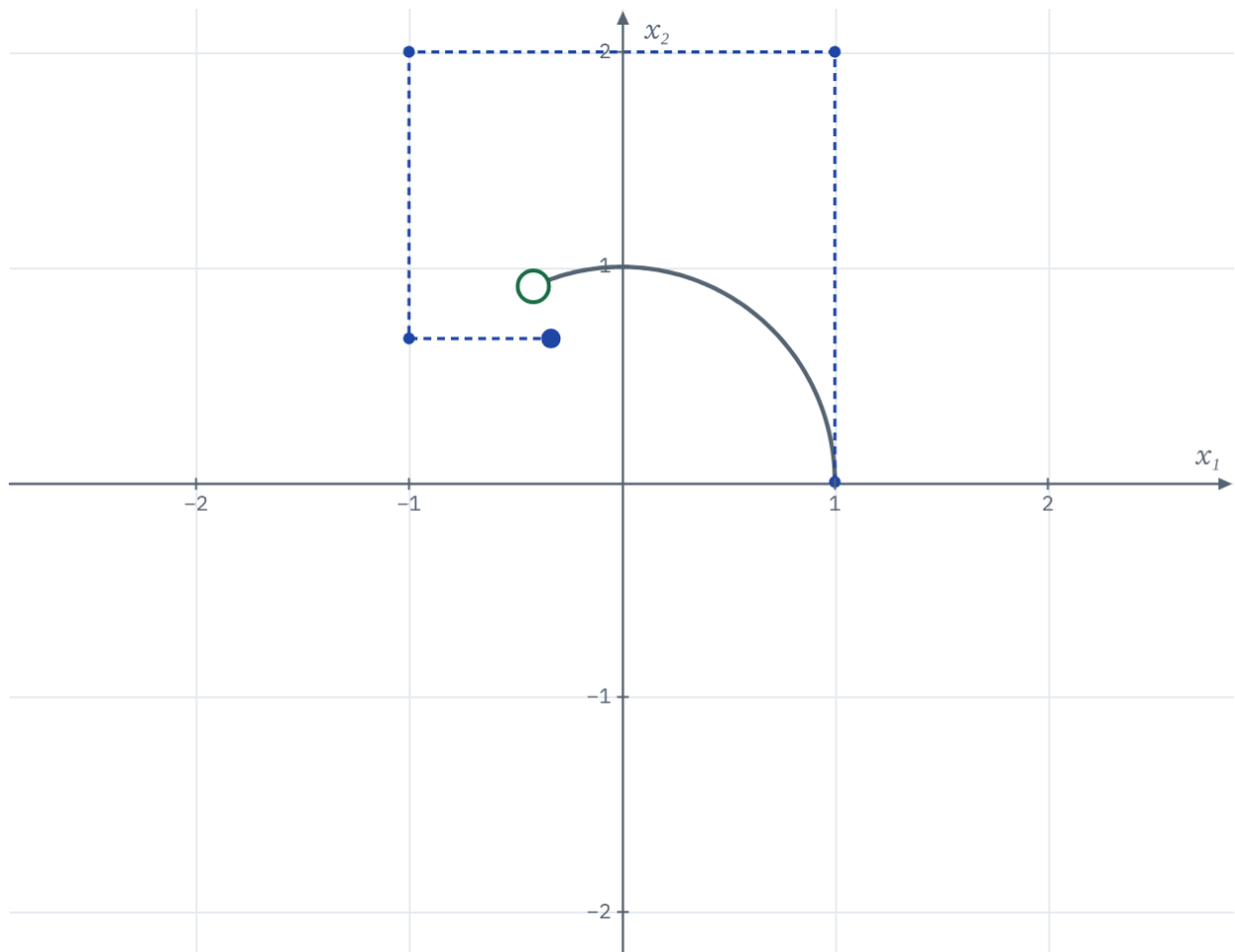
Oblicz e^{At} dla $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (cząstka swobodna: $\dot{y} = v, \dot{v} = 0$) i dla $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$.

- 1 Pierwsza: $A^2 = 0$, więc szereg kończy się po dwóch wyrazach: $e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Zatem $y = y_0 + v_0 t, v = v_0$.
- 2 Druga: $A^2 = -\omega^2 I, A^3 = -\omega^2 A, A^4 = \omega^4 I \dots$ Wyrazy z I układają się w szereg $\cos \omega t$, wyrazy z A w $\frac{\sin \omega t}{\omega}$: $e^{At} = I \cos \omega t + \frac{A}{\omega} \sin \omega t$.

Wynik: $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$: macierz obrotu o kąt ωt .

Sprawdzenie: pierwsza macierz nie jest diagonalizowalna (podwójna wartość własna 0, jeden wektor własny), a szereg działa mimo to ✓. Druga to dokładnie wzór Eulera $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory), w którym rolę i gra macierz A/ω , bo $(A/\omega)^2 = -I$ ✓.

SYMULACJA 2 Sumy częściowe szeregu $e^{At}\vec{x}_0$ dla wybranej macierzy. Kolejne punkty to $\vec{x}_0, (I + At)\vec{x}_0, (I + At + \frac{(At)^2}{2})\vec{x}_0 \dots$ Zmieniaj czas t i liczbę wyrazów N : dla dużych t potrzeba więcej wyrazów, ale szereg zawsze w końcu trafia w dokładne rozwiązanie (kółko).



— dokładne rozwiązanie $x(s), 0 \leq s \leq t$ — sumy częściowe $(S_0, S_1, \dots)$ — $x(t)$

S_N [-0,33; 0,67]

$x(t)$ dokładnie [-0,42; 0,91]

błąd $|S_N - x(t)|$ 0,2564

Obrót: wyrazy z I składają się w $\cos t$, wyrazy z A w $\sin t$. Pierwsze sumy częściowe wychodzą poza okrąg, potem do niego wracają.

Stan na rysunku: obrót $[0, -1; 1, 0]$, $t = 2,00$, $N = 4$; $S_N = [-0,33; 0,67]$, $x(t) = [-0,42; 0,91]$; błąd 0,2564.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

1 Oblicz e^{At} dla $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- 2 Sprawdź, że $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ z przykładu 3.1 spełnia $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.
- 3 Oblicz e^{At} dla macierzy dwóch pokoi z przykładu 2.1 wzorem $Ve^{Dt}V^{-1}$.
- 4 Oblicz $(sI - A)^{-1}$ dla $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i odwrotną transformatą Laplace'a odzyskaj e^{At} .
- 5 Dla $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ oblicz $e^A e^B$ i e^{A+B} . Dlaczego nie są równe, choć dla liczb $e^a e^b = e^{a+b}$?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Wejście, wyjście i transmitancja

Układ sterowany ma wejście $u(t)$ (siła, napięcie, ciąg silnika) i mierzone wyjście $y(t)$:

MODEL W PRZESTRZENI STANÓW

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu, \quad y = C\vec{x}.$$

Rozwiązanie (wzór Duhamela, odpowiednik czynnika całkującego z lekcji 4.1):

por. Boyce i DiPrima §7.9

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Po transformacie Laplace'a przy $\vec{x}_0 = \vec{0}$: $(sI - A)\vec{X} = BU$, więc $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Przed skróceniem mianownik H to $\det(sI - A)$: **bieguny transmitancji są wartościami własnymi macierzy A** . Zwykle są to wszystkie wartości własne, ale licznik może skrócić któryś czynnik; wtedy mod znika z $H(s)$, choć dalej jest w układzie (sterowalność i obserwowalność, 4.1 Sprzężenie od stanu, lokowanie biegunów i sterowalność i 4.2 Obserwator stanu i obserwowalność). Układ jest stabilny, gdy wszystkie wartości własne mają ujemną część rzeczywistą.

Feynman podkreśla, że ta sama matematyka opisuje bardzo różne układy: masy na sprężynach, obwody elektryczne, wahadła. FLP I-49-5 Dla układów n -tego rzędu łatwiej pracować z macierzami niż z jednym równaniem wysokiego rzędu: komputer liczy wartości własne i e^{At} w ułamku sekundy, a model może mieć wiele wejść i wyjść naraz.

Przykład 4.1

Od macierzy do transmitancji

Dla oscylatora $m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = u$ ze stanem $[y; \dot{y}]$ oblicz $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

- 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix}$, $B = [0; 1/m]$, $C = (1 \ 0)$.
- 2 $sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ k/m & s + \gamma/m \end{pmatrix}$, $\det = s^2 + \frac{\gamma}{m}s + \frac{k}{m}$.
- 3 Odwrotność 2×2 (lekcja 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań):
 $\frac{1}{\det} \begin{pmatrix} s + \gamma/m & 1 \\ -k/m & s \end{pmatrix}$. Element (1, 2) to $\frac{1}{\det}$, a $C(\dots)B$ wybiera go i mnoży przez $\frac{1}{m}$.

Wynik: $H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{\gamma}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k}$.

Sprawdzenie: to ta sama transmitancja co w lekcji 4.4 ✓; bieguny to wartości własne A z przykładu 1.1 ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

- 1 Oblicz $H(s)$ dla $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = [0; 1]$, $C = (1 \ 0)$.
- 2 Czy układ $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$ jest stabilny, mimo że jeden z elementów przekątnej jest dodatni?
- 3 Wzorem Duhamela znajdź odpowiedź $\dot{x} = -2x + u$, $x(0) = 0$, na skok $u = 1$.
- 4 Pokaż, że układ 2×2 jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{tr } A < 0$ i $\det A > 0$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Stan to położenie.”

Stan musi wystarczyć do przewidzenia przyszłości. Dla układu drugiego rzędu to położenie i prędkość: z samego położenia nie wiadomo, w którą stronę ciało się porusza.

× „ e^{At} to macierz z elementami $e^{a_{ij}t}$.”

Nie, nawet dla macierzy diagonalnej: poza przekątną $e^{0 \cdot t} = 1$, a w e^{At} stoją tam zera. Dla diagonalnej zgadza się tylko przekątna. Ogólnie e^{At} to szereg potęg macierzy; np. dla $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wychodzi $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a nie $\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

× „ $e^A e^B = e^{A+B}$.”

Gwarantuje ją dopiero $AB = BA$ (zadanie 3.5).

× „Dodatni element na przekątnej A oznacza niestabilność.”

Liczą się wartości własne (zadanie 4.2).

× „Układ z n zmiennymi stanu ma n niezależnych sposobów drgania.”

Ma n wartości własnych; rzeczywiste dają mody bez drgań, a zespolone przychodzą w parach i jedna para to jeden mod drgań. Dwie masy na sprężynach: stan 4-wymiarowy, dwa mody (zadanie 2.5).

6 Sprawdź się

1 Jak zapisać $y'' + py' + qy = 0$ jako układ pierwszego rzędu?

$$\vec{x} = [y; y'], A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

2 Jaką postać ma rozwiązanie $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ dla diagonalizowalnej A ?

$$\sum c_k \vec{v}_k e^{\lambda_k t}, \text{ gdzie } (\lambda_k, \vec{v}_k) \text{ to pary własne.}$$

3 Jak wyznaczyć stałe c_k ?

Rozkładając $\vec{x}_0$ w bazie wektorów własnych.

4 Zdefiniuj e^{At} .

$I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots$; wtedy $\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0$.

5 Jak policzyć e^{At} dla $A = VDV^{-1}$?

$V e^{Dt} V^{-1}$, z $e^{\lambda_k t}$ na przekątnej e^{Dt} .

6 Jaki jest związek wartości własnych A z biegunami transmitancji?

Bieguny są pierwiastkami $\det(sI - A)$, czyli wartościami własnymi A ; bez skróceń w $H(s)$ to wszystkie wartości własne.

7 Kiedy układ 2×2 jest stabilny?

Gdy $\text{tr } A < 0$ i $\det A > 0$.

UKŁADY JEDNORODNE

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}; \text{ rząd } n \rightarrow \text{stan } [y; y'; \dots; y^{(n-1)}]$$

$$\vec{x} = \sum c_k \vec{v}_k e^{\lambda_k t}, \quad A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k, \quad \vec{x}_0 = \sum c_k \vec{v}_k$$

$$\lambda = \sigma \pm i\omega: \text{spiralą, } e^{\sigma t} \cos \omega t, e^{\sigma t} \sin \omega t$$

$$e^{At} = \sum \frac{(At)^k}{k!} = V e^{Dt} V^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega t} \text{obrot o}$$

WEJŚCIE I WYJŚCIE

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu, \quad y = C\vec{x}$$

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B; \text{bieguny} \subseteq \text{wartości własne } A \text{ (równe, gdy nic się nie skraca)}$$

$$\text{stabilność: } \operatorname{Re} \lambda_k < 0; \quad 2 \times 2: \operatorname{tr} A < 0,$$

$$\det A > 0$$

$$e^A e^B = e^{A+B} \text{ gdy } AB = BA$$

Do przeczytania w podręcznikach

- **W. E. Boyce, R. C. DiPrima**, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*: 7.1 (wprowadzenie do układów), 7.5 (układy o stałych współczynnikach), 7.6 (zespolone wartości własne), 7.7 (macierze fundamentalne i e^{At}), 7.8 (wielokrotne wartości własne), 7.9 (układy niejednorodne).
- **Feynman**, t. I, 25-4 (analogie), 49-4 i 49-5 (wahadła sprzężone, układy liniowe i mody).

Układy nieliniowe (4.6 Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność) linearyzuje się w okolicy punktów równowagi, a wtedy cała ta lekcja mówi, co dzieje się w ich pobliżu. W automatyce przestrzeni stanów to punkt wyjścia: lokowanie biegunów i sterowalność (4.1 Sprzężenie od stanu, lokowanie biegunów i sterowalność), obserwator i obserwowalność (4.2 Obserwator stanu i obserwowalność) oraz regulator LQR (4.3 LQR: koszt zamiast biegunów).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$.

2. $\vec{x} = [y; y'; y'']$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Wielomian charakterystyczny $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$.

3. Stan $[x_1; x_2; \dot{x}_1; \dot{x}_2]$, wymiar 4. $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K & 0 \end{pmatrix}$ z $K = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (bloki 2×2).

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = [0; 1/L]$. Analogia z oscylatorem: $L \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow \gamma$, $1/C \leftrightarrow k$. FLP I-25-4

Zadania • część 2

1. $x_1 = x_{10}e^{2t}$, $x_2 = x_{20}e^{-t}$. Wzdłuż osi x_2 trajektorie wpadają do zera, wzdłuż osi x_1 uciekają. Pozostałe są hiperbolami $x_1x_2^2 = \text{const}$: **siodło**, równowaga niestabilna.

2. Wartości własne 3 $([1; 1])$ i -1 $([1; -1])$. $\vec{x} = \frac{1}{2}[1; 1]e^{3t} + \frac{1}{2}[1; -1]e^{-t}$. Dla dużych t dominuje mod e^{3t} : stan ustawia się wzdłuż $[1; 1]$ i rośnie.

3. -2 z wektorem $[1; -2]$ i -3 z $[1; -3]$, te same co pierwiastki. Wektor $[1; -2]$ oznacza stan, w którym prędkość to -2 razy położenie; wtedy $y = e^{-2t}$ i rzeczywiście $\dot{y} = -2y$. Dla równania $y'' + \dots$ wektory własne zawsze mają postać $[1; \lambda]$.

4. $(\lambda + 1)^2 + 4 = 0$: $\lambda = -1 \pm 2i$. Spirala zbieżna do zera: obrót z częstością 2 (okres $\pi \approx 3,14$), trajektoria to obracająca się elipsa zmniejszana jak e^{-t} . Po jednym obrocie odległość od zera spada $e^\pi \approx 23$ razy.

5. $-\omega^2 \vec{u} = -K \vec{u}$, czyli $K \vec{u} = \omega^2 \vec{u}$. $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ma wartości własne 1 $([1; 1])$: masy w fazie, środkowa sprężyna nie pracuje) i 3 $([1; -1])$: masy w przeciwfazie). Częstości 1 i $\sqrt{3} \approx 1,73$. To ta sama struktura co wahadła sprzężone z lekcji 2.3. W pełnej przestrzeni stanów 4×4 wartości własne to $\pm i$ i $\pm i\sqrt{3}$.

FLP I-49-4

Zadania • część 3

1. $\begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$: każda potęga macierzy diagonalnej jest diagonalna.

2. Lewa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Prawa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$.

3. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \frac{1}{2}V$, $D = \text{diag}(-2, -4)$. $e^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t} + e^{-4t} & e^{-2t} - e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} & e^{-2t} + e^{-4t} \end{pmatrix}$. Pierwsza kolumna to rozwiązanie z przykładu 2.1 $\checkmark$.

4. $sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, odwrotność $\begin{pmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix}$. Element po elemencie: $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$.

5. $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, iloczyn $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,543 & 1,175 \\ 1,175 & 1,543 \end{pmatrix}$. Równość $e^A e^B = e^{A+B}$ jest zagwarantowana, gdy $AB = BA$; bez przemienności zwykle zawodzi: tu $AB =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Przy mnożeniu szeregów kolejność czynników ma znaczenie.

Zadania · część 4

1. $\frac{1}{s^2+3s+2}$, bieguny -1 i -2 : stabilny.
2. Ślad -3 , wyznacznik $-4 + 6 = 2$, wartości własne -1 i -2 : stabilny. O stabilności decydują wartości własne, a nie znaki pojedynczych elementów.
3. $x = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$. Wartość ustalona $\frac{1}{2} = H(0)$ dla $H = \frac{1}{s+2}$ ✓.
4. Pierwiastki zespolone $\sigma \pm i\omega$: $\det = \sigma^2 + \omega^2 > 0$ zawsze, a $\text{tr} = 2\sigma$, więc stabilność $\iff \text{tr} < 0$.
Pierwiastki rzeczywiste: oba ujemne $\iff$ suma ujemna i iloczyn dodatni. W obu przypadkach warunek to $\text{tr} A < 0$ i $\det A > 0$. Dla $n > 2$ to już nie wystarcza; ogólny test daje kryterium Routha (2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe).

Matematyka · Układy równań liniowych i przestrzeń stanów. Źródła: W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, rozdz. 7.1, 7.5–7.9; R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 25-4, 49-4, 49-5. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.