

# Transformata Laplace'a

W chwili  $t = 0$  zamykasz wyłącznik, uderzasz młotkiem w belkę albo odpalasz silnik rakiety na dwie sekundy. Równania różniczkowe z takimi wymuszeniami i z warunkami początkowymi da się rozwiązać metodami z lekcji 4.1, ale żmudnie. Transformata Laplace'a zamienia je w równania algebraiczne: różniczkowanie staje się mnożeniem przez  $s$ , warunki początkowe wchodzi same, a włączenia i wyłączenia to proste mnożniki. Na koniec zobaczysz, że o zachowaniu układu decyduje kilka punktów na płaszczyźnie zespolonej: bieguny.

## CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

## ZADANIA

18 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

## ŹRÓDŁA

W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, rozdz. 6.1–6.6; *Feynmana wykłady z fizyki*, t. I, 25-1...25-5

## W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: włączamy obwód
- 1 Definicja i tablica transformat
- 2 Rozwiązywanie równań różniczkowych
- 3 Przesunięcia i wymuszenia nieciągłe
- 4 Transmitancja, odpowiedź impulsowa i bieguny
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

## Prolog: włączamy obwód

Kondensator jest rozładowany, a w chwili  $t = 0$  przez opornik podłączamy go do baterii. Ładunek spełnia  $RC \dot{q} + q = CV$  dla  $t \geq 0$ , z  $q(0) = 0$ . Dla takiego równania wystarczy czynnik całkujący (lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne). Ale jeśli baterię po sekundzie odłączymy, a zamiast opornika weźmiemy obwód  $RLC$ , robi się kłopotliwie: rozwiązania trzeba sklejać na przedziałach.

Transformata Fouriera z lekcji 4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca zamienia pochodną na mnożenie przez  $i\omega$ , ale ma dwie wady. Nie istnieje dla sygnałów rosnących jak  $e^t$ , a sygnał „od zawsze” nie pamięta warunków początkowych. Laplace naprawia obie: patrzy tylko na  $t \geq 0$  i dodaje tłumiący czynnik  $e^{-\sigma t}$ .

**Pytanie na start.** Jak zapisać jednym wzorem napięcie, które jest włączone tylko między  $t = 0$  a  $t = 1$  s, i jak obliczyć odpowiedź obwodu  $RC$  na nie bez sklejanie rozwiązań? Odpowiedź w przykładzie 3.1.

## Definicja i tablica transformat

### TRANSFORMATY LAPLACE'A

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Całka istnieje dla  $s > a$  (dla zespolonego  $s$ :  $\operatorname{Re} s > a$ ), jeśli  $f$  jest przedziałami ciągła i nie rośnie szybciej niż  $Me^{at}$ . (por. Boyce i DiPrima, tw. 6.1.2) Starsze polskie podręczniki piszą  $p$  zamiast  $s$ . Dla  $s = i\omega$  (jeśli całka tam zbiega, np. gdy  $a < 0$ ) i  $f = 0$  przy  $t < 0$  to transformata Fouriera z lekcji 4.3; ogólnie  $s = \sigma + i\omega$ , czyli Fourier sygnału stłumionego przez  $e^{-\sigma t}$ .

### Przykład 1.1

## Trzy podstawowe transformaty

Oblicz  $\mathcal{L}\{1\}$ ,  $\mathcal{L}\{e^{at}\}$  i  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}$ .

- 1  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$  dla  $s > a$ . Dla  $a = 0$ :  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ .
- 2 Ze wzoru Eulera (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory)  $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ , a wzór  $\frac{1}{s-a}$  działa także dla zespolonego  $a$ :  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i\omega}{s^2 + \omega^2}$ .

**Wynik:**  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ,  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ ,  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ .

**Sprawdzenie:** dla  $s \rightarrow \infty$  każda transformata dąży do zera, bo  $e^{-st}$  wycina wszystko poza okolicą  $t = 0$  ✓. Ta sama metoda daje  $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  (zadanie 1.3).

Transformata jest liniowa, a odwrotna transformata jest jednoznaczna (dla funkcji przedziałami ciągłych, z dokładnością do wartości w punktach nieciągłości), więc rozwiązując zadania, czytamy tablicę w obie strony:

| $f(t), t \geq 0$                                | $F(s)$                                                    |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $1; t^n$                                        | $\frac{1}{s}; \frac{n!}{s^{n+1}}$                         |
| $e^{at}$                                        | $\frac{1}{s-a}$                                           |
| $\sin \omega t; \cos \omega t$                  | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $e^{at} f(t)$                                   | $F(s-a)$                                                  |
| $u(t-c) f(t-c)$                                 | $e^{-cs} F(s)$                                            |
| $\delta(t-c)$                                   | $e^{-cs}$                                                 |
| $f'; f''$                                       | $sF - f(0); s^2 F - sf(0) - f'(0)$                        |
| $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$ | $F(s) G(s)$                                               |

Tu  $u(t-c)$  to **funkcja skoku** (Heaviside'a; nie mylić z wychyleniem  $u(t)$  z lekcji 4.1): 0 dla  $t < c$  i 1 dla  $t \geq c$ . (por. Boyce i DiPrima, tab. 6.2.1)

### ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 35 min

1 Oblicz  $\mathcal{L}\{3 - 2e^{4t}\}$ .

■ ■ ■

2 Oblicz  $\mathcal{L}\{t\}$  przez części.

■ ■ ■

3 Metodą z przykładu 1.1 oblicz  $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}$ .

■ ■ ■

4 Oblicz  $\mathcal{L}\{\sin^2 t\}$ .

■ ■ ■

5 Dla jakich  $s$  istnieje  $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$ ? Dlaczego  $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$  nie istnieje dla żadnego  $s$ ?

■ ■ ■

■■■ podstawowe   ■■■ średnie   ■■■ feynmanowskie

## 2 Rozwiązywanie równań różniczkowych

Najważniejszy wiersz tablicy to pochodna. Przez części:

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \left[ f(t) e^{-st} \right]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0),$$

(dla  $f$  ciągłej, rzędu wykładniczego  $a$ , z  $f'$  przedziałami ciągłą i  $s > a$ ; wtedy  $f(t)e^{-st} \rightarrow 0$ )

a stosując to dwa razy:  $\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F - sf(0) - f'(0)$ . Różniczkowanie staje się mnożeniem przez  $s$ , a warunek początkowy pojawia się sam. Przepis na liniowe równanie o stałych współczynnikach:

por. Boyce i DiPrima §6.2

1. przetransformuj obie strony, używając  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ;
2. rozwiąż algebraicznie względem  $Y(s)$ ;
3. rozłóż  $Y$  na ułamki proste (lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste) i odczytaj  $y(t)$  z tablicy.

### Przykład 2.1

## Równanie drugiego rzędu z warunkami początkowymi

Rozwiąż  $y'' + 3y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

- 1  $(s^2Y - s \cdot 1 - 0) + 3(sY - 1) + 2Y = 0$ .
- 2  $(s^2 + 3s + 2)Y = s + 3$ , czyli  $Y = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$ .
- 3 Ułamki proste:  $\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$  (metoda zakrywania: zakryj czynnik i wstaw jego pierwiastek:  $\frac{-1+3}{-1+2} = 2$ ,  $\frac{-2+3}{-2+1} = -1$ ).

**Wynik:**  $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$ .

**Sprawdzenie:**  $y(0) = 2 - 1 = 1 \checkmark$ ;  $y'(0) = -2 + 2 = 0 \checkmark$ . Mianownik  $s^2 + 3s + 2$  to wielomian charakterystyczny z lekcji 4.1, a jego pierwiastki  $-1$  i  $-2$  to wykładniki rozwiązania  $\checkmark$ .

### Przykład 2.2

## Ładowanie kondensatora

Rozwiąż równanie z prologu:  $RC \dot{q} + q = CV$  dla  $t \geq 0$ ,  $q(0) = 0$ .

- 1  $RC sQ + Q = \frac{CV}{s}$ , więc  $Q = \frac{CV}{s(1 + RCs)}$ .
- 2  $\frac{1}{s(1 + RCs)} = \frac{1}{s} - \frac{RC}{1 + RCs} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}$ .

**Wynik:**  $q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$ .

**Sprawdzenie:**  $q(0) = 0 \checkmark$ ,  $q(\infty) = CV \checkmark$  (kondensator naładowany do napięcia baterii). Po czasie  $RC$  ładunek osiąga  $1 - e^{-1} \approx 63\%$  wartości końcowej.

### ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Rozwiąż  $y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 3$ .

- 2 Rozwiąż  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

3 Rozwiąż  $y'' - y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

4 Rozwiąż  $y'' + 4y = \sin 2t$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$  (wymuszenie w rezonansie).

5 Kondensator  $100 \mu\text{F}$  ładuje się przez opornik  $10 \text{ k}\Omega$  z baterii  $5 \text{ V}$ . Po jakim czasie napięcie na nim przekroczy 95% napięcia baterii?

▀▀▀ podstawowe   ▀▀▀ średnie   ▀▀▀ feynmanowskie

### 3 Przesunięcia i wymuszenia nieciągłe

Dwa wiersze tablicy wyglądają podobnie, ale robią co innego. **Przesunięcie w  $s$ :** mnożenie przez  $e^{at}$  przesuwa transformatę,  $\mathcal{L}\{e^{at}f\} = F(s-a)$ , bo  $e^{at}e^{-st} = e^{-(s-a)t}$ . Stąd drgania gasnące:  $\mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ . **Przesunięcie w  $t$ :** opóźnienie sygnału o  $c$  i włączenie go dopiero w chwili  $c$  mnoży transformatę przez  $e^{-cs}$ :

$$\mathcal{L}\{u(t-c)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s).$$

Dowód: podstaw  $\tau = t - c$  w całce od  $c$  do  $\infty$ . Dzięki funkcji skoku każde wymuszenie włączane i wyłączane zapisujemy jednym wzorem: impuls trwający od 0 do  $T$  to  $u(t) - u(t - T)$ .

por. Boyce i DiPrima §6.3, 6.4

### Przykład 3.1

## Impuls prostokątny w obwodzie

### $RC$

Rozwiąż  $y' + y = u(t) - u(t - 1)$ ,  $y(0) = 0$  (obwód  $RC$  z  $RC = 1$  s, napięcie włączone na jedną sekundę,  $y$  to napięcie na kondensatorze w jednostkach napięcia baterii).

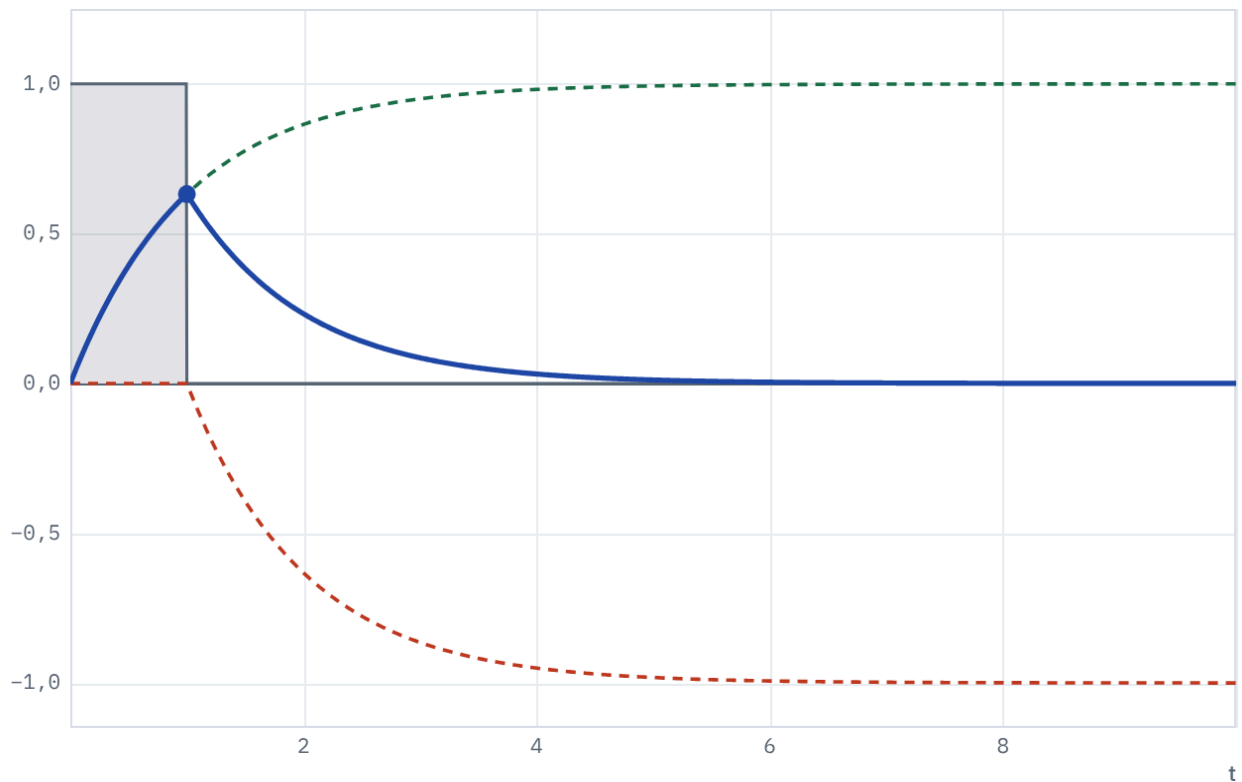
- 1  $(s + 1)Y = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$ , więc  $Y = \frac{1}{s(s + 1)} - e^{-s} \frac{1}{s(s + 1)}$ .
- 2  $\frac{1}{s(s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1}$ , czyli odwrotna transformata to  $1 - e^{-t}$  (przykład 2.2).
- 3 Czynniki  $e^{-s}$  opóźnia o 1:  $y = (1 - e^{-t}) - u(t - 1)(1 - e^{-(t-1)})$ .

**Wynik:** dla  $0 \leq t < 1$ :  $y = 1 - e^{-t}$ ; dla  $t \geq 1$ :  $y = (e - 1)e^{-t}$ .

**Sprawdzenie:** w  $t = 1$  oba wzory dają  $1 - e^{-1} \approx 0,632$  ✓ (napięcie na kondensatorze jest ciągłe). Po wyłączeniu napięcie maleje jak  $e^{-t}$ , tak jak przy rozładowaniu ✓. Odpowiedź to różnica dwóch odpowiedzi na skok, druga opóźniona (symulacja 1).

**SYMULACJA 1**

Obwód pierwszego rzędu  $\tau \dot{y} + y = x(t)$  pobudzany impulsem prostokątnym o czasie trwania  $T$ . Odpowiedź (ciągła linia) to odpowiedź na skok w chwili 0 minus odpowiedź na skok w chwili  $T$  (linie przerywane): tak działa czynnik  $e^{-Ts}$ . Zmieniaj  $T$  i stałą czasową  $\tau$ .



— wymuszenie  $x(t)$     — odpowiedź na skok w 0    - - - minus odpowiedź na skok w  $T$     — odpowiedź  $y(t)$

$y(T)$  0,632

$y(T + \tau)$  0,233

$T/\tau$  1,00

Odpowiedź to suma dwóch odpowiedzi na skok: dodatniej w chwili 0 i ujemnej, opóźnionej o  $T$ . W transformacie to czynnik  $(1 - \exp(-Ts))/s$ .

Stan na rysunku:  $T = 1,00$ ,  $\tau = 1,00$ ;  $y(T) = 0,632$ .

## ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 35 min

1 Oblicz  $\mathcal{L}\{e^{-t} \sin 3t\}$ .

2 Znajdź odwrotną transformatę  $\frac{s+2}{s^2+4s+13}$ .

3 Oblicz  $\mathcal{L}\{u(t-2)(t-2)\}$  i  $\mathcal{L}\{u(t-2)t\}$ . Dlaczego się różnią?

- 4 Oscylator bez tłumienia,  $y'' + y = u(t) - u(t - \pi)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ , dostaje stałą siłę przez czas  $\pi$  (pół okresu własnego). Znajdź  $y$  dla  $t > \pi$ . Jaka jest amplituda drgań po wyłączeniu siły?

▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ feynmanowskie

## 4 Transmitancja, odpowiedź impulsowa i bieguny

Weźmy układ  $m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = x(t)$  z zerowymi warunkami początkowymi. Po transformacie  $(ms^2 + \gamma s + k)Y = X$ , czyli

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad H(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k}.$$

$H$  to **transmitancja** układu (w lekcji 4.3 pisaliśmy  $H(\omega)$ ; to ta sama funkcja wzięta w  $s = i\omega$ ). Dla  $x = \delta(t)$  mamy  $X = 1$ , więc  $Y = H$ : transmitancja to transformata **odpowiedzi impulsowej**  $h(t)$ , odpowiedzi na uderzenie młotkiem. Twierdzenie o splocie (tablica, ostatni wiersz; por. lekcja 4.3: dla sygnałów zerowych przy  $t < 0$  granice  $-\infty$  i  $\infty$  zawężają się do 0 i  $t$ ) daje  $y = h * x$ : znając reakcję na jedno uderzenie, znasz reakcję na wszystko. (por. Boyce i DiPrima §6.5, 6.6) Feynman zapisuje lewą stronę takiego równania skrótowo jako operator liniowy  $\underline{L}(x)$  i z liniowości wyprowadza superpozycję. (FLP I-25-1, 25-2)

### 4.1 Bieguny decydują o zachowaniu

Bieguny transmitancji to pierwiastki mianownika. Rozkład na ułamki proste daje  $h(t)$  jako sumę wyrazów  $e^{p_k t}$ , po jednym na każdy biegun  $p_k$ . Biegun  $p = \sigma + i\omega$  daje wyraz  $e^{\sigma t} e^{i\omega t}$ , więc:

- część rzeczywista  $\sigma < 0$ : gaśnie (czas zaniku  $1/|\sigma|$ ),  $\sigma > 0$ : rośnie,  $\sigma = 0$ : ani nie gaśnie, ani nie rośnie wykładniczo (pojedynczy biegun); podwójny biegun na osi daje czynnik  $t$  i rośnie (zadanie 2.4);
- część urojona  $\omega \neq 0$ : drga z częstością  $\omega$  (bieguny przychodzą w parach sprzężonych  $\sigma \pm i\omega$ ).

Układ jest **stabilny** (odpowiedź impulsowa gaśnie), gdy wszystkie bieguny leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie ( $\operatorname{Re} p_k < 0$ ). Biegun pojedynczy na osi urojonej to granica stabilności: odpowiedź impulsowa nie gaśnie, ale i nie rośnie. To kryterium jest podstawą automatyki (2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe). Dla  $s = i\omega$  transmitancja daje odpowiedź na sinusoidę:  $|H(i\omega)|$  to krzywa rezonansowa z lekcji 4.1 (zadanie 4.4).

#### Przykład 4.1

### Uderzenie młotkiem

Układ  $\ddot{y} + 0,4\dot{y} + 4,04y = P \delta(t)$  (masa 1 kg dostaje w chwili 0 popęd  $P$ ). Znajdź bieguny i ruch.

1  $s^2 + 0,4s + 4,04 = (s + 0,2)^2 + 4$ : bieguny  $-0,2 \pm 2i$ .

2  $Y = \frac{P}{(s + 0,2)^2 + 2^2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{2}{(s + 0,2)^2 + 2^2}$ .

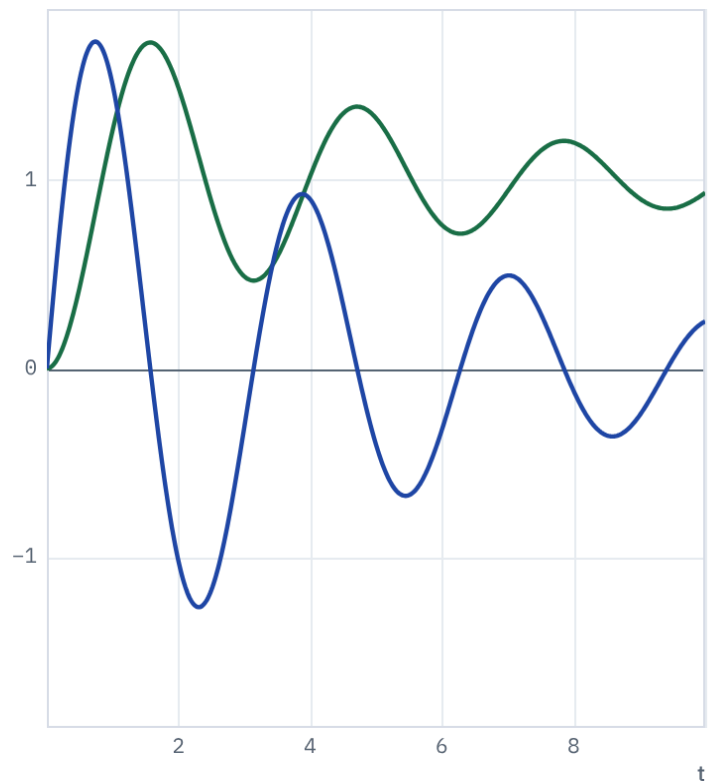
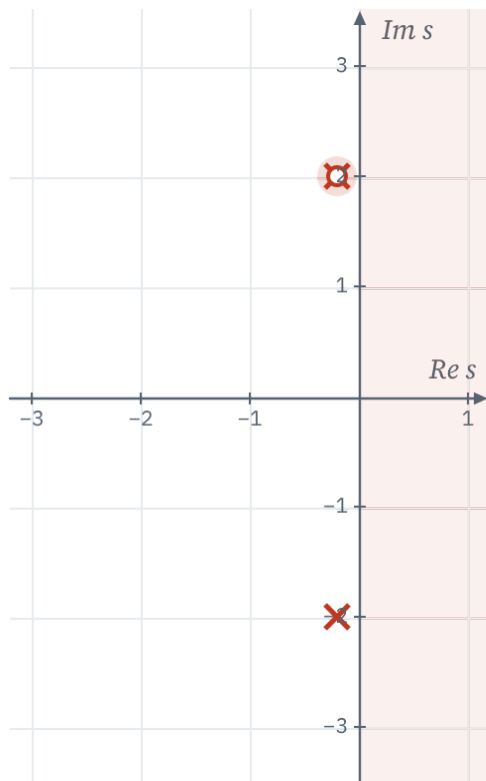
3 Przesunięcie w  $s$ :  $y = \frac{P}{2} e^{-0,2t} \sin 2t$ .

**Wynik:**  $y = \frac{P}{2} e^{-0,2t} \sin 2t$ : drgania z częstością 2 (część urojona bieguna), gasnące z czasem 5 s (odwrotność modułu części rzeczywistej).

**Sprawdzenie:**  $y(0) = 0$  i  $\dot{y}(0) = \frac{P}{2} \cdot 2 = P \checkmark$ : uderzenie nie przesuwa masy, tylko nadaje jej prędkość  $P/m$ .

## SYMULACJA 2 Bieguny na płaszczyźnie $s$ i odpowiedzi układu drugiego rzędu.

Przeciagnij biegun (drugi z pary porusza się symetrycznie) albo wybierz dwa bieguny rzeczywiste. Po prawej odpowiedź impulsowa  $h(t)$  i odpowiedź na skok. Przesuń biegun na prawą stronę osi urojonej i zobacz, co znaczy niestabilność.



— bieguny — odpowiedź impulsowa  $h(t)$  — odpowiedź na skok

bieguny  $-0,20 \pm 2,00i$

czas zaniku  $1/|\operatorname{Re} p|$  5,00

częstość drgań 2,00

układ **stabilny**

Biegun blisko osi urojonej: drgania gasną powoli, a odpowiedź na skok mocno przestrzeliwuje. Dla sinusoidy o częstości bliskiej  $\operatorname{Im} p$  to ostry rezonans.

Stan na rysunku: bieguny  $-0,20 \pm 2,00i$ ; układ stabilny.

Przydatne jest też **twierdzenie o wartości końcowej**: jeśli wszystkie bieguny  $sY$  leżą w lewej półpłaszczyźnie (wtedy  $y(t)$  ma granicę), to  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$ . Dla odpowiedzi na skok  $Y = H/s$ , więc wartość ustalona to  $H(0)$ : wzmocnienie stałoprądowe.

### ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

1 Gdzie leżą bieguny  $H = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$ ? Opisz odpowiedź impulsową bez liczenia jej.

- 2 Znajdź odwrotną transformatę  $\frac{1}{s(s+1)}$  na dwa sposoby: ułamkami prostymi i twierdzeniem o splocie.
- 3 Jaka jest wartość ustalona odpowiedzi na skok jednostkowy układu  $H = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$ ? Czy twierdzenie o wartości końcowej działa dla  $H = \frac{1}{s-1}$ ?
- 4 Pokaż, że  $|H(i\omega)|$  dla  $H = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k}$  to krzywa rezonansowa z lekcji 4.1 (podzielona przez  $F_0$ ). Gdzie na płaszczyźnie  $s$  leżą bieguny przy słabym tłumieniu i dlaczego wtedy rezonans jest ostry?

▀▀ podstawowe   ▀▀▀ średnie   ▀▀▀▀ feynmanowskie

## 5 Błędne intuicje

✗ „ $\mathcal{L}\{f'\} = sF$ , tak jak przy Fourierze.”

Brakuje  $-f(0)$ . Właśnie ten wyraz wnosi warunki początkowe, których transformata Fouriera nie zna.

✗ „ $\mathcal{L}\{u(t-c)f(t)\} = e^{-cs}F(s)$ .”

Reguła dotyczy  $u(t-c)f(t-c)$ , czyli sygnału przesuniętego w czasie. Inaczej trzeba najpierw zapisać  $f(t)$  jako funkcję  $t-c$  (zadanie 3.3).

✗ „Wartość końcową zawsze daje  $\lim_{s \rightarrow 0} sY$ .”

Tylko gdy granica istnieje, czyli bieguny  $sY$  leżą w lewej półpłaszczyźnie (zadanie 4.3).

✗ „Biegun z dodatnią częścią urojoną oznacza niestabilność.”

O stabilności decyduje część rzeczywista. Część urojona mówi tylko o częstotliwości drgań.

✗ „Transformata Laplace'a to zupełnie inne narzędzie niż Fourier.”

Dla sygnałów zaczynających się w  $t = 0$  to Fourier sygnału tłumionego przez  $e^{-\sigma t}$ ; na osi  $s = i\omega$  dostajesz z powrotem odpowiedź częstotliwościową.

## Sprawdź się

- 1 Zapisz definicję transformaty Laplace'a.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

- 2 Ile wynosi  $\mathcal{L}\{y''\}$ ?

$$s^2Y - sy(0) - y'(0).$$

- 3 Jakie są transformaty  $e^{at}$  i  $\sin \omega t$ ?

$$\frac{1}{s-a} \text{ i } \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

- 4 Co robi mnożnik  $e^{-cs}$ ?

Opóźnia sygnał o  $c$  i włącza go w chwili  $c$ .

- 5 Czym jest transmitancja?

$H = Y/X$  przy zerowych warunkach początkowych; transformata odpowiedzi impulsowej.

- 6 Kiedy układ jest stabilny?

Gdy wszystkie bieguny transmitancji mają ujemną część rzeczywistą.

- 7 Jak szybko znaleźć wartość ustaloną odpowiedzi na skok?

$H(0)$ , jeśli układ jest stabilny.

## TABLICA

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty f e^{-st} dt; \quad 1 \rightarrow \frac{1}{s}; \quad t^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}};$$

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$\sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad \cos \omega t \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$e^{at} f \rightarrow F(s-a); \quad u(t-c)f(t-c) \rightarrow e^{-cs}F;$$

$$\delta(t-c) \rightarrow e^{-cs}$$

$$f' \rightarrow sF - f(0); \quad f'' \rightarrow s^2F - sf(0) - f'(0)$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \rightarrow FG$$

## UKŁADY

przepis: transformuj  $\rightarrow$  rozwiąż na  $Y \rightarrow$   
ułamki proste  $\rightarrow$  tablica

$$H = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + k}; \quad Y = HX; \quad h = \mathcal{L}^{-1}\{H\};$$

$$y = h * x$$

biegun  $\sigma \pm i\omega$ :  $e^{\sigma t}$  razy drgania o częstotliwości  $\omega$

stabilność: wszystkie  $\operatorname{Re} p_k < 0$

wartość końcowa:  $\lim_{s \rightarrow 0} sY$  (gdy  
stabilny); skok:  $H(0)$

## Do przeczytania w podręcznikach

- **W. E. Boyce, R. C. DiPrima**, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*: 6.1 (definicja), 6.2 (zagadnienia początkowe), 6.3–6.4 (funkcje skokowe i wymuszenia nieciągłe), 6.5 (funkcje impulsowe), 6.6 (splot).
- **Feynman**, t. I, 25-1...25-5 (układy liniowe, superpozycja, analogie mechaniczno-elektryczne, impedancje szeregowe i równoległe).

*W lekcji 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeni stanów układ jednego równania zastąpimy układem równań pierwszego rzędu w przestrzeni stanów, a bieguny okażą się wartościami własnymi macierzy. W automatyce transmitancja, bieguny i odpowiedź impulsowa to język codzienny: sprzężenie zwrotne (1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta), schematy blokowe (2.1 Schematy blokowe i transmitancja pętli), stabilność (2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe).*



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

1.  $\frac{3}{s} - \frac{2}{s-4}$  dla  $s > 4$ .
2.  $\int_0^\infty t e^{-st} dt = \left[ -\frac{t e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$ .
3.  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ .
4.  $\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}$ .
5. Dla  $s > 3$ : wtedy  $e^{-(s-3)t}$  maleje. Dla  $e^{t^2}$  wykładnik  $t^2 - st$  rośnie do  $+\infty$  przy każdym ustalonym  $s$ , więc całka jest rozbieżna.  $e^{t^2}$  rośnie szybciej niż każda wykładnicza  $M e^{at}$ .

## Zadania • część 2

1.  $sY - 3 + 2Y = 0$ ,  $Y = \frac{3}{s+2}$ ,  $y = 3e^{-2t}$ .
2.  $s^2Y - s - 2 + Y = 0$ ,  $Y = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$ ,  $y = \cos t + 2 \sin t$ .
3.  $(s^2 - s - 2)Y = s - 1$ ,  $Y = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}$ ,  $y = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$ . Pierwiastek  $2 > 0$ : rozwiązanie rośnie.
4.  $(s^2 + 4)Y = \frac{2}{s^2+4}$ ,  $Y = \frac{2}{(s^2+4)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{(s^2+4)^2}$ , więc  $y = \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t \cos 2t)$ . Amplituda rośnie liniowo z czasem, jak w lekcji 4.1. Podwójne bieguny  $\pm 2i$  dają czynnik  $t$ .
5.  $RC = 10^4 \cdot 10^{-4} = 1$  s.  $1 - e^{-t} = 0,95$  dla  $t = \ln 20 \approx 3,0$  s, czyli po ok.  $3RC$ .

## Zadania • część 3

1.  $\frac{3}{(s+1)^2+9}$ .
2. Uzupełnij do kwadratu:  $s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 9$ . To  $\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$ , czyli  $\cos 3t$  przesunięty w  $s$  o  $-2$ :  $e^{-2t} \cos 3t$ .
3. Pierwsza:  $e^{-2s} \frac{1}{s^2}$  (rampa opóźniona o 2). Druga:  $u(t-2)t = u(t-2)[(t-2)+2]$ , więc  $e^{-2s} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \right)$ . Reguła przesunięcia wymaga, żeby funkcja była zapisana jako funkcja  $t-2$ ; druga zaczyna się od wartości 2, a nie 0.
4.  $Y = \frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}$ , a  $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$ , czyli  $1 - \cos t$ . Zatem  $y = (1 - \cos t) - u(t-\pi)(1 - \cos(t-\pi))$ . Dla  $t > \pi$ :  $(1 - \cos t) - (1 + \cos t) = -2 \cos t$ . Amplituda 2: siła działała dokładnie przez pół okresu, zgodnie z ruchem, czyli dwa razy więcej niż przy stałej sile działającej bez przerwy ( $1 - \cos t$  drga z amplitudą 1 wokół nowego położenia równowagi  $y = 1$ ).

## Zadania • część 4

1.  $-1 \pm 2i$ . Drgania z częstością 2, gasnące jak  $e^{-t}$ ; układ stabilny. (Rachunek:  $h = \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t$ .)
2. Ułamki:  $\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$ , czyli  $1 - e^{-t}$ . Splot:  $\frac{1}{s} \leftrightarrow 1$ ,  $\frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t}$ , a  $\int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t} \checkmark$ . Mnożenie przez  $\frac{1}{s}$  to całkowanie od 0 do  $t$ .

3.  $H(0) = \frac{6}{6} = 1$ . Dla  $\frac{1}{s-1}$  biegun  $+1$  leży w prawej półpłaszczyźnie, odpowiedź na skok to  $e^t - 1 \rightarrow \infty$ . Formalnie  $\lim_{s \rightarrow 0} sY = H(0) = -1$ , wynik bez sensu: twierdzenie wymaga stabilności.
4.  $H(i\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\gamma\omega}$ ,  $|H| = \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$  ✓. Bieguny:  $-\frac{\gamma}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$ . Przy małym  $\gamma$  leżą tuż obok osi urojonej, blisko  $\pm i\omega_0$ . Gdy  $\omega$  przechodzi wzdłuż osi obok bieguna,  $|H| = \frac{1}{m|i\omega - p_1||i\omega - p_2|}$ ; odległość od dalszego bieguna jest prawie stała ( $\approx 2\omega_0$ ), więc  $|H|$  jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalne do odległości od bliższego bieguna i gwałtownie rośnie. Blżej osi, ostrzejszy szczyt.

---

Matematyka · Transformata Laplace'a. Źródła: W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, rozdz. 6.1–6.6; R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 25-1...25-5. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.