

Transformata Fouriera i delta Diraca

Kłaśnięcie w dłonie nie jest okresowe, a jednak ma widmo: zawiera prawie wszystkie częstotliwości naraz. Szereg Fouriera opisuje sygnały, które się powtarzają; transformata Fouriera robi to samo dla pojedynczego impulsu. Zobaczysz, dlaczego krótki impuls musi mieć szerokie pasmo, czym jest „funkcja” równa zero wszędzie poza jednym punktem, a mimo to o polu 1, i jak jedno mnożenie zastępuje skomplikowaną całkę zwaną splotem.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 48-2...48-4, 50-2;
E. Kreyszig,
Advanced Engineering Mathematics, wyd. 10, §11.7–11.9, §6.4

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: widmo kłaśnięcia
- 1 Od szeregu do całki
- 2 Własności transformaty
- 3 Delta Diraca
- 4 Splot i układy liniowe
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: widmo kłaśnięcia

W lekcji 4.2 Szeregi Fouriera rozłożyliśmy sygnał okresowy na harmoniczne: częstotliwości ω , 2ω , 3ω ... Im dłuższy okres T , tym gęściej leżą harmoniczne, bo odstęp między nimi to $\omega = 2\pi/T$. Pojedynczy impuls to sygnał o okresie nieskończenie długim. Harmoniczne zlewają się wtedy w ciągle widmo.

Feynman pokazuje to na fali radiowej. Fala nośna o częstości ω_c , której amplituda zmienia się z częstością ω_m , to suma trzech czystych tonów: ω_c oraz dwóch **wstęg bocznych** $\omega_c \pm \omega_m$. Szybsza modulacja zajmuje szersze pasmo. FLP I-48-3 Impuls to skrajna modulacja: sygnał włącza się i zaraz wyłącza.

Pytanie na start. Nadajnik wysyła impulsy trwające 1 ns. Jakie pasmo częstotliwości muszą przenosić kable i wzmacniacze? Odpowiedź w przykładzie 1.1.

Od szeregu do całki

Weźmy zespoloną postać szeregu z lekcji 4.2 dla okresu T : $f(t) = \sum c_n e^{i\omega_n t}$ z $\omega_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$ i $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$. Oznaczmy $F(\omega_n) = T c_n$ i odstęp $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ (całkę po okresie liczymy tu od $-T/2$ do $T/2$, co dla funkcji okresowej daje to samo co od 0 do T). Wtedy

$$f(t) = \sum_n \frac{F(\omega_n)}{T} e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_n F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega.$$

Dla $T \rightarrow \infty$ suma z $\Delta\omega$ staje się całką, jak suma Riemanna (lekcja 1.5 Całki), a granice całki w c_n rozszerzają się do $\pm\infty$ (całka niewłaściwa):

TRANSFORMATA FOURIERA I TRANSFORMATA ODWROTNA

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

$F(\omega)$ to „ilość” częstości ω w sygnale: liczba zespolona, której moduł mówi o amplitudzie, a argument o fazie. Uwaga na umowy: czynnik $\frac{1}{2\pi}$ bywa rozłożony po równo ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ w obu wzorach), znak w wykładniku bywa odwrotny, a inżynierowie często używają częstotliwości ν zamiast ω . Treść się nie zmienia, ale wzory z różnych źródeł nie pasują do siebie bez przeliczenia. por. Kreyszig §11.9

Przykład 1.1

Impuls prostokątny

Sygnał ma wartość 1 dla $|t| < \frac{\tau}{2}$ i 0 poza tym przedziałem. Oblicz jego transformatę i odpowiedz na pytanie z prologu.

- 1 $F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega} = \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}$ (wzór Eulera, lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory).
- 2 $F(0) = \tau$ (granica, albo wprost pole pod impulsem). Pierwsze zera: $\frac{\omega\tau}{2} = \pm\pi$, czyli $\omega = \pm \frac{2\pi}{\tau}$.
- 3 W częstotliwościach $\nu = \omega/2\pi$ główny listek widma sięga $\nu = \frac{1}{\tau}$. Dla $\tau = 1$ ns to 1 GHz.

Wynik: $F(\omega) = \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}$; impuls 1 ns potrzebuje pasma rzędu 1 GHz.

Sprawdzenie: jednostki: F ma wymiar $[f] \cdot s$, tak jak τ . Dwa razy krótszy impuls ma dwa razy szersze widmo i dwa razy niższe $\surd$ (pole pod F wynosi zawsze $2\pi f(0) = 2\pi$).

Przykład 1.2

Gasnące drgania i szerokość linii widmowej

Oblicz transformatę sygnału $f(t) = e^{-at}$ dla $t \geq 0$ (i 0 dla $t < 0$), $a > 0$. Gdzie $|F|^2$ spada do połowy?

- 1 $F(\omega) = \int_0^\infty e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega}$.
- 2 $|F|^2 = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$: maksimum $\frac{1}{a^2}$ w $\omega = 0$, połowa przy $\omega = \pm a$.

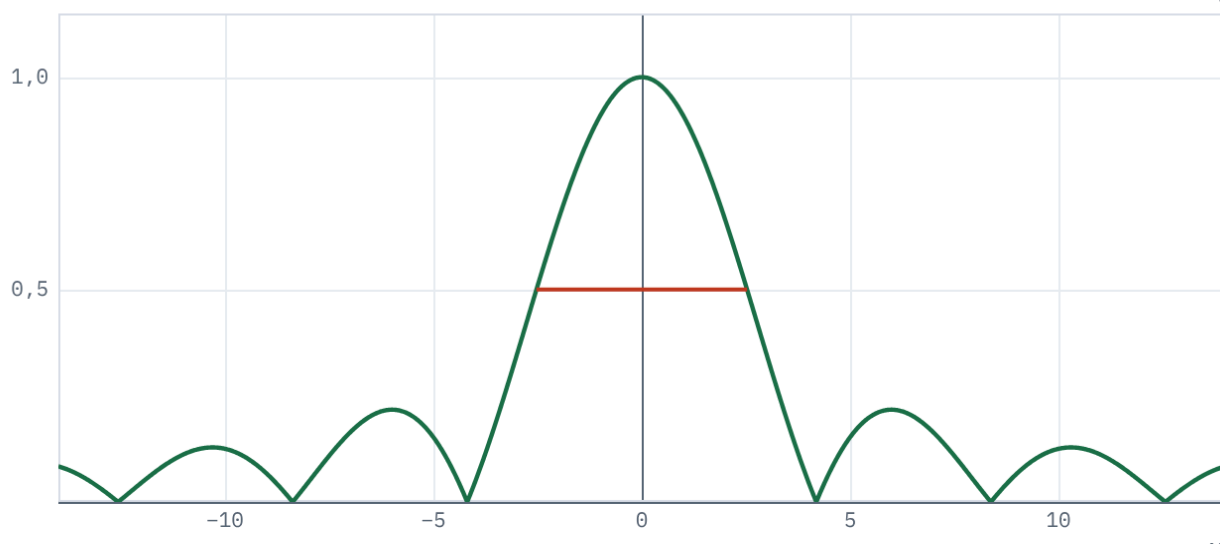
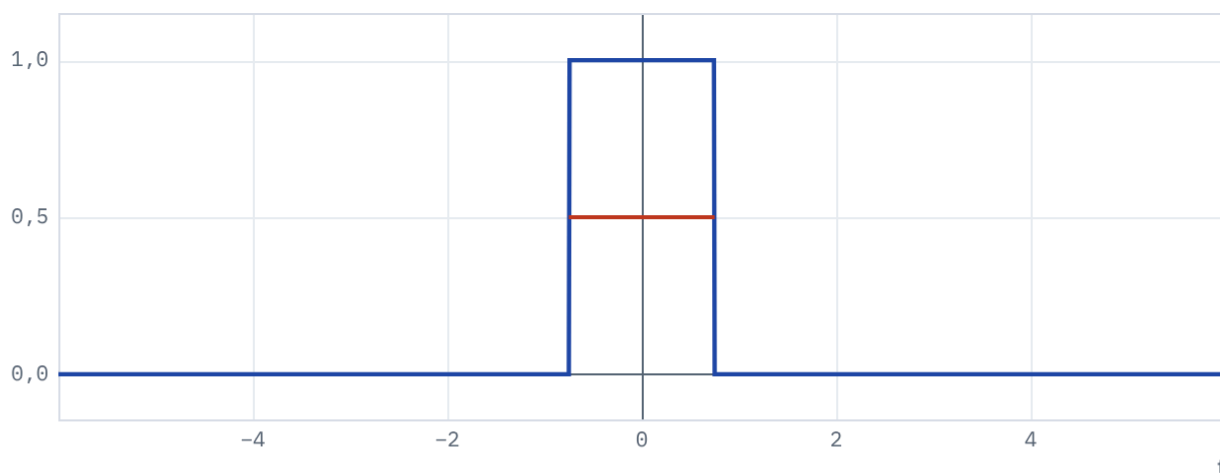
Wynik: $F = \frac{1}{a+i\omega}$; szerokość połówkowa $|F|^2$ to $2a$. (Szerokość połówkowa samego $|F|$, używana w symulacji 1, to $2\sqrt{3}a$.)

Sprawdzenie: drgania gasnące jak $e^{-at} \cos \omega_0 t$ mają to samo widmo przesunięte do $\pm\omega_0$ (część 2). Szybsze gaśnięcie (większe a) daje szerszą linię: tak szerokość linii widmowej atomu mierzy czas życia stanu wzbudzonego. Blisko rezonansu kwadrat krzywej rezonansowej oscylatora z lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne (moc) ma ten sam kształt $\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}$, z $a = \gamma/2m$: słabo tłumiony oscylator to sygnał, który gaśnie powoli, więc ma wąską linię.

1.1 Krótko w czasie, szeroko w częstotliwości

Dla impulsu gaussowskiego $f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ transformata to znowu krzywa Gaussa, $F(\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$ (zadanie 1.3), o szerokości $\frac{1}{\sigma}$. Iloczyn szerokości w czasie i w częstotliwości nie zależy od σ . To ogólna reguła: **im krótszy sygnał, tym szersze widmo**, a iloczyn $\Delta t \cdot \Delta\omega$ dla rozsądnych, gładkich impulsów jest rzędu kilku (ściśle ograniczenie $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$ zachodzi dla szerokości średniokwadratowych). W mechanice kwantowej, gdzie liczba falowa to pęd podzielony przez $\hbar$ (a częstota to energia podzielona przez $\hbar$), ta sama matematyka daje zasadę nieoznaczoności (Dział 17: Amplitudy prawdopodobieństwa).

SYMULACJA 1 Impuls i moduł jego transformaty. Wybierz kształt i zmieniaj czas trwania τ . Odczyt podaje szerokości połówkowe Δt (impulsu) i $\Delta \omega$ (widma) oraz ich iloczyn. Iloczyn zależy od kształtu, ale nie od τ . Paczka falowa to gaussowska obwiednia razy $\cos 5t$: jej widmo leży przy $\omega = \pm 5$.



— impuls $f(t)$ — $|F(\omega)|$ (skala do maksimum) — szerokość połówkowa

Δt 1,500

$\Delta \omega$ 5,055

$\Delta t \cdot \Delta \omega$ 7,58

Widmo ma listki; pierwsze zera przy $\omega = \pm 2\pi/\tau$. Krótszy impuls, szerszy główny listek.

Stan na rysunku: impuls prostokątny, $\tau = 1,50$; $\Delta t = 1,500$, $\Delta \omega = 5,055$, $\Delta t \cdot \Delta \omega = 7,58$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

6 zadań · ok. 50 min

- 1 Oblicz transformatę impulsu o wartości 1 dla $|t| < 1$ i 0 poza tym przedziałem. Ile wynosi $F(0)$ i gdzie leży pierwsze zero?

2 Pokaż, że $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f \, dt$, i sprawdź to na przykładzie 1.2.

3 Oblicz transformatę $e^{-t^2/2}$.

4 Oblicz transformatę $e^{-a|t|}$ ($a > 0$).

5 Ile mniej więcej wynosi pasmo potrzebne do przesłania impulsów trwających $1 \, \mu s$? Ile impulsów na sekundę można w przybliżeniu wysłać przez kanał o paśmie 10 MHz?

6 Pokaż, że dla rzeczywistego f jest $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$, a jeśli dodatkowo f jest parzysta, to F jest rzeczywista i parzysta.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

2 Własności transformaty

Kilka reguł pozwala liczyć transformaty bez całkowania, z tych już znanych. Każdą sprawdza się podstawieniem w całce definicyjnej. (por. Kreyszig §11.9)

🔧 REGUŁY RACHUNKOWE (TRANSFORMATA FUNKCJI F TO F)

- liniowość: $\alpha f + \beta g \rightarrow \alpha F + \beta G$;
- przesunięcie w czasie: $f(t - t_0) \rightarrow e^{-i\omega t_0} F(\omega)$ (moduł widma bez zmian);
- skalowanie: $f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$ (krótszy sygnał, szersze widmo);
- modulacja: $f(t) e^{i\omega_0 t} \rightarrow F(\omega - \omega_0)$, a więc $f(t) \cos \omega_0 t \rightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$;
- pochodna: $f'(t) \rightarrow i\omega F(\omega)$ (różniczkowanie staje się mnożeniem);
- energia (twierdzenie Plancherela): $\int |f|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int |F|^2 \, d\omega$.

Reguła modulacji to wstęgi boczne Feynmana: obwiednia o widmie F mnożona przez nośną $\cos \omega_0 t$ daje dwie kopie F wokół $\pm \omega_0$. (FLP I-48-3) Reguła pochodnej jest powodem, dla którego transformaty upraszczają równania różniczkowe: $u'' + u = g$ przechodzi w $(1 - \omega^2)U = G$, równanie algebraiczne. To samo robi transformata Laplace'a (4.4 Transformata Laplace'a). Twierdzenie Plancherela jest ciągłą wersją twierdzenia o energii z lekcji 4.2.

Przykład 2.1

Paczka falowa

Oblicz transformatę paczki $f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)} \cos \omega_0 t$ i jej szerokość w częstotliwości. Ile trwa paczka, której widmo ma szerokość połówkową 10^{12} s^{-1} ?

- 1 Transformata obwiedni: $\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$ (punkt 1.1).
- 2 Modulacja: $F(\omega) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} \left(e^{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2/2} + e^{-\sigma^2(\omega+\omega_0)^2/2} \right)$: dwa garby przy $\pm\omega_0$, każdy o szerokości rzędu $\frac{1}{\sigma}$.
- 3 Szerokości połówkowe: obwiedni $\Delta t = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2,355\sigma$, garbu $\Delta\omega = \frac{2,355}{\sigma}$. Iloczyn $\Delta t \cdot \Delta\omega = 8\ln 2 \approx 5,55$.
- 4 $\Delta t \approx 5,55/10^{12} \approx 5,5 \cdot 10^{-12} \text{ s}$.

Wynik: dwa gaussowskie garby przy $\pm\omega_0$; $\Delta t \cdot \Delta\omega \approx 5,55$; paczka trwa ok. 5,5 ps.

Sprawdzenie: dla impulsu prostokątnego ten sam iloczyn szerokości połówkowych to ok. 7,58, dla wykładniczego ok. 2,40 (symulacja 1). Liczba zależy od kształtu i definicji szerokości, ale zawsze jest rzędu kilku ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 35 min

- 1 Impuls prostokątny z przykładu 1.1 przesuwamy w czasie o t_0 . Jak zmienia się F , a jak $|F|$? ■ ■ ■
- 2 Stacja radiowa AM nadaje na nośnej 1 MHz dźwięk o częstotliwościach do 5 kHz. Jakie pasmo zajmuje? Co najmniej jak gęsto można rozmieścić stacje? ■ ■ ■
- 3 Z reguły pochodnej i zadania 1.3 wyznacz transformatę $t e^{-t^2/2}$. ■ ■ ■
- 4 Sprawdź twierdzenie Plancherela dla $f = e^{-a|t|}$ (zadanie 1.4). ■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Ściśnijmy impuls prostokątny z przykładu 1.1, ale tak, żeby jego pole zostało równe 1: wysokość $\frac{1}{\tau}$, szerokość τ . Jego transformata to $\frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau}$, a dla $\tau \rightarrow 0$ dąży do 1 dla każdego ω . Granica takich impulsów to **delta Diraca** $\delta(t)$: „funkcja” równa zero dla $t \neq 0$, nieskończenie wysoka w zerze, o polu 1. Żadna zwykła funkcja tak się nie zachowuje; poprawnie definiuje się ją przez to, co robi pod całką.

DELTA DIRACA

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) g(t) dt = g(a) \quad \text{dla każdej ciągłej } g.$$

Delta „wyłuskuje” wartość funkcji w jednym punkcie. Wynikają z tego: $\int \delta = 1$; $\delta(\lambda t) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(t)$; pochodna skoku jednostkowego (funkcji Heaviside'a) to δ . Transformaty:

$$\delta(t) \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 2\pi \delta(\omega), \quad \cos \omega_0 t \rightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Widmo delty jest płaskie: idealnie krótki impuls zawiera wszystkie częstotliwości po równo.

Kłaśnięcie, uderzenie młotkiem albo trzask iskry są jego przybliżeniami, i dlatego uderzenie młotkiem w konstrukcję pobudza wszystkie jej częstotliwości własne naraz (tak bada się mosty i karoserie). Odwrotnie, stały sygnał ma całą moc w $\omega = 0$, a czysty cosinus w dwóch punktach $\pm\omega_0$: widmo z lekcji 4.2 to ciąg delt.

Przykład 3.1

Ładunek punktowy jako gęstość

Gęstość ładunku punktowego q w początku układu zapisz deltą trójwymiarową i wyjaśnij, jak pogodzić $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 0$ (dla $r \neq 0$, lekcja 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja) ze strumieniem 4π (lekcja 3.6 Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa).

- 1 $\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$: całka po dowolnej objętości zawierającej zero to 1, po objętości bez zera 0. Gęstość: $\rho = q\delta^3(\vec{r})$, całkowity ładunek q .
- 2 Twierdzenie Gaussa: strumień $\vec{r}/r^3$ przez każdą powierzchnię wokół zera to 4π , czyli $\iiint \nabla \cdot (\vec{r}/r^3) dV = 4\pi$ dla każdej objętości z zerem i 0 bez zera.
- 3 Tak zachowuje się $4\pi\delta^3(\vec{r})$: $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta^3(\vec{r})$.

Wynik: $\rho = q\delta^3(\vec{r})$ i $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta^3(\vec{r})$: dywergencja jest zerowa wszędzie poza zerem, a całe źródło siedzi w jednym punkcie.

Sprawdzenie: z $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ dostajemy $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$: pierwsze równanie Maxwella ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Oblicz $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)t^2 dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cos t dt$ i $\int_0^1 \delta(t-3) dt$.
■ ■ ■
- 2 Oblicz transformatę $\delta(t-t_0)$. Co mówi jej moduł, a co faza?
■ ■ ■
- 3 Z transformaty $1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$ i reguły modulacji wyprowadź transformatę $\cos \omega_0 t$. Sprawdź wynik transformatą odwrotną.
■ ■ ■
- 4 Pokaż, że $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$, całkując obie strony z funkcją testową g . Dlaczego nie można powiedzieć „obie są nieskończone w zerze, więc są równe”?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Splot i układy liniowe

Rozważmy układ liniowy niezmienny w czasie: wzmacniacz, filtr, oscylator, przyrząd pomiarowy. Niech $h(t)$ będzie jego odpowiedzią na deltę, czyli na krótkie uderzenie w chwili 0: **odpowiedzią**

impulsową. Dowolny sygnał wejściowy $x(t)$ to suma (całka) delt o wagach $x(s)$ w chwilach s : $x(t) = \int x(s) \delta(t-s) ds$. Z liniowości i niezmienności w czasie odpowiedź to suma przesuniętych odpowiedzi impulsowych:

SPLOT I TWIERDZENIE O SPLOCIE

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds, \quad Y(\omega) = X(\omega) H(\omega).$$

Transformata splotu to iloczyn transformat.

(por. Kreyszig §11.9 (tam z czynnikiem $\sqrt{2\pi}$, bo inna umowa)) $H(\omega)$ to **transmitancja** (funkcja przenoszenia): układ mnoży każdą częstotliwość osobno przez $H(\omega)$. Krzywa rezonansowa $R(\omega)$ z lekcji 4.1 to właśnie $F_0 |H(\omega)|$ oscylatora.

Dowód twierdzenia jest krótki: $Y(\omega) = \iint x(s) h(t-s) e^{-i\omega t} ds dt$; podstawiamy $t = s + u$ i całka rozpada się na iloczyn $\int x(s) e^{-i\omega s} ds \cdot \int h(u) e^{-i\omega u} du$. Obraz splotu: odbij h , przesunij o t , pomnóż przez x i weź pole. Każda średnia krocząca, rozmycie zdjęcia, pogłos sali czy skończona rozdzielczość przyrządu to splot.

Przykład 4.1

Dwa prostokąty

Oblicz splot impulsu prostokątnego o szerokości 1 i wysokości 1 (wyśrodkowanego w zerze) z samym sobą. Sprawdź wynik twierdzeniem o splocie.

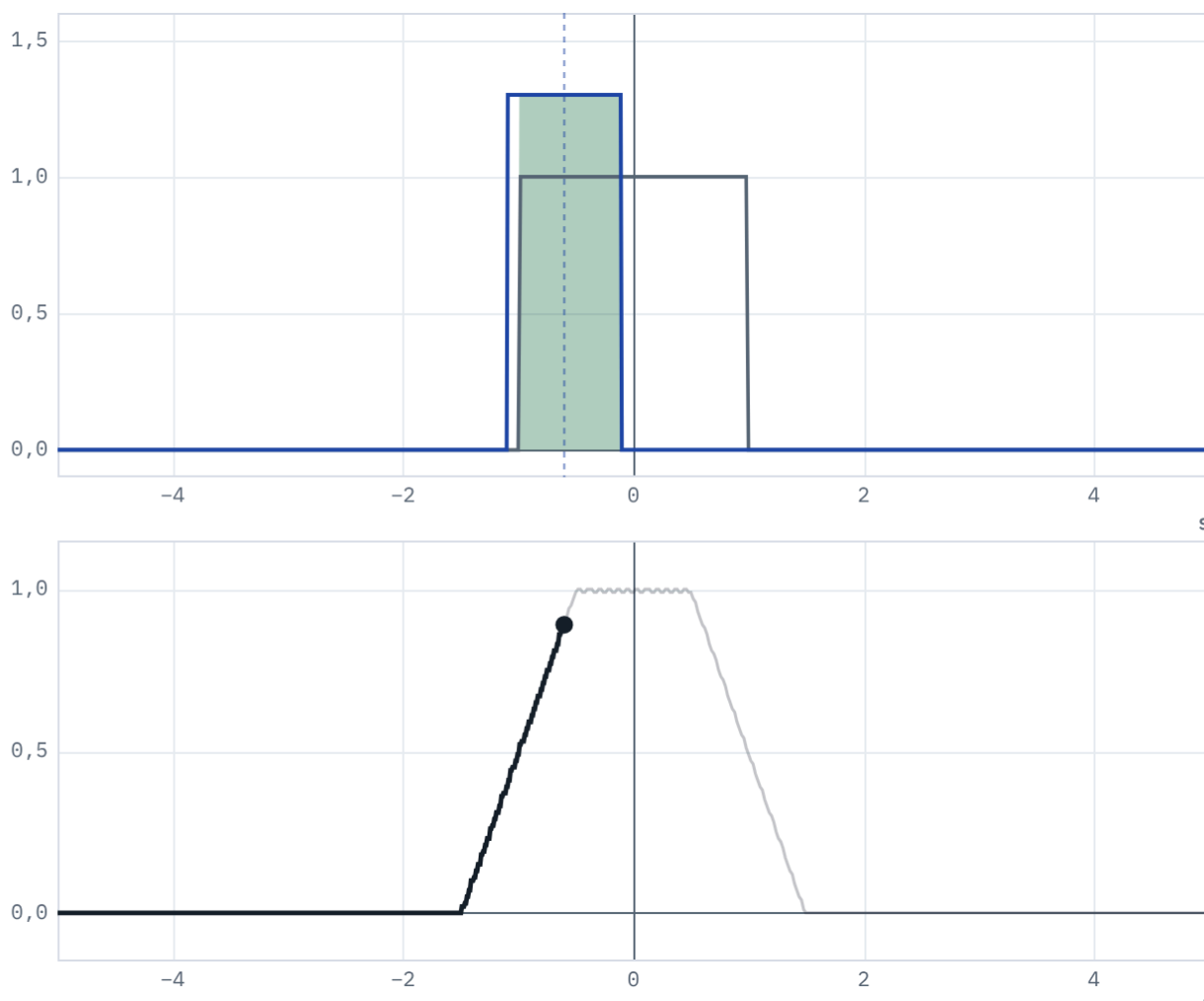
- 1 $(f * f)(t)$ to długość części wspólnej odcinków $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ i $[t - \frac{1}{2}; t + \frac{1}{2}]$.
- 2 Dla $|t| \leq 1$ ta długość to $1 - |t|$; dla $|t| > 1$ odcinki są rozłączne, splot 0.
- 3 Transformata: $F = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega}$, więc splot powinien mieć transformatę $F^2 = \frac{4 \sin^2(\omega/2)}{\omega^2}$.

Wynik: trójkąt $1 - |t|$ na $[-1; 1]$.

Sprawdzenie: transformata trójkąta z całki definicyjnej: $2 \int_0^1 (1-t) \cos \omega t dt = \frac{2(1-\cos \omega)}{\omega^2} = \frac{4 \sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \checkmark$. Pole trójkąta $1 = 1 \cdot 1$, iloczyn pól $\checkmark$.

SYMULACJA 2

Splot krok po kroku. Jądro h zostaje odbite i przesunięte do chwili t ; zacięniowane pole pod iloczynem $x(s)h(t-s)$ to wartość splotu w t . Przesuwaj t albo uruchom animację, zmieniaj sygnał i szerokość jądra. Szerokie jądro wygładza mocniej: średnia krocząca jest filtrem dolnoprzepustowym.



— sygnał $x(s)$ — jądro $h(t-s)$ — iloczyn $x(s) \cdot h(t-s)$ (skala rysunku) — splot $y(t)$

t -0,60

$y(t)$ 0,890

pole jądra 1

Splot rozmywa sygnał: ostre krawędzie stają się zboczami o szerokości jądra. Jądro ma pole 1, więc pole pod sygnałem i poziom długich płaskich odcinków się nie zmieniają; krótkie impulsy są obniżane i poszerzane.

Stan na rysunku: sygnał prostokąt, jądro prostokąt, szerokość 1,00; $y(-0,60) = 0,890$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

1 Oblicz splot $f * \delta(t-a)$.



- 2 Średnia krocząca z ostatniej sekundy to spłot z prostokątem o szerokości 1 s i wysokości 1 s^{-1} . Jaka jest jej transmitancja $|H(\omega)|$? Które częstotliwości średnia usuwa całkowicie?
- 3 Filtr RC ma odpowiedź impulsową $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}$ dla $t \geq 0$. Oblicz $H(\omega)$ i częstotść, przy której $|H| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Policz ją dla $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.
- 4 Pokaż, że spłot dwóch krzywych Gaussa o szerokościach σ_1 i σ_2 jest krzywą Gaussa o szerokości $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Co to oznacza dla pomiaru sygnału o szerokości 3 ns przyrządem o rozdzielczości (gaussowskiej) 4 ns?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Krótki impuls ma jedną, wysoką częstotliwość.”

Ma szerokie widmo, rzędu $1/\tau$, od zera w górę. Jedna częstotliwość to nieskończenie długi cosinus.

× „Delta Diraca to funkcja, która w zerze ma wartość nieskończoną.”

To przepis na całkę: $\int \delta(t - a)g \, dt = g(a)$. Bez tej definicji nie da się odróżnić $\delta(t)$ od $\delta(2t)$ (zadanie 3.4).

× „Spłot to po prostu iloczyn funkcji.”

Iloczyn zachodzi dla transformat. W czasie spłot to całka po wszystkich przesunięciach; iloczyn w czasie odpowiada spłotowi widm (modulacja).

× „Każde źródło podaje tę samą transformatę.”

Czynnik $\frac{1}{2\pi}$, znak w wykładniku i zmienna (ω lub ν) zależą od umowy. Zanim przepiszesz wzór, sprawdź definicję.

× „Moduł widma mówi wszystko o sygnale.”

Przesunięcie w czasie zmienia tylko fazę (zadanie 2.1). Bez fazy nie odtworzysz sygnału.

Sprawdź się

- 1 Zapisz transformatę Fouriera i transformatę odwrotną (w umowie tej lekcji).

$$F(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

- 2 Jaka jest transformata impulsu prostokątnego o szerokości τ i wysokości 1?

$$\frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}, \text{ z pierwszym zerem przy } \omega = 2\pi/\tau.$$

- 3 Co się dzieje z widmem, gdy sygnał skrócimy dwa razy?

$$\text{Rozszerza się dwa razy (i obniża): } f(2t) \rightarrow \frac{1}{2}F(\omega/2).$$

- 4 Czemu równa się $\int \delta(t - a)g(t) dt$?

$$g(a).$$

- 5 Jaka jest transformata $\delta(t)$, a jaka stałej 1?

$$1 \text{ i } 2\pi\delta(\omega).$$

- 6 Na co przechodzi splot w dziedzinie częstotliwości?

$$\text{Na iloczyn transformat: } Y = XH.$$

- 7 Co przechodzi na mnożenie przez $i\omega$?

Różniczkowanie w czasie.

TRANSFORMATA

$$F(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t} dt; f = \frac{1}{2\pi} \int F e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{prostokąt } \tau: \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}; e^{-at} (t \geq 0): \frac{1}{a+i\omega};$$

$$e^{-a|t|}: \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-t^2/(2\sigma^2)}: \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$$

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-i\omega t_0} F; f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{|\lambda|} F(\omega/\lambda);$$

$$f' \rightarrow i\omega F$$

$$f \cos \omega_0 t \rightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)];$$

$$\int |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |F|^2$$

DELTA I SPLOT

$$\int \delta(t-a)g(t) dt = g(a); \delta(\lambda t) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(t)$$

$$\delta \rightarrow 1; 1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega); \cos \omega_0 t \rightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 4\pi\delta^3(\vec{r}); \rho = q\delta^3(\vec{r})$$

$$(x * h)(t) = \int x(s)h(t-s) ds; Y = XH$$

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \approx \text{kilka (zależnie od kształtu);}$$

$$\text{Gauss: } 8 \ln 2$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. I, 48-2 i 48-3 (modulacja i wstęgi boczne).
- **Dla chętnych:** 48-4 (zlokalizowane ciągi fal), 50-2 (przypomnienie szeregu Fouriera).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **E. Kreyszig**, *Advanced Engineering Mathematics*, wyd. 10: §11.7 (całka Fouriera), §11.9 (transformata Fouriera, splot), §6.4 (delta Diraca przy transformacie Laplace'a).
- **K. A. Stroud**, *Advanced Engineering Mathematics: transformata Fouriera z przykładami sygnałów*.

Transformata Laplace'a (4.4 Transformata Laplace'a) to krewna transformaty Fouriera dla sygnałów, które zaczynają się w chwili 0 i mogą rosnąć; tam odpowiedź impulsowa i transmitancja staną się codziennymi narzędziami. W optyce figura dyfrakcyjna szczeliny to transformata Fouriera jej kształtu (Dział 12: Optyka: zasada najmniejszego czasu, interferencja, dyfrakcja), a w mechanice kwantowej funkcje falowe w położeniu i pędzie są parą transformat (Dział 17: Amplitudy prawdopodobieństwa).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $F = \frac{2\sin\omega}{\omega}$ (przykład 1.1 z $\tau = 2$). $F(0) = 2$, pierwsze zero w $\omega = \pi$.
2. Dla $\omega = 0$ czynnik $e^{-i\omega t} = 1$. W przykładzie 1.2: $F(0) = \frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-at} dt \checkmark$. Wartość widma przy zerowej częstotliwości to składowa stała, pole pod sygnałem.
3. $F(\omega) = e^{-\omega^2/2} \int e^{-(t+i\omega)^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$. Gauss przechodzi w Gaussa.
4. Część $t \geq 0$ daje $\frac{1}{a+i\omega}$ (przykład 1.2), część $t < 0$ daje $\frac{1}{a-i\omega}$. Suma: $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$, liczba rzeczywista, bo funkcja jest parzysta (zadanie 1.6).
5. Rzędu 1 MHz. Pasma 10 MHz pozwala na impulsy rzędu $0,1 \mu s$, czyli ok. 10^7 impulsów na sekundę. To dlatego przy danym stosunku sygnału do szumu szybkość transmisji danych jest proporcjonalna do szerokości pasma.
6. $\overline{F(\omega)} = \int f(t) \overline{e^{-i\omega t}} dt = \int f(t) e^{i\omega t} dt = F(-\omega)$. Dla parzystej f : $F(\omega) = \int f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t) dt$, a całka z parzystej razy nieparzystej ($\sin$) jest zerowa, więc $F = \int f \cos\omega t dt$: rzeczywista i parzysta w ω . Dlatego wystarczy rysować widmo dla $\omega \geq 0$.

Zadania · część 2

1. F mnoży się przez $e^{-i\omega t_0}$; $|F|$ się nie zmienia. Widmo amplitudowe nie wie, kiedy impuls nastąpił; ta informacja siedzi w fazie.
2. Od 995 do 1005 kHz, szerokość 10 kHz (wstęgi boczne po obu stronach nośnej). FLP I-48-3 Stacje co 10 kHz; w Europie przydziela się kanały co 9 kHz, co lekko ogranicza najwyższe częstotliwości dźwięku.
3. $\frac{d}{dt} e^{-t^2/2} = -t e^{-t^2/2}$, więc transformata $-t e^{-t^2/2}$ to $i\omega\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$, a szukana: $-i\omega\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$. Funkcja nieparzysta i rzeczywista: transformata czysto urojona i nieparzysta.
4. Lewa: $\int e^{-2a|t|} dt = \frac{1}{a}$. Prawa: $\frac{1}{2\pi} \int \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2} d\omega = \frac{4a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a} \checkmark$.

Zadania · część 3

1. 4, 1, 0 (punkt $t = 3$ leży poza przedziałem całkowania).
2. $\int \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0}$. Moduł 1 dla każdej częstotliwości: płaskie widmo. Faza $-\omega t_0$, liniowa w ω , koduje moment impulsu (reguła przesunięcia).
3. $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$, a $1 \cdot e^{\pm i\omega_0 t} \rightarrow 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$. Suma: $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$. Odwrotna: $\frac{1}{2\pi} \cdot \pi(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = \cos\omega_0 t \checkmark$.
4. Podstawienie $u = 2t$: $\int \delta(2t)g(t) dt = \int \delta(u)g(\frac{u}{2})\frac{du}{2} = \frac{1}{2}g(0) = \int \frac{1}{2}\delta(t)g(t) dt$. Delta nie jest liczbą w punkcie, tylko przepisem na całkę; „wartość w zerze” nic nie mówi, liczy się pole, a ściśnięcie dwukrotne zmniejsza pole o połowę.

Zadania · część 4

1. $\int f(s)\delta(t - a - s) ds = f(t - a)$: przesunięcie. Delta jest „jedyneką” splotu, a jej przesunięcie to opóźnienie.

2. $|H| = \left| \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right|$ (przykład 1.1 z $\tau = 1$; przesunięcie w czasie nie zmienia modułu). Zera w $\omega = 2\pi k$, czyli $\nu = 1, 2, 3 \dots$ Hz: składowe, które mieszczą się w oknie całą liczbą okresów, uśredniają się do zera. Dlatego średnia z 24 godzin usuwa cykl dobowy.
3. Z przykładu 1.2 z $a = \frac{1}{RC}$: $H = \frac{1/RC}{1/RC + i\omega} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$. $|H|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{2}$ dla $\omega = \frac{1}{RC} = 1000 \text{ s}^{-1}$, czyli $\nu \approx 159 \text{ Hz}$. Niższe częstotliwości przechodzą, wyższe są tłumione: filtr dolnoprzepustowy.
4. Transformaty: $e^{-\sigma_1^2 \omega^2 / 2} \cdot e^{-\sigma_2^2 \omega^2 / 2} = e^{-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \omega^2 / 2}$ (z dokładnością do stałych), czyli Gauss o $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Zmierzony impuls ma szerokość $\sqrt{9 + 16} = 5 \text{ ns}$. Szerokości dodają się w kwadratach, jak niepewności niezależne (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce); znając rozdzielczość, można odzyskać prawdziwą szerokość.

Matematyka · Transformaty Fouriera i delta Diraca. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 48-2...48-4, 50-2; E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, wyd. 10, §6.4, §11.7–11.9; K. A. Stroud, *Advanced Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.