

# Szeregi Fouriera

Skrzypce i flet grają to samo  $a^1$  (440 Hz), a jednak od razu słyszeć różnicę. Obie fale powtarzają się 440 razy na sekundę, ale mają inny kształt. Fourier pokazał, że każdy rozsądny kształt okresowy to suma sinusów o częstotliwościach  $f, 2f, 3f \dots$  z odpowiednimi amplitudami. Ta lekcja pokazuje, jak te amplitudy obliczyć, dlaczego da się to zrobić całką i co z tego wynika dla oscylatora pobudzanego siłą okresową, która nie jest sinusoidą.

**CZAS**

ok. 3 h teorii + 2 h zadań

**ZADANIA**

18 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

**ŹRÓDŁA**

*Feynmana*  
*wykłady z fizyki*, t. I, 50-1...50-5; W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, rozdz. 10.2–10.4

**W TEJ LEKCJI**

- 0 Prolog: barwa dźwięku
- 1 Funkcje okresowe i harmoniczne
- 2 Ortogonalność i współczynniki
- 3 Zbieżność, skoki i efekt Gibbsa
- 4 Energia, widmo i oscylator
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

## Prolog: barwa dźwięku

Feynman zaczyna rozdział o harmonicznym od muzyki. Ton muzyczny to drganie ciśnienia powietrza, które powtarza się z okresem  $T$ . Wysokość dźwięku zależy od  $T$ , ale *barwa* zależy od kształtu jednego okresu. Już pitagorejczycy wiedzieli, że struny o długościach w prostych stosunkach brzmią razem przyjemnie; Feynman tłumaczy to tym, że ich składowe częstotliwości się pokrywają. FLP I-50-1, 50-3

Struna drga jednocześnie w wielu modach: podstawowym o częstotliwości  $f$  i wyższych o częstotliwościach  $2f, 3f, \dots$  (Dział 11: Fale i dźwięk). Każdy z nich to sinusoida, a ich suma powtarza się z okresem  $1/f$ . Pytanie Fouriera było odwrotne: czy *każdą* funkcję okresową da się tak złożyć?

**Pytanie na start.** Fala prostokątna przyjmuje na przemian wartości  $+1$  i  $-1$  i skacze między nimi. Czy da się ją złożyć z gładkich sinusów? Jeśli tak, co dzieje się dokładnie w miejscu skoku? Odpowiedź w przykładzie 2.1 i części 3.

## 1

## Funkcje okresowe i harmoniczne

Funkcja  $f$  jest **okresowa** z okresem  $T$ , jeśli  $f(t + T) = f(t)$  dla każdego  $t$ . Częstość kołowa podstawowa to  $\omega = 2\pi/T$ . Funkcje  $\cos n\omega t$  i  $\sin n\omega t$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  to **harmoniczne**:  $n$ -ta wykonuje  $n$  pełnych drgań w jednym okresie  $T$ , więc też ma okres  $T$ . Każda ich kombinacja liniowa ma okres  $T$ .

### SZEREG FOURIERA

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Stała  $a_0$  to wartość średnia. Taką postać zapisuje Feynman. FLP I-50-2 W wielu podręcznikach (np. Boyce i DiPrima) wyraz stały pisze się jako  $\frac{a_0}{2}$ , żeby wzór na  $a_0$  wyglądał tak samo jak na  $a_n$ . To ta sama treść w innym zapisie: zawsze sprawdzaj, której umowy używa źródło.

Wzór obiecuje dwie rzeczy: że współczynniki da się wyznaczyć i że suma rzeczywiście daje  $f$ . Pierwsza obietnica jest prosta (część 2), druga wymaga ostrożności (część 3).

### ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 10 min

1 Jaki jest najmniejszy okres funkcji  $\sin 2t + \cos 3t$ ?



2 Czy  $\sin t + \sin \sqrt{2} t$  jest funkcją okresową?



▮▮▮ podstawowe   ▮▮▮ średnie   ▮▮▮ feynmanowskie

## 2 Ortogonalność i współczynniki

Składowe wektora wyznaczamy rzutem:  $a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$ , bo wersory są prostopadłe i jednostkowe (lekcja 1.1 Wektory). Dla funkcji na przedziale długości  $T$  odpowiednikiem iloczynu skalarnego jest całka iloczynu:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt.$$

Harmoniczne są względem niego prostopadłe, czyli **ortogonalne**. Dla  $n, m \geq 1$ :

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt = 0.$$

Dowód: ze wzoru  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  iloczyn to suma cosinusów, a całka z cosinusa po pełnej liczbie okresów jest zerowa. Gdy  $n = m$ , zostaje stały wyraz  $\frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2}$ , którego całka po okresie daje  $\frac{T}{2}$  (iloczyn  $\cos \cdot \cos$  i  $\sin \cdot \cos$  analogicznie). FLP I-50-4

Teraz pomnożmy szereg Fouriera przez  $\sin m\omega t$  i scałkujmy po okresie. Z całej nieskończonej sumy zostaje jeden wyraz:  $b_m \cdot \frac{T}{2}$ . Tak samo z cosinusami i ze stałą:

### 🔧 WSPÓŁCZYNNIKI FOURIERA

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt.$$

Całkować można po dowolnym przedziale długości  $T$ , np. od  $-\frac{T}{2}$  do  $\frac{T}{2}$ .

Przykład 2.1

## Fala prostokątna

Okres  $T = 2\pi$  (więc  $\omega = 1$ ),  $f(t) = 1$  dla  $0 < t < \pi$  i  $f(t) = -1$  dla  $\pi < t < 2\pi$ . Wyznacz współczynniki Fouriera.

- 1  $a_0 = 0$ : połowa okresu na  $+1$ , połowa na  $-1$ .
- 2  $a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\pi \cos nt \, dt - \int_\pi^{2\pi} \cos nt \, dt \right) = 0$ , bo  $\sin nt$  znika w  $0, \pi$  i  $2\pi$ .
- 3  $b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\pi \sin nt \, dt - \int_\pi^{2\pi} \sin nt \, dt \right) = \frac{1}{\pi n} [(1 - \cos n\pi) + (1 - \cos n\pi)] = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}$ .
- 4 Dla  $n$  parzystych  $b_n = 0$ , dla nieparzystych  $b_n = \frac{4}{\pi n}$ .

**Wynik:**  $f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right)$ .

**Sprawdzenie:** ten sam wynik podaje Feynman: tylko nieparzyste harmoniczne, z amplitudami odwrotnie proporcjonalnymi do częstotliwości. (FLP I-50-4) W  $t = \frac{\pi}{2}$ :  $\frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \checkmark$  (szereg Leibniza, lekcja 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe).

Symetria oszczędza rachunki. Jeśli  $f$  jest **nieparzysta** ( $f(-t) = -f(t)$ ), to wszystkie  $a_n = 0$  i  $a_0 = 0$ : zostają same sinusy. Jeśli **parzysta**, wszystkie  $b_n = 0$ : same cosinusy. Fala prostokątna z przykładu 2.1 jest nieparzysta. Ma też symetrię półokresową,  $f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$ , która usuwa wszystkie parzyste harmoniczne.

### Przykład 2.2

## Fala piłokształtna

Na przedziale  $-\pi < t < \pi$  jest  $f(t) = t$ , a dalej funkcja powtarza się z okresem  $2\pi$ . Wyznacz szereg Fouriera.

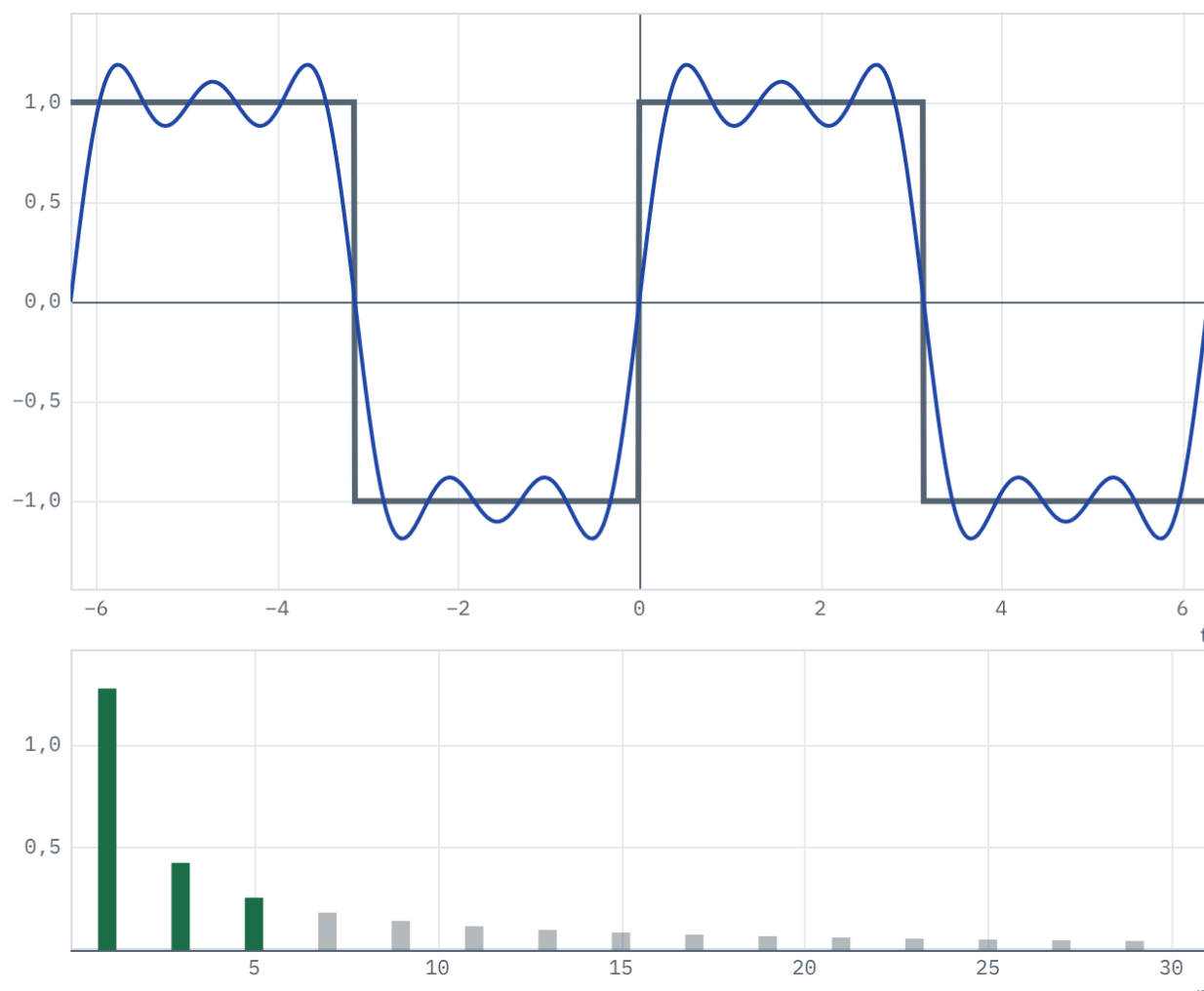
- 1  $f$  jest nieparzysta, więc  $a_0 = a_n = 0$ .
- 2  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt$ . Przez części (lekcja 1.5 Całki):  $\int_0^{\pi} t \sin nt \, dt = \left[ -\frac{t \cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt = -\frac{\pi \cos n\pi}{n}$ .
- 3  $b_n = -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ .

**Wynik:**  $t = 2 \left( \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right)$  dla  $-\pi < t < \pi$ .

**Sprawdzenie:** w  $t = \frac{\pi}{2}$ :  $2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \checkmark$ .

**SYMULACJA 1**

Suma częściowa szeregu Fouriera dla czterech kształtów fali. Zwiększaj liczbę harmonicznych  $N$ . Na górze funkcja i jej przybliżenie, na dole widmo: amplitudy kolejnych harmonicznych. Zwróć uwagę, jak szybko maleją amplitudy dla fali ze skokiem, a jak dla fali ciągłej z załamaniem, i co dzieje się przy skoku.



— funkcja  $f$  — suma częściowa  $S_N$  — amplitudy harmonicznych

max  $S_N$  1,188

położenie maksimum  $t$  0,524

błąd średniokwadratowy 0,259

moc w sumie  $S_N$  (z wyrazem stałym) 93,3 %

Skok: amplitudy maleją jak  $1/n$ . Przy skoku suma przestrzeliwuje do ok. 1,18 dla dużych  $N$  (efekt Gibbsa); ucho tylko się zwęża.

Stan na rysunku: fala prostokątna,  $N = 5$ ; max  $S_N = 1,188$  w  $t = 0,524$ ; błąd średniokwadratowy 0,259.

- 1 Oblicz  $\int_0^{2\pi} \sin 2t \sin 3t \, dt$  i  $\int_0^{2\pi} \sin^2 3t \, dt$ .  
■ ■ ■
- 2 Podaj współczynniki Fouriera funkcji  $3 + 2 \cos t - \sin 4t$  (okres  $2\pi$ ).  
■ ■ ■
- 3 Bez całkowania znajdź szereg Fouriera funkcji  $\sin^2 t$ .  
■ ■ ■
- 4 Fala trójkątna:  $f(t) = |t|$  dla  $-\pi < t < \pi$ , okres  $2\pi$ . Wyznacz szereg Fouriera.  
■ ■ ■
- 5 Prostownik jednopółkowy przepuszcza tylko dodatnią połowę sinusoidy:  $f(t) = \sin t$  dla  $0 < t < \pi$  i  $0$  dla  $\pi < t < 2\pi$ . Oblicz  $a_0$ ,  $b_1$  i  $a_2$ . Jaka część amplitudy wejściowej stanowi składowa stała?  
■ ■ ■
- 6 Prostownik dwupółkowy daje  $|\sin t|$ . Wyznacz jej szereg Fouriera w okresie  $2\pi$ .  
■ ■ ■ Dlaczego występują tylko parzyste harmoniczne? Jak duża jest teraz składowa stała?

■ ■ ■ podstawowe   ■ ■ ■ średnie   ■ ■ ■ feynmanowskie

### 3 Zbieżność, skoki i efekt Gibbsa

Czy szereg naprawdę sumuje się do  $f$ ? Dla funkcji, z którymi spotkasz się w fizyce, odpowiedź daje twierdzenie Dirichleta.

#### 🔧 TWIERDZENIE O ZBIEŻNOŚCI

Jeśli  $f$  i  $f'$  są przedziałami ciągłe (w okresie mają skończenie wiele punktów nieciągłości, a w każdym z nich skończone granice z lewej i z prawej), to szereg Fouriera jest zbieżny w każdym punkcie. W punkcie ciągłości sumą jest  $f(t)$ , a w punkcie skoku średnia granic z lewej i z prawej:  $\frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$ .

por. Boyce i DiPrima, tw. 10.3.1

Feynman zauważa to samo: w miejscu skoku szereg daje wartość w połowie drogi. FLP I-50-4  
Dla fali prostokątnej w  $t = 0$  wszystkie sinusy są zerowe, a średnia z  $-1$  i  $+1$  to właśnie  $0$ .

### 3.1 Gładkość a tempo zanikania

Fala prostokątna ma skok i jej współczynniki maleją jak  $\frac{1}{n}$ . Fala trójkątna jest ciągła, ale ma załamanie (skok pochodnej), i jej współczynniki maleją jak  $\frac{1}{n^2}$  (zadanie 2.4). Ogólna reguła: jeśli

$f, f', \dots, f^{(k-1)}$  są ciągłe (także przy sklejeniu sąsiednich okresów), a  $f^{(k)}$  ma skoki, współczynniki maleją jak  $\frac{1}{n^{k+1}}$ , bo całkowanie przez części w  $b_n = \frac{2}{T} \int f \sin n\omega t \, dt$  przenosi pochodną na  $f$  i wyciąga  $\frac{1}{n\omega}$ . Ostre krawędzie potrzebują wysokich harmonicznych. Dlatego dźwięk skrzypiec (piła) jest „jaskrawy”, a fletu (blisko sinusa) „miękki”.

## 3.2 Efekt Gibbsa

Przy skoku suma częściowa  $S_N$  przestrzeliwuje. Dla fali prostokątnej  $\pm 1$  maksimum  $S_N$  dla dużych  $N$  wynosi ok. 1,18 i nie spada poniżej 1,179, ile wyrazów byś nie wziął: wraz ze wzrostem  $N$  „ucho” przesuwają się coraz bliżej skoku (do  $t \approx \pi/(N+1)$  dla nieparzystego  $N$ ) i robi się węższe, ale nie niższe. W granicy przestrzał to ok. 9% wysokości skoku. To nie przeczy twierdzeniu o zbieżności: w każdym ustalonym punkcie  $S_N(t) \rightarrow f(t)$ , tylko ucho ucieka do skoku. Inżynierowie widzą to jako „dzwonienie” przy ostrych krawędziach sygnałów po obcięciu wysokich częstotliwości.

### ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Do jakiej wartości jest zbieżny szereg fali prostokątnej z przykładu 2.1 w punktach  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$  i  $t = \pi$ ?  

- 2 Do czego jest zbieżny szereg piły z przykładu 2.2 w  $t = \pi$ ? Sprawdź bezpośrednio z szeregu.  

- 3 Wstaw  $t = 0$  do szeregu fali trójkątnej z zadania 2.4 i wywnioskuj sumę  $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$   

- 4 Od którego  $n$  wszystkie dalsze niezerowe harmoniczne mają amplitudę poniżej 1% amplitudy pierwszej dla fali prostokątnej, a od którego dla trójkątnej?  

- 5 W symulacji 1 (fala prostokątna) odczytaj maksimum sumy częściowej dla  $N = 9$  i  $N = 49$ . Gdzie leży to maksimum? Czy przestrzał zniknie dla  $N \rightarrow \infty$ ?  


 podstawowe    średnie    feynmanowskie

## 4 Energia, widmo i oscylator

Energia drgań jest proporcjonalna do kwadratu wychylenia, więc dla dźwięku albo prądu interesuje nas średnia z  $f^2$ . Podnieśmy szereg do kwadratu i scałkujmy po okresie. Z ortogonalności wszystkie iloczyny różnych harmonicznych dają zero, a kwadraty dają  $\frac{T}{2}$ :

FLP I-50-5

#### 🔊 TWIERDZENIE O ENERGII (RÓWNOŚĆ PARSEVALA)

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Średnia moc sygnału to suma mocy poszczególnych harmoniczných: energia rozkłada się na częstotliwości bez wyrazów mieszanych. Wykres  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  w zależności od  $n$  to **widmo** sygnału.

#### Przykład 4.1

### Suma, którą znalazł Feynman

Zastosuj twierdzenie o energii do fali prostokątnej z przykładu 2.1.

- 1 Lewa strona:  $f^2 = 1$  wszędzie, średnia 1.
- 2 Prawa:  $\frac{1}{2} \sum_{n \text{ nieparz.}} \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right)$ .
- 3 Stąd  $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ .

**Wynik:** suma odwrotności kwadratów liczb nieparzystych to  $\frac{\pi^2}{8}$ . FLP I-50-5

**Sprawdzenie:** ten sam wynik dało zadanie 3.3 z fali trójkątnej, inną drogą ✓.  
Numerycznie 100 000 wyrazów daje 1,23370, a  $\frac{\pi^2}{8} = 1,23370$  ✓.

## 4.1 Postać zespolona

Ze wzoru Eulera (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory)  $\cos n\omega t$  i  $\sin n\omega t$  to kombinacje  $e^{in\omega t}$  i  $e^{-in\omega t}$ . Szereg można więc zapisać zwięźlej:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n \geq 1), \quad c_{-n} = \overline{c_n} \quad (f \text{ r})$$

Jeden wzór zamiast trzech, a  $|c_n|$  to połowa amplitudy  $n$ -tej harmoniczných. Ta postać przejdzie w lekcji 4.3 Transformatą Fouriera i delta Diraca w transformatę Fouriera, gdy okres  $T$  urośnie do nieskończoności.

## 4.2 Oscylator pobudzany siłą okresową

Równanie  $m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = F(t)$  jest liniowe, więc obowiązuje superpozycja (lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne): odpowiedź na sumę sił to suma odpowiedzi. Rozkładamy  $F$  na

harmoniczne, każdą traktujemy osobno wzorem na amplitudę drgań wymuszonych z lekcji 4.1,

$$R(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m},$$

gdzie  $\Omega = n\omega$  to częstość  $n$ -tej harmonicznej, a  $F_0$  zastępujemy jej amplitudą  $F_n$ . Na koniec składamy wszystko z powrotem. Oscylator działa jak filtr: wzmacnia harmoniczne bliskie  $\omega_0$ , tłumi pozostałe. Tak pudło rezonansowe gitary wybiera barwę, a radio wybiera stację (Dział 6: Drgania, rezonans i układy liniowe).

#### Przykład 4.2

### Która harmoniczna wygra

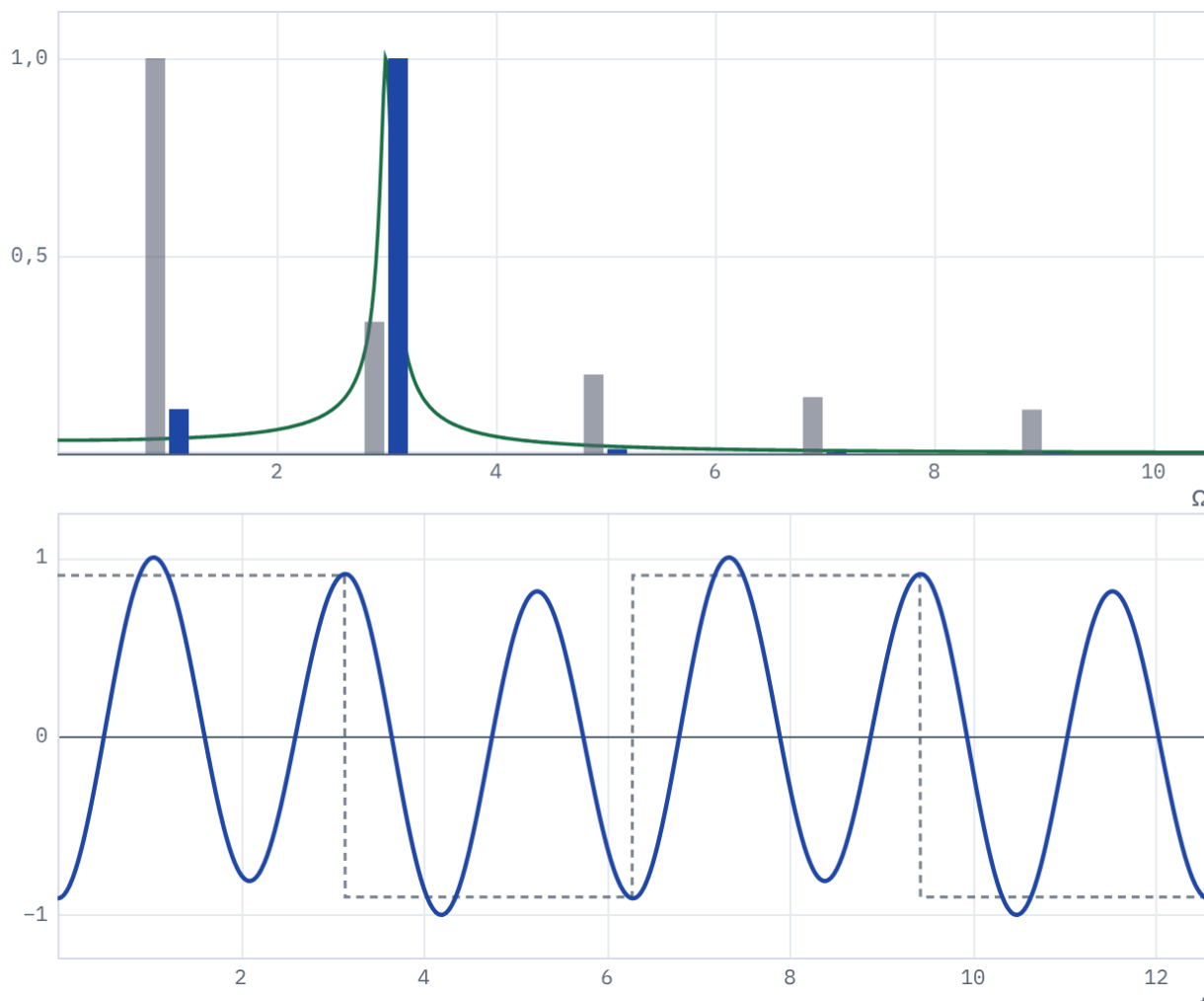
Na oscylator o  $m = 1$ ,  $k = 9$  (czyli  $\omega_0 = 3$ ) i  $\gamma = 0,1$  działa siła prostokątna  $\pm 1$  o okresie  $2\pi$  (częstość podstawowa  $\omega = 1$ ). Oblicz amplitudy drgań ustalonych dla harmonicznych 1, 3 i 5.

- 1 Amplitudy siły (przykład 2.1):  $F_n = \frac{4}{\pi n}$  dla nieparzystych  $n$ : 1,273; 0,424; 0,255.
- 2  $n = 1$ :  $\frac{1,273}{\sqrt{(9-1)^2 + 0,1^2}} \approx 0,159$ .
- 3  $n = 3$ :  $\Omega = \omega_0$ , pierwszy nawias znika:  $\frac{0,424}{0,1 \cdot 3} \approx 1,415$ .
- 4  $n = 5$ :  $\frac{0,255}{\sqrt{(9-25)^2 + 0,5^2}} \approx 0,016$ .

**Wynik:** amplitudy 0,159; 1,415; 0,016. Trzecia harmoniczna siły, trzy razy słabsza od pierwszej, daje drgania prawie 9 razy większe.

**Sprawdzenie:** oscylator drga w praktyce sinusoidalnie z częstością 3, choć siła ma okres  $2\pi$  (symulacja 2) ✓. Gdyby  $\omega_0$  wynosiło 2, rezonansu by nie było, bo fala prostokątna nie ma drugiej harmonicznej (zadanie 4.5).

**SYMULACJA 2** Oscylator pobudzany falą prostokątną. Na górze widmo siły (słupki), krzywa rezonansowa oscylatora i widmo odpowiedzi. Na dole przebieg siły i ustalone drgania w czasie. Zmieniaj częstotliwość własną  $\omega_0$  i tłumienie  $\gamma$ : rezonans pojawia się tylko tam, gdzie siła ma harmoniczną.



— harmoniczne siły    — harmoniczne drgań    — krzywa rezonansowa (skala względna)    — drgania  $u(t)$

dominuje harmoniczna  $n = 3$

jej amplituda 1,415

amplituda 1. harmonicznej 0,159

max  $|u|$  1,562

$\omega_0 \approx 3$ : harmoniczna siły  $n = 3$  trafia w rezonans i drgania są prawie sinusoidą o częstotliwości 3, choć siła ma okres  $2\pi$ .

Stan na rysunku:  $\omega_0 = 3,00$ ,  $\gamma = 0,10$ ; dominuje harmoniczna  $n = 3$  (amplituda 1,415), pierwsza 0,159.

- 1 Narysuj widmo sygnału  $2 \sin t + \cos 3t + \sin 3t$  i oblicz jego średnią moc  $\frac{1}{T} \int f^2 dt$ .  
■ ■ ■
- 2 Zastosuj twierdzenie o energii do pily z przykładu 2.2 i oblicz  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .  
■ ■ ■
- 3 Oblicz współczynnik zespolony  $c_1$  fali prostokątnej z przykładu 2.1 wprost z całki i sprawdź, że  $c_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2}$ .  
■ ■ ■
- 4 Jaki procent średniej mocy fali prostokątnej niesie pierwsza harmoniczna? Ile niosą pierwsza, trzecia i piąta razem?  
■ ■ ■
- 5 Powtórz przykład 4.2 dla  $\omega_0 = 2$  (czyli  $k = 4$ ), a potem dla  $\omega_0 = 5$ . Która harmoniczna dominuje i dlaczego wyniki tak się różnią?  
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe   ■ ■ ■ średnie   ■ ■ ■ feynmanowskie

## 5 Błędne intuicje

× „Funkcji z przerwami nie da się rozłożyć na sinusy, bo sinusy są gładkie.”

Da się: nieskończona suma gładkich funkcji może mieć skok. W punkcie skoku szereg daje średnią (część 3).

× „Im więcej wyrazów, tym mniejszy przestrzał przy skoku.”

Przestrzał Gibbsa (ok. 9% skoku) zostaje dla każdego  $N$ ; zmienia się tylko jego szerokość i położenie (zadanie 3.5).

× „Wyraz stały to  $a_0$  albo  $\frac{a_0}{2}$ , i to jest ta sama liczba.”

To dwie umowy zapisu, a liczba  $a_0$  jest w nich różna (w drugiej dwa razy większa). Sprawdź, której używa źródło.

× „Oscylator pobudzany siłą o okresie  $T$  drga z okresem  $T$  i kształtem podobnym do siły.”

Okres tak, kształt niekoniecznie: oscylator wzmacnia harmoniczną bliską  $\omega_0$  i może drgać prawie sinusoidalnie z jej częstotliwością (przykład 4.2).

× „Do opisu sygnału wystarczy kilka pierwszych harmonicznych.”

Zależy od gładkości. Dla fali trójkątnej tak, dla prostokątnej potrzeba ich dziesięć razy więcej przy tej samej dokładności amplitud (zadanie 3.4).

## 6 Sprawdź się

1 Jak obliczyć  $b_n$ ?

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt.$$

2 Dlaczego mnożenie przez  $\sin m\omega t$  i całkowanie wyłuskuje jeden współczynnik?

Bo harmoniczne są ortogonalne: całki iloczynów różnych harmonicznych są zerowe.

3 Które współczynniki znikają dla funkcji nieparzystej?

$a_0$  i wszystkie  $a_n$ : zostają same sinusy.

4 Do czego zbiega szereg w punkcie skoku?

Do średniej granic z lewej i z prawej.

5 Jak szybko maleją współczynniki funkcji ze skokiem, a jak ciągłej z załamaniem?

Jak  $\frac{1}{n}$  i jak  $\frac{1}{n^2}$ .

6 Zapisz twierdzenie o energii.

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2 \, dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2).$$

7 Dlaczego oscylator o  $\omega_0 = 2$  nie wpada w rezonans pod działaniem fali prostokątnej o  $\omega = 1$ ?

Fala prostokątna nie ma parzystych harmonicznych, więc nie ma składowej o częstotliwości 2.

## SZEREG I WSPÓŁCZYNNIKI

$$f = a_0 + \sum (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \omega = 2\pi/T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f \cos n\omega t; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f \sin n\omega t$$

nieparzysta: same sin; parzysta: same cos;

$$f(t + \frac{T}{2}) = -f(t): \text{ same nieparzyste } n$$

$$\text{prostokątna } \pm 1: \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ nieparz.}} \frac{\sin nt}{n}; \text{ piła } t: 2 \sum \frac{(-1)^{n+1} \sin nt}{n}$$

$$\text{trójkątna } |t|: \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ nieparz.}} \frac{\cos nt}{n^2}$$

## ZBIEŻNOŚĆ, ENERGIA, ZASTOSOWANIA

skok: średnia z obu stron; przestrzał Gibbsa ok. 9% skoku

$$\text{skok: } \sim \frac{1}{n}; \text{ załamanie: } \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{T} \int f^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f e^{-in\omega t} dt = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n \geq 1), \quad c_0 = a_0$$

układ liniowy: każdą harmoniczną osobno,  $R(n\omega)$ , potem suma

## Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. I, 50-1...50-5 (tony muzyczne, szereg Fouriera, barwa i konsonans, współczynniki, twierdzenie o energii).
- **Dla chętnych:** 50-6 (odpowiedź nieliniowa: skąd biorą się harmoniczne, których w sile nie było).

## Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*:** 10.2 (szeregi Fouriera), 10.3 (twierdzenie o zbieżności, efekt Gibbsa), 10.4 (funkcje parzyste i nieparzyste).
- **K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*:** szeregi Fouriera, z dużą liczbą przykładów sygnałów.

Gdy okres rośnie do nieskończoności, harmoniczne zagęszczają się w ciągłe widmo, a szereg przechodzi w całkę: transformatę Fouriera (4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca). Szeregi Fouriera wrócą też w równaniach cząstkowych (4.7 Równania cząstkowe: fale, dyfuzji i Laplace'a): drgania struny i stygnięcie pręta rozkłada się na mody, a każdy mod zachowuje się prosto. W fizyce: fale i dźwięk (Dział 11: Fale i dźwięk).



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

- Okresy składników:  $\pi$  i  $\frac{2\pi}{3}$ . Najmniejsza wspólna wielokrotność:  $2\pi$  (2 okresy pierwszego, 3 drugiego). Częstość podstawowa  $\omega = 1$ ; to harmoniczne  $n = 2$  i  $n = 3$ .
- Nie. Wspólny okres  $T$  musiałby być całkowitą wielokrotnością  $2\pi$  i  $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ , czyli  $\sqrt{2}$  byłby ilorazem liczb całkowitych, a jest niewymierny. Takie funkcje (prawie okresowe) nie mają szeregu Fouriera w sensie tej lekcji.

## Zadania • część 2

- 0 i  $\pi$  (czyli  $\frac{T}{2}$ ).
- $a_0 = 3, a_1 = 2, b_4 = -1$ , reszta zero. Skończona suma harmonicznym jest swoim własnym szeregiem Fouriera: rozkład jest jednoznaczny, tak jak składowe wektora w bazie.
- $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$ ;  $a_0 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{2}$ . Okres to w rzeczywistości  $\pi$ , więc w okresie  $2\pi$  występuje tylko parzysta harmoniczna.
- $a_0 = \frac{\pi}{2}; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt \, dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$ , czyli  $-\frac{4}{\pi n^2}$  dla nieparzystych  $n$  i 0 dla parzystych.  $|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \dots \right)$ .
- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = \frac{1}{\pi} \approx 0,318$ .  $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}$ .  $a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos 2t \, dt = -\frac{2}{3\pi} \approx -0,212$ . Składowa stała to ok. 32% amplitudy; pozostałe harmoniczne usuwa się filtrem, żeby dostać napięcie stałe.
- Funkcja parzysta:  $a_0 = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$ ,  $a_n = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}$  dla parzystych  $n$  ( $a_2 = -\frac{4}{3\pi}, a_4 = -\frac{4}{15\pi} \dots$ ), zero dla nieparzystych. Prawdziwy okres  $|\sin t|$  to  $\pi$ , więc w zapisie z okresem  $2\pi$  zostają tylko harmoniczne 2, 4, 6... Składowa stała jest dwa razy większa niż w prostowniku jednopółkowy, a najniższa harmoniczna ma podwojoną częstotliwość, więc łatwiej ją odfiltrować.

## Zadania • część 3

- 0 (skok z  $-1$  na  $+1$ , średnia), 1, 0 (skok z  $+1$  na  $-1$ ).
- Do 0, średniej z  $\pi$  (granica z lewej) i  $-\pi$  (z prawej). Z szeregu:  $\sin n\pi = 0$  dla każdego  $n$  ✓.
- $|0| = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right)$ , więc suma odwrotności kwadratów liczb nieparzystych to  $\frac{\pi^2}{8} \approx 1,2337$ . Funkcja jest ciągła w 0, więc szereg zbiega do  $f(0)$ .
- Prostokątna:  $\frac{b_n}{b_1} = \frac{1}{n} < 0,01$  dla  $n > 100$ , czyli od  $n = 101$ . Trójkątna:  $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n^2} < 0,01$  dla  $n > 10$ , czyli od  $n = 11$ . Mniej więcej dziesięć razy mniej harmonicznym (6 niezerowych zamiast 51) wystarcza do tej samej dokładności.
- Ok. 1,182 w  $t \approx 0,31$  dla  $N = 9$  i ok. 1,179 w  $t \approx 0,063$  dla  $N = 49$ , czyli w  $t \approx \pi/(N+1)$ . Przestrzał dąży do  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx - 1 \approx 0,179$  (ok. 9% skoku o wysokości 2): nie znika, tylko się zwięża.

## Zadania • część 4

- Słupki: 2 przy  $n = 1$  i  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  przy  $n = 3$ . Moc  $\frac{1}{2}(4 + 1 + 1) = 3$ .

2. Lewa strona:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$ . Prawa:  $\frac{1}{2} \sum \frac{4}{n^2} = 2 \sum \frac{1}{n^2}$ . Stąd  $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$ : słynny problem bazylejski, rozwiązany przez Eulera w 1735 roku.

3.  $c_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} e^{-it} dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-it} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(1-e^{-i\pi})-(e^{-i\pi}-e^{-2i\pi})}{i} = \frac{4}{2\pi i} = -\frac{2i}{\pi}$ . Z  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = \frac{4}{\pi}$ :  $\frac{0-i \cdot 4/\pi}{2} = -\frac{2i}{\pi} \checkmark$ .

4.  $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2} \approx 81\%$ . Z trzecią  $\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{10}{9} \approx 90\%$ , z piątą  $\approx 93\%$ . Ostatnie 7% to ostre krawędzie, rozłożone na nieskończenie wiele harmonicznych.

5.  $\omega_0 = 2$ : amplitudy 0,424; 0,085; 0,012. Dominuje pierwsza, rezonansu nie ma, bo fala prostokątna nie ma drugiej harmonicznej.  $\omega_0 = 5$ : amplitudy 0,053; 0,027; 0,509. Piąta harmoniczna wygrywa prawie dziesięciokrotnie. Oscylator „słyszy” tylko te składowe siły, które są blisko jego częstości własnej.

---

Matematyka · Szeregi Fouriera. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 50-1...50-6; W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, rozdz. 10.2–10.4; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.