

Równania różniczkowe

Prawa przyrody prawie nigdy nie mówią, ile coś wynosi. Mówią, jak szybko się zmienia. Równanie różniczkowe to właśnie takie prawo, zapisane wzorem. Idziemy drogą podręcznika Boyce'a i DiPrimy: najpierw rysujemy rozwiązania, których jeszcze nie znamy, potem rozwiązujemy najważniejsze typy równań, a na koniec opisujemy drgania, tłumienie i rezonans. Opisuje je jedno równanie, które według Feynmana pojawia się w fizyce „raz za razem”.

CZAS

ok. 5 h teorii + 5 h zadań

ZADANIA

30 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

W. E. Boyce, R. C. DiPrima, D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, wyd. 11, rozdz. 1–3; Feynmana *wykłady z fizyki*, t. I, 9-6...9-7, 21, 23, 24, 25-4

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: prawa o tempach zmian
- 1 Modele i pole kierunków
- 2 Rozwiązanie i warunek początkowy
- 3 Zmienne rozdzielone
- 4 Równania liniowe pierwszego rzędu
- 5 Równania autonomiczne i stabilność
- 6 Metoda Eulera
- 7 Istnienie i jednoznaczność
- 8 Równania liniowe drugiego rzędu
- 9 Drgania swobodne i tłumione
- 10 Drgania wymuszone i rezonans
- 11 Błędne intuicje
- 12 Sprawdź się
- 13 Karta wzorów i co dalej

Prolog: prawa o tempach zmian

Boyce i DiPrima zaczynają od obserwacji, że wiele praw przyrody to stwierdzenia o tempie, w jakim coś się dzieje. Gdy zapiszemy je matematycznie, tempa stają się pochodnymi, a prawa równaniami. Równanie, w którym występuje pochodna szukanej funkcji, to **równanie różniczkowe**. Druga zasada dynamiki $m \dot{v} = F$ jest równaniem różniczkowym. Tak samo prawo stygnięcia, prawo rozpadu i prawa obwodów elektrycznych. Boyce §1.1

Feynman zwraca uwagę na rzecz zaskakującą. Te same równania pojawiają się w zupełnie różnych działach fizyki: ciężarek na sprężynie, ładunek w obwodzie, kamerton, elektron w atomie, termostat, a nawet lisy jedzące króliki. Dlatego warto jedno równanie przestudiować bardzo dokładnie, bo każde jego rozwiązanie od razu opisuje kilkanaście zjawisk. FLP I-21-1

Badając oscylator, w istocie badamy pewne równanie różniczkowe.

R. Feynman, FLP I-21-1 (tłum. własne)

W tej lekcji uczymy się trzech rzeczy. Po pierwsze, **widzieć** rozwiązania, zanim je znajdziemy (pole kierunków, stany równowagi). Po drugie, **rozwiązywać** najważniejsze typy równań na papierze. Po trzecie, **liczyć** je numerycznie, gdy wzoru nie ma.

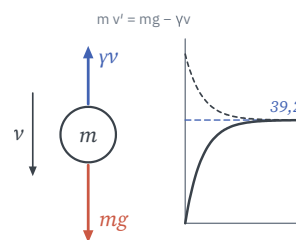
1

Modele i pole kierunków

1.1 Spadające ciało

Zacznijmy od ciała spadającego w powietrzu (od tego modelu zaczyna też Boyce). Działają na nie ciężar mg w dół i opór powietrza, który dla małych prędkości jest w przybliżeniu proporcjonalny do prędkości: γv w górę. Druga zasada dynamiki daje: por. Boyce §1.1

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v.$$



Stała γ (w kg/s) to współczynnik oporu. Zależy od kształtu i rozmiaru ciała oraz od ośrodka. Stałe takie jak m , γ i g , które w danym zagadnieniu się nie zmieniają, nazywamy **parametrami** modelu.

1.2 Rysujemy rozwiązania, nie znając ich

Weźmy $m = 5$ kg i $\gamma = 1,25$ kg/s. Równanie ma postać $\dot{v} = 9,8 - v/4$. Nie znamy jeszcze $v(t)$, ale dla każdej wartości v znamy nachylenie wykresu: przy $v = 30$ m/s wynosi 2,3, przy $v = 40$ wynosi $-0,2$, przy $v = 50$ wynosi $-2,7$. W każdym punkcie płaszczyzny (t, v) rysujemy krótki odcinek o

tym nachyleniu. Dostajemy **pole kierunków**. Każdy odcinek jest styczny do rozwiązania, które przechodzi przez ten punkt. por. Boyce §1.1

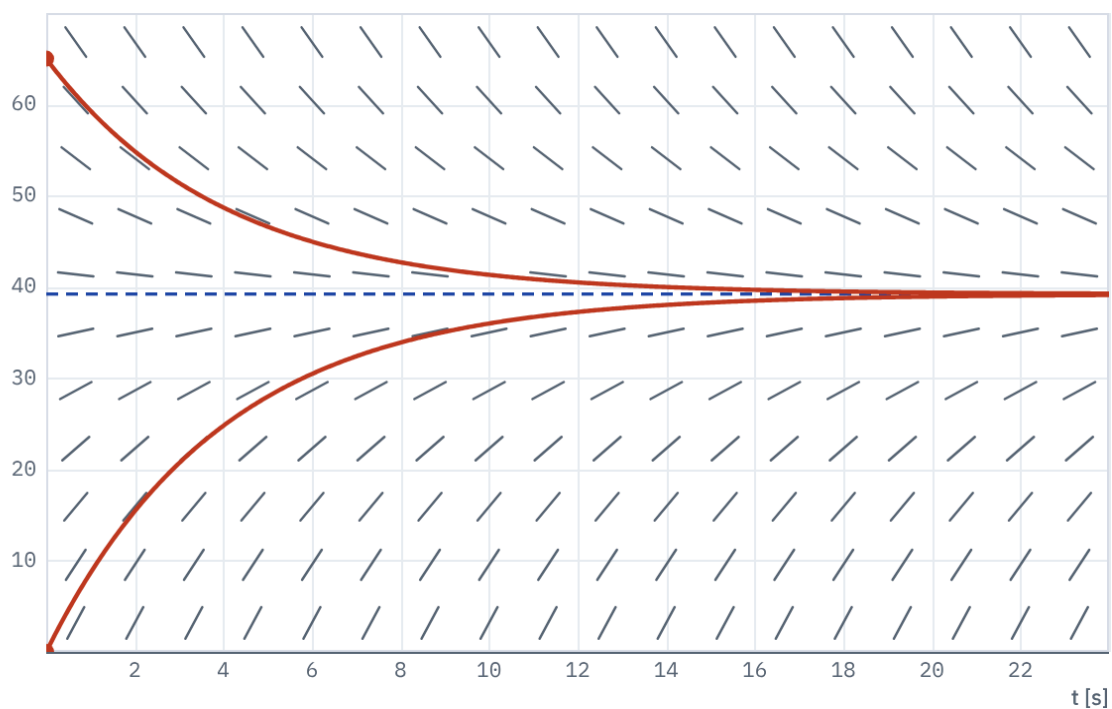
POLE KIERUNKÓW I STAN RÓWNOWAGI

Dla równania $y' = f(t, y)$ w każdym punkcie (t, y) rysujemy odcinek o nachyleniu $f(t, y)$. Żeby to zrobić, nie trzeba rozwiązywać równania, wystarczy obliczać f . Stała funkcja $y = y^*$, dla której $f(t, y^*) = 0$ dla wszystkich t , to **rozwiązanie równowagowe**.

Dla spadającego ciała $\dot{v} = 0$ przy $v = 39,2$ m/s. To **prędkość graniczna**, przy której ciężar równoważy opór. Pod tą prędkością nachylenia są dodatnie, więc ciało przyspiesza, a nad nią ujemne, więc zwalnia. Z pola kierunków widać, że wszystkie rozwiązania zbliżają się do $v = 39,2$, niezależnie od prędkości początkowej. Taki stan równowagi nazywamy **przyciągającym** (asymptotycznie stabilnym, krócej: stabilnym).

SYMULACJA 1

Pole kierunków. Wybierz równanie i kliknij w dowolnym miejscu wykresu, żeby narysować rozwiązanie przechodzące przez ten punkt. Dla równań autonomicznych z prawej strony pojawia się linia fazowa: strzałki pokazują, w którą stronę płynie y . Porównaj spadające ciało (równowaga przyciąga) z myszami i sowami (równowaga odpycha).



— pole kierunków — rozwiązania — równowaga

równanie spadek: $v' = 9,8 - v/4$

stany równowagi 39,2 (stabilna)

narysowane rozwiązania 2

Stan na rysunku: spadek: $v' = 9,8 - v/4$; równowagi: 39,2 (stabilna); rozwiązania przez punkty $(0,0; 0,0)$, $(0,0; 65,0)$.

Przykład 1.1

Myszy i sowy

Populacja myszy polnych rośnie w tempie proporcjonalnym do swojej liczebności, ze stałą $r = 0,4$ na miesiąc. Sowy zjadają 10 myszy dziennie. Zapisz równanie dla liczby myszy $p(t)$ (t w miesiącach), znajdź stan równowagi i opisz zachowanie rozwiązań.

- 1 Przyrost to $0,4p$ na miesiąc. Ubytek to $10 \cdot 30 = 300$ myszy na miesiąc. Jednostki muszą się zgadzać, dlatego nie piszemy 10. Równanie: $\dot{p} = 0,4p - 300$.
(por. Boyce §1.1)
- 2 Równowaga: $0,4p - 300 = 0$, czyli $p^* = 750$.
- 3 Dla $p > 750$ mamy $\dot{p} > 0$, więc populacja rośnie i oddala się od 750. Dla $p < 750$ maleje i też się oddala.

Wynik: $\dot{p} = 0,4p - 300$; równowaga $p^* = 750$ jest odpychająca (niestabilna).

Sprawdzenie: Takiej równowagi w praktyce nie zobaczymy, bo najmniejsze zaburzenie wyprowadza populację daleko. Model przewiduje też ujemną liczbę myszy po pewnym czasie, czyli ma ograniczony zakres stosowania ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pacjentowi podaje się dożylnie lek: do krwi wpływa $80 \text{ cm}^3/\text{h}$ płynu o stężeniu $4 \text{ mg}/\text{cm}^3$.
Organizm usuwa lek w tempie proporcjonalnym do jego ilości, ze stałą $0,25$ na godzinę.
Zapisz równanie dla ilości leku $Q(t)$ i znajdź ilość po długim czasie.
- 2 Ciało o temperaturze T stygnie w pokoju o temperaturze 20°C zgodnie z prawem Newtona: tempo zmian temperatury jest proporcjonalne do różnicy temperatur, ze stałą $0,05$ na minutę. Zapisz równanie. Jakie jest nachylenie pola kierunków przy $T = 60^\circ\text{C}$, a jakie przy $T = 10^\circ\text{C}$?
- 3 Dla większych prędkości opór powietrza jest bliższy kv^2 . Zapisz równanie ruchu spadającego ciała i wyznacz prędkość graniczną. Jakie musi być k , żeby ciało o masie 5 kg miało prędkość graniczną $39,2 \text{ m/s}$?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §1.1.

2.1 Rodzina rozwiązań

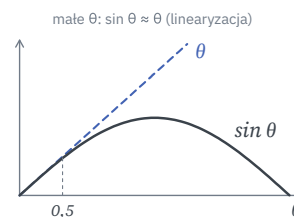
Rozwiążmy równanie spadającego ciała. Dla $v \neq 39,2$ zapisujemy je jako $\frac{\dot{v}}{v - 39,2} = -\frac{1}{4}$ i całkujemy obie strony po t : Boyce §1.2

$$\ln |v - 39,2| = -\frac{t}{4} + C \implies v(t) = 39,2 + c e^{-t/4}.$$

Stała c jest dowolna. Dostaliśmy więc nie jedno rozwiązanie, tylko nieskończoną rodzinę krzywych, po jednej przez każdy punkt pola kierunków. To **rozwiązanie ogólne**. Żeby wybrać jedno, potrzebna jest dodatkowa informacja, na przykład prędkość w chwili $t = 0$. Równanie razem z taką informacją to **zagadnienie początkowe** (problem Cauchy'ego).

2.2 Jak klasyfikujemy równania

- **Zwyczajne a cząstkowe.** W równaniu różniczkowym zwyczajnym szukana funkcja zależy od jednej zmiennej. W równaniu cząstkowym od kilku, na przykład $\partial_t u = \partial_x^2 u$ (przewodnictwo cieplne). Tu zajmujemy się zwyczajnymi. Boyce §1.3
- **Rząd** to rząd najwyższej pochodnej. $m\ddot{x} = -kx$ jest drugiego rzędu, a rozwiązanie ogólne równania rzędu n ma zwykle n stałych dowolnych.
- **Liniowe a nieliniowe.** Równanie jest liniowe, gdy szukana funkcja i jej pochodne występują tylko w pierwszej potęgze, nie są przez siebie mnożone ani wstawiane do innych funkcji: $a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$. Równanie wahadła $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ jest nieliniowe przez $\sin \theta$. Przybliżenie $\sin \theta \approx \theta$ z lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce robi z niego równanie liniowe. Fizycy nazywają to *linearyzacją*.



Przykład 2.1

Ciało upuszczone z wysokości 200 m

Ciało o masie 5 kg i współczynniku oporu 1,25 kg/s upuszczono z wysokości 200 m. Znajdź jego prędkość w każdej chwili. Kiedy uderzy w ziemię i z jaką prędkością?

- 1 „Upuszczono” znaczy $v(0) = 0$, więc w rozwiązaniu ogólnym $c = -39,2$: $v(t) = 39,2 (1 - e^{-t/4})$ m/s.
- 2 Droga to całka z prędkości: $x(t) = 39,2t + 156,8e^{-t/4} - 156,8$ (tak dobrane, żeby $x(0) = 0$). por. Boyce §1.2
- 3 Uderzenie: $x(T) = 200$, czyli $39,2T + 156,8e^{-T/4} - 156,8 = 200$. Rozwiązujemy numerycznie: $T \approx 8,64$ s.
- 4 $v(T) = 39,2 (1 - e^{-2,160}) \approx 34,7$ m/s.

Wynik: $v(t) = 39,2(1 - e^{-t/4})$; uderzenie po ok. 8,6 s z prędkością ok. 34,7 m/s.

Sprawdzenie: bez oporu powietrza ciało spadałoby $\sqrt{2 \cdot 200/9,8} \approx 6,4$ s i uderzyło z prędkością ok. 63 m/s. Opór wydłuża czas i zmniejsza prędkość, która nie przekracza prędkości granicznej 39,2 m/s ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Sprawdź, że $y = C e^{-2t} + 3$ spełnia $y' = -2y + 6$ dla każdego C . Wybierz C tak, żeby $y(0) = 1$.
■ ■ ■
- 2 Określ rząd i liniowość: (a) $y'' + ty = 0$, (b) $y' = y^2 + t$, (c) $\partial_t u = \partial_x^2 u$, (d) $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$, (e) $t^2 y'' + ty' + y = \cos t$.
■ ■ ■
- 3 Ciało z przykładu 2.1 rzucono w dół z prędkością początkową 8 m/s. Znajdź $v(t)$ i $x(t)$.
■ ■ ■ Kiedy uderzy w ziemię i z jaką prędkością?

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §1.2, §1.3.

3 Zmienne rozdzielone

Jeśli prawą stronę da się zapisać jako iloczyn czynnika zależnego tylko od x i czynnika zależnego tylko od y , równanie nazywamy **równaniem o zmiennych rozdzielonych**: Boyce §2.2

METODA · ROZDZIELENIE ZMIENNYCH

$$\frac{dy}{dx} = p(x) q(y) \implies \int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x) dx + C.$$

Zapis Leibniza pozwala „przenieść” dx na drugą stronę. Formalnie to podstawienie w całce: obie strony różniczkujemy po x i dostajemy wyjściowe równanie. Osobno trzeba sprawdzić stałe rozwiązania $y = y^*$, w których $q(y^*) = 0$, bo dzielenie przez $q(y)$ je gubi.

Wynik często dostajemy w postaci uwikłanej, jako równanie wiążące x i y , a nie gotowy wzór $y = \dots$. Boyce traktuje to jako normalny wynik. Wzór jawny jest wygodniejszy, ale nie zawsze da się go uzyskać.

Przykład 3.1

Spadek z oporem kwadratowym

Ciało spada z oporem kv^2 : $\dot{v} = g - \frac{k}{m}v^2$. Z zadania 3 w części 1 prędkość graniczna to $v^* = \sqrt{mg/k}$. Rozwiąż równanie dla $v(0) = 0$ i porównaj prędkość po 8 s z oporem liniowym, gdy w obu przypadkach $v^* = 39,2$ m/s.

- 1 $\dot{v} = g \left(1 - \frac{v^2}{v^{*2}}\right)$. Rozdzielamy: $\int \frac{dv}{1 - v^2/v^{*2}} = \int g dt$.
- 2 Lewa całka to $v^* \operatorname{artanh}(v/v^*)$ (albo, przez rozkład na ułamki proste, $\frac{v^*}{2} \ln \frac{v^*+v}{v^*-v}$). Z $v(0) = 0$: $v(t) = v^* \tanh\left(\frac{gt}{v^*}\right)$.
- 3 Po 8 s: $\frac{gt}{v^*} = \frac{78,4}{39,2} = 2$, $v = 39,2 \tanh 2 \approx 37,8$ m/s. Przy oporze liniowym $39,2(1 - e^{-2}) \approx 33,9$ m/s.

Wynik: $v(t) = v^* \tanh(gt/v^*)$; po 8 s ok. 37,8 m/s zamiast 33,9 m/s.

Sprawdzenie: dla małych t mamy $\tanh x \approx x$, więc $v \approx gt$, czyli swobodny spadek ✓. Przy oporze kwadratowym ciało dłużej spada prawie swobodnie, bo dla małych prędkości v^2 jest znacznie mniejsze od v (w jednostkach v^*).

- 1 Rozwiąż $y' = x y^2$, $y(0) = 1$. Na jakim przedziale istnieje rozwiązanie?
- 2 Woda wypływa przez otwór w dnie zbiornika. Z prawa Torricellego $A \dot{h} = -a\sqrt{2gh}$, gdzie $A = 1 \text{ m}^2$ to pole przekroju zbiornika, a $a = 10 \text{ cm}^2$ pole otworu. Na początku $h = 1 \text{ m}$. Po jakim czasie poziom spadnie do połowy, a po jakim zbiornik się opróżni?
- 3 Rozwiąż $y' = t y$, $y(0) = 2$. Czy przy dzieleniu przez y gubimy rozwiązanie równowagowe $y = 0$?

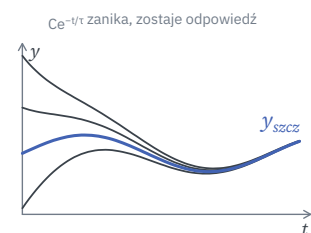
▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §2.2.

4 Równania liniowe pierwszego rzędu

4.1 Czynniki całkujący

Równanie liniowe pierwszego rzędu ma postać $y' + p(t)y = g(t)$. Boyce pokazuje pomysł przypisywany Leibnizowi: pomnożyć równanie przez taką funkcję $\mu(t)$, żeby lewa strona stała się pochodną iloczynu μy . Z reguły iloczynu $(\mu y)' = \mu y' + \mu' y$, więc potrzebujemy $\mu' = p\mu$: Boyce §2.1



🔧 METODA · CZYNNIK CAŁKUJĄCY

$$y' + p(t)y = g(t), \quad \mu(t) = e^{\int p(t) dt}, \quad (\mu y)' = \mu g \implies y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu g dt + C \right).$$

Rozwiązanie ogólne ma postać „szczególne + $C \cdot$ (rozwiązanie jednorodne)”. Dla stałego $p = 1/\tau$ część jednorodna to $Ce^{-t/\tau}$: zanika ze stałą czasową τ , a zostaje odpowiedź na wymuszenie g .

4.2 Modelowanie: bilans

Bardzo wiele modeli pierwszego rzędu to po prostu bilans: **tempo zmian = tempo dopływu – tempo odpływu**. Tak opisuje się ilość soli w mieszalniku, ładunek kondensatora, ciepło w ciele, lek we krwi i pieniądze na koncie. Boyce zaleca, żeby zawsze sprawdzać jednostki obu stron i pytać, kiedy model przestaje działać. Boyce §2.3

Przykład 4.1

Mieszalnik

Zbiornik zawiera 200 L wody, w której rozpuszczono Q_0 gramów soli. Dopływa roztwór o stężeniu 0,4 g/L z prędkością r L/min, a dobrze wymieszana ciecz odpływa z tą samą prędkością. Znajdź $Q(t)$ i wartość graniczną. Dla $r = 5$ L/min i $Q_0 = 20$ g oblicz, po jakim czasie ilość soli będzie się różnić od granicznej o mniej niż 1%.

- 1 Dopływ: $0,4r$ g/min. Odpływ: stężenie w zbiorniku $Q/200$ razy r . Bilans: $\dot{Q} = 0,4r - \frac{rQ}{200}$. (por. Boyce §2.3)
- 2 Postać liniowa: $\dot{Q} + \frac{r}{200}Q = 0,4r$, czynnik $\mu = e^{rt/200}$. Rozwiązanie: $Q(t) = 80 + (Q_0 - 80)e^{-rt/200}$. Wartość graniczna $Q_L = 80$ g.
- 3 Dla $Q_0 = 20$: $|Q - 80| = 60e^{-0,025t} < 0,01 \cdot 80$, czyli $e^{-0,025t} < \frac{1}{75}$, $t > 40 \ln 75 \approx 172,7$ min.

Wynik: $Q(t) = 80 + (Q_0 - 80)e^{-rt/200}$; $Q_L = 80$ g; dla danych liczb ok. 173 min.

Sprawdzenie: $Q_L = 0,4 \text{ g/L} \cdot 200 \text{ L}$, czyli po długim czasie w zbiorniku jest roztwór taki sam jak dopływający ✓. Stała czasowa $200/r = 40$ min to czas „wymiany” zawartości zbiornika.

Przykład 4.2

Równanie, które zaraz rozwiążemy numerycznie

Rozwiąż $y' = 2 - t - \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$. To równanie pojawi się ponownie w części 6.

- 1 Postać liniowa: $y' + \frac{1}{2}y = 2 - t$, czynnik $\mu = e^{t/2}$, więc $(e^{t/2}y)' = (2 - t)e^{t/2}$.
- 2 Przez części: $\int (2 - t)e^{t/2} dt = 2(2 - t)e^{t/2} + 4e^{t/2} = (8 - 2t)e^{t/2}$.
- 3 $y = 8 - 2t + Ce^{-t/2}$, a z $y(0) = 1$: $C = -7$.

Wynik: $y(t) = 8 - 2t - 7e^{-t/2}$.

Sprawdzenie: $y' = -2 + \frac{7}{2}e^{-t/2}$, a $2 - t - \frac{1}{2}y = 2 - t - 4 + t + \frac{7}{2}e^{-t/2} \checkmark$. Dla dużych t rozwiązanie zbliża się do prostej $8 - 2t$, niezależnie od warunku początkowego.

1 Rozwiąż $(1 + t^2) y' + 2ty = 6t^2$, zauważając, że lewa strona to pochodna iloczynu.

2 Obwód RL: $L \dot{I} + RI = \mathcal{E}$, gdzie $L = 0,5 \text{ H}$, $R = 10 \Omega$, $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $I(0) = 0$. Znajdź $I(t)$, stałą czasową i prąd po $0,1 \text{ s}$.

3 Rozwiąż $y' + y = \sin t$. Opisz, co zostaje po długim czasie, i porównaj fazę odpowiedzi z fazą wymuszenia.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §2.1, §2.3.

5 Równania autonomiczne i stabilność

5.1 Linia fazowa

Równanie $y' = f(y)$, w którym prawa strona nie zależy od czasu, nazywamy **autonomicznym**. Spadające ciało i myszy z sowami to równania autonomiczne. Ich zachowanie odczytujemy z wykresu samej funkcji $f(y)$, bez rozwiązywania: Boyce §2.5

- miejsca zerowe f to stany równowagi;
- gdzie $f(y) > 0$, rozwiązanie rośnie, a gdzie $f(y) < 0$, maleje;
- równowaga y^* jest **stabilna** (przyciągająca), gdy f zmienia znak z $+$ na $-$, czyli zwykle gdy $f'(y^*) < 0$. Jest **niestabilna**, gdy $f'(y^*) > 0$.

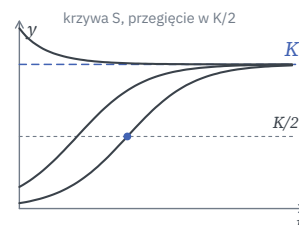
Oś y z naniesionymi stanami równowagi i strzałkami kierunku to **linia fazowa**. Kryterium z pochodną to znowu wzór Taylora: blisko y^* mamy $f(y) \approx f'(y^*)(y - y^*)$, więc odchylenie od równowagi rośnie albo maleje wykładniczo.

5.2 Równanie logistyczne

Wzrost wykładniczy $y' = ry$ nie może trwać wiecznie, bo kończą się zasoby. Najprostsza poprawka to **równanie logistyczne** (Verhulsta):

Boyce §2.5

$$y' = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y.$$



Dla małych y to prawie $y' = ry$. Gdy y zbliża się do K , tempo wzrostu spada do zera. Stany równowagi to $y = 0$ (niestabilny) i $y = K$ (stabilny). K to **pojemność środowiska**. Rozwiązanie (zmiennie rozdzielone, ułamki proste):

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0) e^{-rt}}.$$

Dla $0 < y_0 < K/2$ wykres ma kształt litery S z punktem przegięcia w $y = K/2$, gdzie wzrost jest najszybszy.

Przykład 5.1

Populacja z odłowem

Populacja ryb rośnie logistycznie z $r = 0,5$ na rok i $K = 1000$ ton, a rybacy odławiają stałe h ton na rok: $y' = 0,5 \left(1 - \frac{y}{1000}\right) y - h$. Znajdź stany równowagi dla $h = 80$. Przy jakim h populacja na pewno wyginie?

- 1 Równowaga: $0,5y - 0,0005y^2 = 80$, czyli $y^2 - 1000y + 160\,000 = 0$, $y = 200$ albo $y = 800$.
- 2 Wykres $f(y)$ to parabola otwarta w dół. Między 200 a 800 jest $f > 0$, poza tym przedziałem $f < 0$. Zatem $y = 800$ jest stabilna, a $y = 200$ niestabilna. Gdy populacja spadnie poniżej 200 ton, wyginie.
- 3 Największa wartość $0,5(1 - y/1000)y$ to $rK/4 = 125$ ton na rok, przy $y = 500$. Dla $h > 125$ zawsze $f < 0$: brak równowag, populacja wymiera z każdego stanu.

Wynik: dla $h = 80$: równowagi 200 t (niestabilna) i 800 t (stabilna); dla $h > 125$ t/rok populacja wymiera.

Sprawdzenie: dla $h = 0$ równowagi to 0 i 1000 ✓. Gdy h rośnie, dwie równowagi zbliżają się do siebie i przy $h = 125$ zlewają się w jedną. To *bifurkacja*: mała zmiana parametru zmienia jakościowo zachowanie układu.

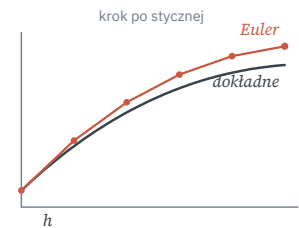
ZADANIA · CZĘŚĆ 5

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Znajdź stany równowagi równania $y' = y(y - 1)(y - 2)$ i określ ich stabilność. Narysuj linię fazową.
- 2 Populacja rośnie logistycznie z $r = 0,5$ na rok i $K = 1000$, zaczynając od $y_0 = 100$. Po jakim czasie osiągnie połowę pojemności środowiska?
- 3 Wykaż, że największe tempo wzrostu w równaniu logistycznym występuje przy $y = K/2$ i wynosi $rK/4$.

6 Metoda Eulera

Większości równań nie da się rozwiązać wzorem. Pole kierunków podsuwa jednak prosty sposób liczenia. Stoimy w punkcie (t_0, y_0) , znamy nachylenie $f(t_0, y_0)$, więc idziemy wzdłuż stycznej przez krótki czas h . W nowym punkcie liczymy nowe nachylenie i powtarzamy: [Boyce §2.7](#)



🔧 METODA EULERA

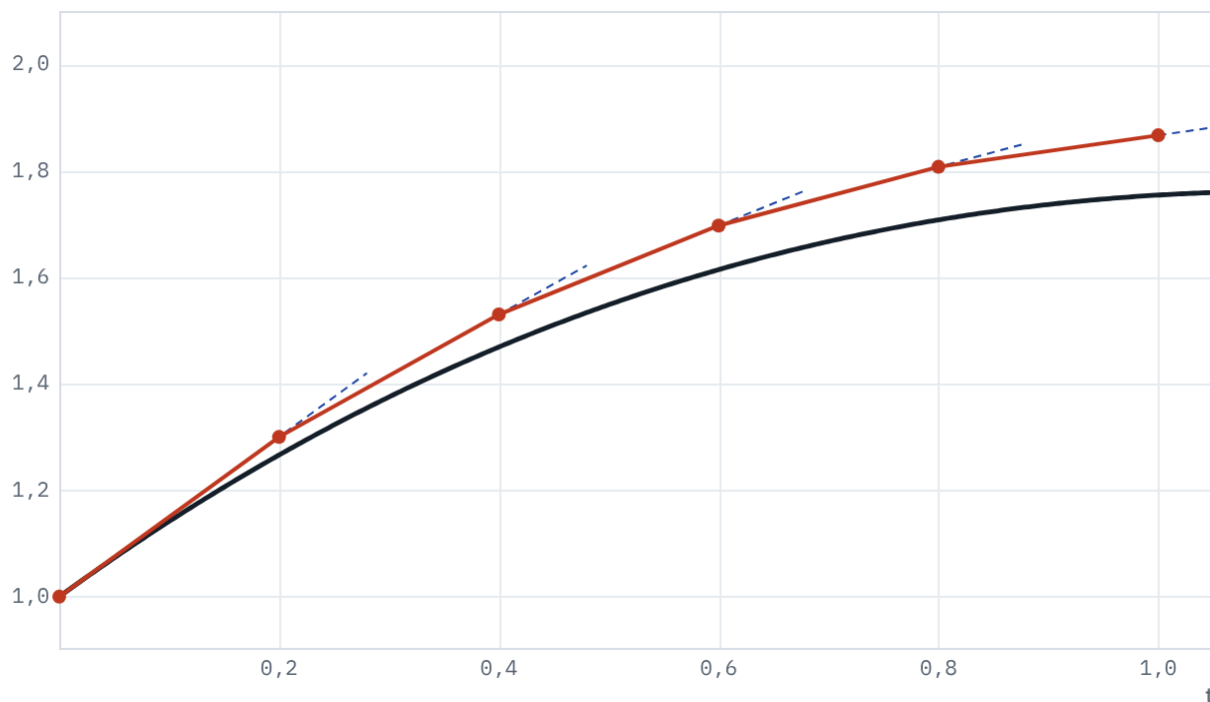
$$t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n).$$

To przybliżenie liniowe z lekcji 1.4 **Rachunek różniczkowy w praktyce**, $y(t+h) \approx y(t) + y'(t)h$, stosowane krok po kroku. Błąd na końcu ustalonego przedziału jest w przybliżeniu proporcjonalny do h : dwa razy mniejszy krok daje dwa razy mniejszy błąd. Mówimy, że to metoda **pierwszego rzędu**.

Feynman liczy tak w rozdziale 9 ruch ciężarka na sprężynie (9-6), a potem ruch planety (9-7), ale z ważnym ulepszeniem: prędkość liczy w połowie kroku, a położenie na całych krokach. Błąd takiej metody maleje jak h^2 , czyli o wiele szybciej. Ten sam pomysł poznaliśmy jako iloraz symetryczny w lekcji 1.3 Pochodne i metodę środków w lekcji 1.5 Całki. [FLP I-9-6, 9-7](#)

SYMULACJA 2

Metoda Eulera krok po kroku dla $y' = 2 - t - \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$ (przykład 4.2). Zmniejszaj krok h i obserwuj błąd w $t = 1$. Przełącz na metodę ulepszoną (Heuna), która uśrednia nachylenie na początku i na końcu kroku: błąd maleje teraz jak h^2 .



— rozwiązanie dokładne — przybliżenie numeryczne - - - styczne w krokach

metoda Euler

krok h · liczba kroków 0,200 · 5

$y(1)$ numerycznie 1,86657

$y(1)$ dokładnie 1,75429

błąd 0,11228

Stan na rysunku: metoda Eulera, $h = 0,200$, $y(1) \approx 1,86657$, błąd 0,11228.

Przykład 6.1

Pięć kroków Eulera

Przybliż rozwiązanie $y' = 2 - t - 0,5y$, $y(0) = 1$ metodą Eulera z krokiem $h = 0,2$ do $t = 1$ i porównaj z rozwiązaniem dokładnym z przykładu 4.2.

- 1 $f(0; 1) = 1,5$, więc $y_1 = 1 + 0,2 \cdot 1,5 = 1,3$.
- 2 $f(0,2; 1,3) = 2 - 0,2 - 0,65 = 1,15$, więc $y_2 = 1,53$. por. Boyce §2.7
- 3 Dalej: $y_3 = 1,697$, $y_4 = 1,8073$, $y_5 = 1,86657$.
- 4 Dokładnie: $y(1) = 8 - 2 - 7e^{-0,5} \approx 1,7543$.

Wynik: Euler daje $y(1) \approx 1,867$, wartość dokładna to 1,754: błąd ok. 0,11, czyli 6%.

Sprawdzenie: dla $h = 0,1$ błąd wynosi ok. 0,055, a dla $h = 0,05$ ok. 0,027. Spada proporcjonalnie do h ✓. Euler zawyża, bo rozwiązanie jest wklęsłe, a styczne leżą nad nim.

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Metoda Eulera z krokiem $h = 0,25$ przybliż rozwiązanie $y' = y$, $y(0) = 1$ w $t = 1$.
■ ■ ■ Porównaj z e .
- 2 Powtórz poprzednie zadanie dla $h = 0,1$ i $h = 0,05$. Jak zmienia się błąd? Jaką znaną granicę widać w wyniku $(1 + h)^{1/h}$?
- 3 Metoda Heuna: $k_1 = f(t_n, y_n)$, $k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1)$, $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$. Wykaż, że dla $y' = y$ jeden krok mnoży y przez $1 + h + \frac{1}{2}h^2$. Oblicz wynik dla $h = 0,25$ i porównaj błąd z metodą Eulera.

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §2.7.

7 Istnienie i jednoznaczność

Zanim zaczniemy liczyć, warto wiedzieć, czy rozwiązanie w ogóle istnieje i czy jest tylko jedno. Dla fizyka to pytanie o determinizm: czy stan początkowy wyznacza przyszłość jednoznacznie?

🔑 TWIERDZENIA O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI

Równanie liniowe $y' + p(t)y = g(t)$, $y(t_0) = y_0$: jeśli p i g są ciągłe na przedziale otwartym zawierającym t_0 , to na całym tym przedziale istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.

Boyce tw. 2.4.1

Równanie ogólne $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$: jeśli f i $\partial f / \partial y$ są ciągłe w prostokącie zawierającym (t_0, y_0) , to w pewnym przedziale wokół t_0 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.

Boyce tw. 2.4.2, 2.8.1

Z jednoznaczności wynika ważny wniosek geometryczny: gdy f i $\partial f / \partial y$ są ciągłe, **wykresy dwóch różnych rozwiązań nie mogą się przecinać**. W szczególności rozwiązanie, które nie startuje z równowagi, nie może jej osiągnąć w skończonym czasie. Może się do niej tylko zbliżać. Zadanie 7.2 pokazuje, co się dzieje, gdy założenia zawiodą.

Różnica między „na całym przedziale” a „w pewnym przedziale” jest istotna. Rozwiązanie równania nieliniowego może uciec do nieskończoności w skończonym czasie, choć w samym równaniu nic tego nie zapowiada.

Przykład 7.1

Wybuch w skończonym czasie

Rozwiąż $y' = y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$, i wyznacz przedział, na którym rozwiązanie istnieje.

- 1 $f = y^2$ i $\partial f / \partial y = 2y$ są ciągłe wszędzie, więc rozwiązanie istnieje i jest jedyne, przynajmniej blisko $t = 0$.
- 2 Rozdzielamy: $y^{-2} dy = dt$, $-1/y = t + c$, $c = -2$: $y = \frac{1}{2-t}$. por. Boyce §2.4
- 3 Rozwiązanie rośnie bez ograniczeń przy $t \rightarrow 2$. Istnieje tylko dla $t < 2$.

Wynik: $y = 1/(2-t)$ na przedziale $(-\infty; 2)$.

Sprawdzenie: dla $y(0) = y_0 > 0$ wybuch następuje w $t = 1/y_0$, czyli zależy od warunku początkowego, a nie od samego równania ✓. Takiego zachowania nie ma w równaniach liniowych.

1 Na jakim przedziale twierdzenie 2.4.1 gwarantuje istnienie jedyne rozwiązanie zagadnienia $(t-4)y' + (\ln t)y = 3t, y(2) = 1$?

2 Wykaż, że zagadnienie $y' = 3y^{2/3}, y(0) = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania dla $t \geq 0$: $y = 0$ i $y = t^3$. Które założenie twierdzenia 2.4.2 nie jest spełnione?

3 Rozwiąż $y' = y^2$ z $y(0) = 2$ oraz z $y(0) = -2$. Gdzie istnieje każde z rozwiązań?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §2.4, §2.8.

8 Równania liniowe drugiego rzędu

8.1 Stałe współczynniki: zgadnij wykładniczą

Równanie $ay'' + by' + cy = 0$ ze stałymi a, b, c opisuje sprężyny, obwody RLC i wahadła po linearyzacji. Boyce zaczyna od pytania, jaka funkcja ma pochodne podobne do siebie samej. Taką funkcją jest wykładnicza. Wstawiamy $y = e^{rt}$: [Boyce §3.1](#)

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \implies ar^2 + br + c = 0.$$

To **równanie charakterystyczne**. Zwykle równanie kwadratowe zastępuje równanie różniczkowe.

🔧 ROZWIĄZANIE OGÓLNE · TRZY PRZYPADKI

Dwa różne pierwiastki rzeczywiste $r_1 \neq r_2$: $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Pierwiastki zespolone $r = \lambda \pm i\mu$: $y = e^{\lambda t} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$. Wynika to ze wzoru Eulera $e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$ (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory). [Boyce §3.3](#)

Pierwiastek podwójny r : $y = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$. [Boyce §3.4](#)

8.2 Dlaczego dwie stałe i dlaczego suma działa

Zasada superpozycji: jeśli y_1 i y_2 są rozwiązaniami równania liniowego jednorodnego, to $c_1 y_1 + c_2 y_2$ też jest rozwiązaniem. Wynika to wprost z liniowości różniczkowania. Dla równań nieliniowych to nieprawda. [Boyce tw. 3.2.2](#)

Do wyznaczenia jednego rozwiązania potrzeba dwóch warunków początkowych, $y(t_0)$ i $y'(t_0)$: w fizyce położenia i prędkości. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla równań drugiego

rzędu gwarantuje, że to wystarczy. Dwa rozwiązania y_1, y_2 dają wszystkie inne, jeśli ich wrońskian $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ nie jest zerem w jakimś punkcie (wtedy nie jest zerem nigdzie na przedziale), czyli gdy nie są do siebie proporcjonalne. Boyce tw. 3.2.1, 3.2.4

Przykład 8.1

Druga pochodna proporcjonalna do funkcji

Rozwiąż $y'' - 4y = 0$ z warunkami $y(0) = 2, y'(0) = -2$.

- 1 Równanie charakterystyczne $r^2 - 4 = 0, r = \pm 2: y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$. por. Boyce §3.1
- 2 $y(0) = c_1 + c_2 = 2, y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = -2$, więc $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{2}$.

Wynik: $y = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$.

Sprawdzenie: $y'' = 2e^{2t} + 6e^{-2t} = 4y \checkmark, y(0) = 2 \checkmark, y'(0) = 1 - 3 = -2 \checkmark$. Dla dużych t dominuje rosnący wyraz e^{2t} , choć na początku funkcja maleje.

ZADANIA · CZĘŚĆ 8

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Rozwiąż $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$.

- 2 Rozwiąż $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$. Zapisz wynik jako $R \cos(2t - \delta)$.

- 3 Rozwiąż $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. Sprawdź bezpośrednio, że te^{-t} jest rozwiązaniem.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §3.1–3.4.

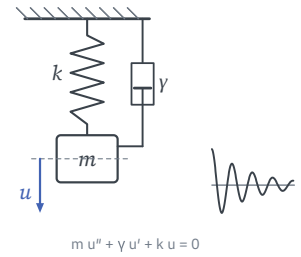
9 Drgania swobodne i tłumione

9.1 Ciężarek na sprężynie

Ciężarek o masie m wisi na sprężynie o stałej k . Wychylenie z położenia równowagi oznaczamy u . Działa siła sprężystości $-ku$ i opór (tłumik) $-\gamma \dot{u}$. Ciężar znosi się z napięciem sprężyny w położeniu równowagi: Boyce §3.7 · FLP I-21-2

$$m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = 0.$$

Bez tłumienia ($\gamma = 0$) równanie charakterystyczne $mr^2 + k = 0$ ma pierwiastki $\pm i\omega_0$, gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ to **częstość własna**. Rozwiązanie $u = R \cos(\omega_0 t - \delta)$ to drganie harmoniczne o okresie $T = 2\pi/\omega_0$. Amplituda R i faza δ zależą od warunków początkowych, a okres nie.



$$m u'' + \gamma u' + k u = 0$$

9.2 Trzy rodzaje tłumienia

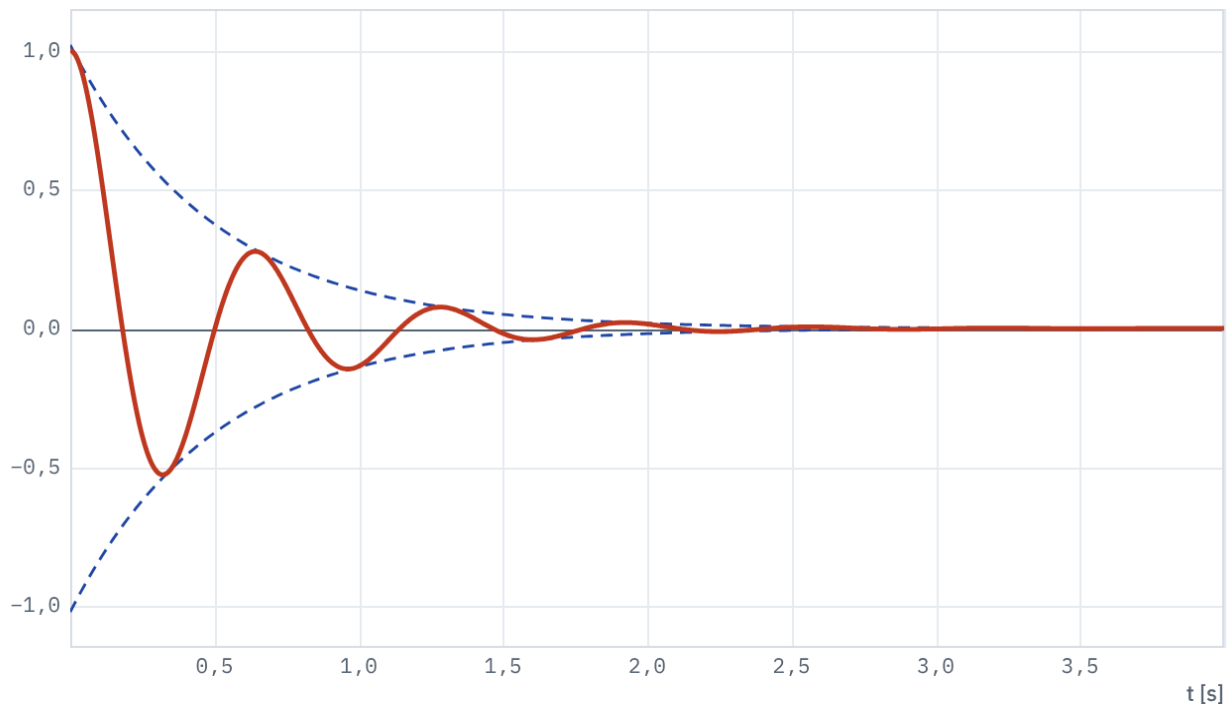
Z tłumieniem pierwiastki to $r = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$. O wszystkim decyduje znak wyróżnika, czyli porównanie γ^2 z $4km$: Boyce §3.7 · FLP I-24-2

- **Tłumienie słabe** ($\gamma^2 < 4km$): $u = Re^{-\gamma t/(2m)} \cos(\mu t - \delta)$, gdzie $\mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}$ to **pseudoczęstość**. Amplituda maleje wykładniczo, a okres jest nieco dłuższy niż bez tłumienia: $\mu/\omega_0 \approx 1 - \gamma^2/(8km)$.
- **Tłumienie krytyczne** ($\gamma^2 = 4km$): $u = (A + Bt)e^{-\gamma t/(2m)}$. Spośród ruchów bez drgań ten zanika najszybciej. Tak projektuje się amortyzatory i wskaźniki przyrządów.
- **Tłumienie silne** ($\gamma^2 > 4km$): suma dwóch zanikających wykładniczych. Ciało pełźnie do równowagi i przechodzi przez nią najwyżej raz.

Boyce podkreśla, że o tym, czy tłumienie jest „małe”, decyduje bezwymiarowy stosunek $\gamma^2/(4km)$, a nie sama wartość γ .

SYMULACJA 3

Oscylator tłumiony. Zmieniaj masę, sztywność i tłumienie. Wykres pokazuje $u(t)$ i obwiednię $\pm Re^{-\gamma t/2m}$. Odczyt mówi, w którym z trzech przypadków jesteś. Znajdź tłumienie krytyczne: ciężarek wraca najszybciej i nie przechodzi na drugą stronę.



— $u(t)$ — obwiednia

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 10,00 rad/s

$\gamma^2 / 4km$ 0,040

tłumienie słabe

μ (pseudoczęstość) 9,80 rad/s

γ krytyczne 20,0 kg/s

$|u| < 5\%$ od 1,38 s

Stan na rysunku: $m = 1,0$ kg, $k = 100$ N/m, $\gamma = 4,0$ kg/s, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$; tłumienie słabe.

9.3 To samo równanie w obwodzie

W obwodzie RLC ładunek q spełnia $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \mathcal{E}(t)$. To dokładnie równanie oscylatora: indukcyjność gra rolę masy, opór rolę tłumienia, a $1/C$ rolę sztywności. Feynman podkreśla, że w obwodzie łatwo uzyskać tarcie ściśle proporcjonalne do prędkości (prawo Ohma), a w mechanice jest to trudne. Dlatego obwody są najlepszymi „oscylatorami z podręcznika”.

FLP I-25-4 · Boyce §3.7

Przykład 9.1

Jak szybko gasną drgania

Ciężarek $m = 1$ kg na sprężynie $k = 100$ N/m z tłumieniem $\gamma = 4$ kg/s. Wyznacz częstotliwość własną, pseudoczęstotliwość i pseudookres. Ile razy maleje amplituda w ciągu jednego okresu? Jakie tłumienie byłoby krytyczne?

- 1 $\omega_0 = \sqrt{100/1} = 10$ rad/s. $\gamma^2/(4km) = 16/400 = 0,04$: tłumienie słabe.
- 2 $\mu = \frac{\sqrt{400 - 16}}{2} \approx 9,80$ rad/s, pseudookres $T_d = 2\pi/\mu \approx 0,641$ s.
- 3 Na okres amplituda mnoży się przez $e^{-\gamma T_d/(2m)} = e^{-2 \cdot 0,641} \approx 0,277$, czyli maleje ok. 3,6 raza.
- 4 Tłumienie krytyczne: $\gamma_{kr} = 2\sqrt{km} = 20$ kg/s.

Wynik: $\omega_0 = 10$ rad/s, $\mu \approx 9,80$ rad/s, $T_d \approx 0,64$ s; amplituda maleje ok. 3,6 raza na okres; $\gamma_{kr} = 20$ kg/s.

Sprawdzenie: $\mu/\omega_0 = 0,980$, a przybliżenie $1 - \gamma^2/(8km) = 0,98 \checkmark$. Tłumienie, które w ciągu kilku okresów wygasa ruch, zmienia częstotliwość tylko o 2%.

ZADANIA · CZĘŚĆ 9

3 zadania · ok. 30 min

- 1  Ciężarek o masie 0,5 kg zawieszono na sprężynie o stałej 50 N/m. Oblicz częstotliwość własną, okres i częstotliwość drgań bez tłumienia.
- 2  Jakie tłumienie jest krytyczne dla układu z poprzedniego zadania? Zapisz rozwiązanie przy tłumieniu krytycznym dla $u(0) = 0,1$ m, $\dot{u}(0) = 0$.
- 3  Obwód RLC: $L = 0,1$ H, $C = 10$ μ F, $R = 20$ Ω . Oblicz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, opór krytyczny i pseudoczęstotliwość. Czy obwód drga?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §3.7.

10.1 Rozwiązanie = swobodne + wymuszone

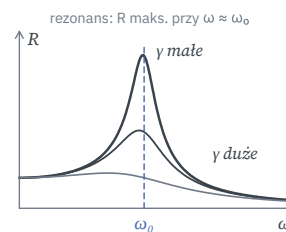
Gdy na oscylator działa siła zewnętrzna $F(t)$, równanie staje się niejednorodne: $m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = F(t)$. Rozwiązanie ogólne to **suma** rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i jednego **rozwiązania szczególnego**. To znowu skutek liniowości. Boyce §3.5

Dla wymuszenia $F_0 \cos \omega t$ rozwiązania szczególnego szukamy w postaci $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ (metoda współczynników nieoznaczonych). Przy tłumieniu część swobodna zanika i zostaje **stan ustalony**: drganie z częstotliwością *wymuszenia*, a nie własną, o amplitudzie

$$R(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}.$$

10.2 Rezonans i dudnienia

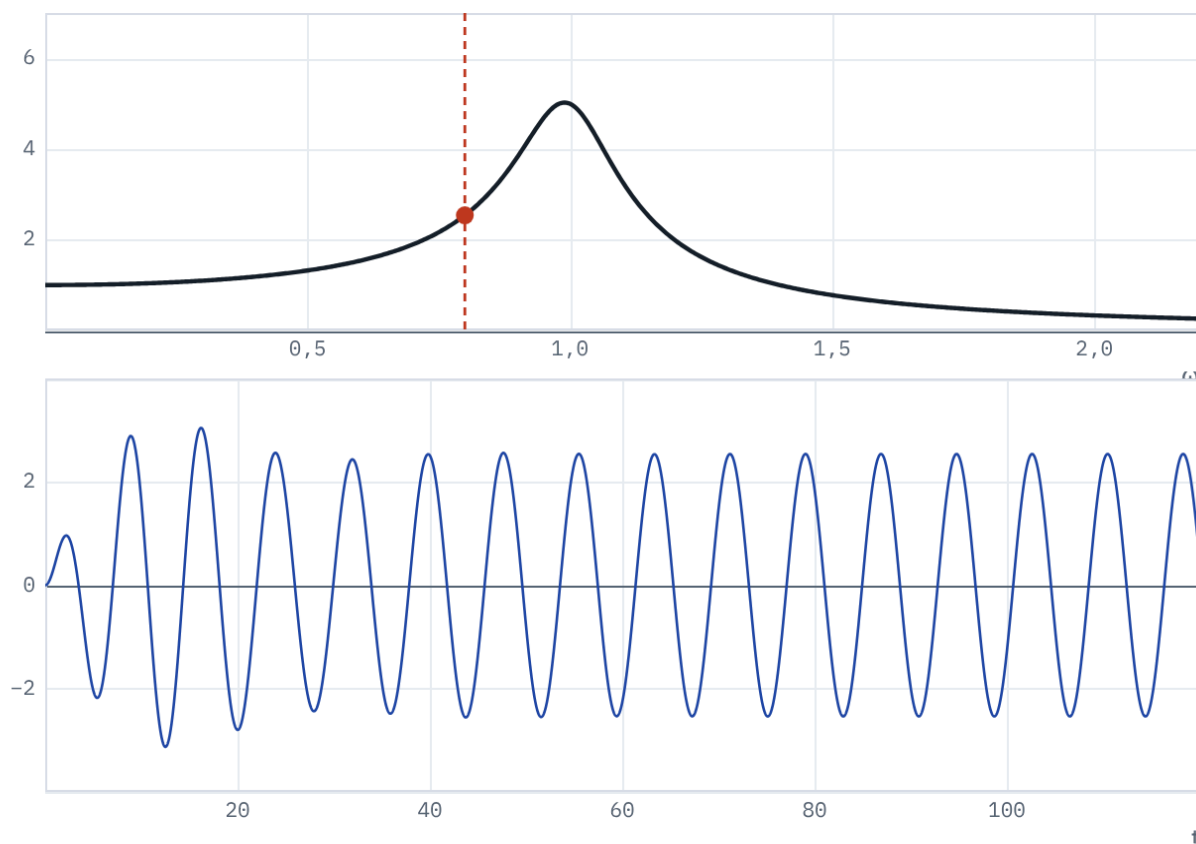
Amplituda jest największa, gdy częstota wymuszenia jest bliska własnej. To **rezonans**. Gdy $\gamma^2 < 2mk$, maksimum leży w $\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2mk}\right)$ i jest tym wyższe, im słabsze tłumienie. Przy silniejszym tłumieniu amplituda maleje monotonicznie od $\omega = 0$. Bez tłumienia, przy $\omega = \omega_0$, amplituda rośnie liniowo w czasie bez ograniczeń. Boyce zauważa, że rezonans bywa groźny w konstrukcjach, a pożyteczny w przyrządach, takich jak sejsmografy. Boyce §3.8 · FLP I-23-2



Gdy tłumienia nie ma, a ω jest bliska ω_0 , ale różna, pojawiają się **dudnienia**. Szybkie drganie ma amplitudę, która wolno rośnie i maleje. Słychać to, gdy dwa kamertony o bliskich częstotliwościach brzmią razem.

SYMULACJA 4

Krzywa rezonansowa. Zmieniaj tłumienie i częstość wymuszenia. U góry amplituda stanu ustalonego $R(\omega)$, na dole ruch $u(t)$ od spoczynku: stan przejściowy, potem drganie z częstością wymuszenia. Przy małym tłumieniu i ω blisko ω_0 zobaczysz dudnienia.



— $R(\omega)$ — wybrane ω — $u(t)$ od spoczynku

$R(\omega)$ stan ustalony 2,54

ω maks. 0,990

R maks. 5,03

dobroć $Q \approx 1/\gamma$ 5,0

największe $|u|$ na wykresie 3,13

Stan na rysunku: $m = k = F_0 = 1$, $\gamma = 0,20$, $\omega = 0,80$; $R(\omega) = 2,54$; $\max |u| = 3,13$.

Przykład 10.1

Ile razy rezonans wzmacnia drgania

Oscylator z przykładu 9.1 ($m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $\gamma = 4$ kg/s) wymuszamy siłą o amplitudzie $F_0 = 1$ N. Przy jakiej częstotliwości amplituda stanu ustalonego jest największa? Ile razy jest większa od wychylenia statycznego F_0/k ?

- 1 $\omega_{\max} = 10\sqrt{1 - \frac{16}{200}} \approx 9,59$ rad/s.
- 2 $R(\omega_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{(100 - 92)^2 + 16 \cdot 92}} \approx 0,0255$ m.
- 3 Wychylenie statyczne $F_0/k = 0,01$ m. Stosunek ok. 2,55.

Wynik: $\omega_{\max} \approx 9,6$ rad/s, amplituda ok. 2,55 cm, czyli 2,55 razy więcej niż statycznie.

Sprawdzenie: dla słabego tłumienia wzmocnienie to w przybliżeniu $Q = \frac{m\omega_0}{\gamma} = 2,5$, tzw. dobroć ✓. Przy $\gamma = 0,4$ kg/s wzmocnienie wzrosłoby do ok. 25.

ZADANIA · CZĘŚĆ 10

3 zadania · ok. 35 min

- 1 ■ ■ ■ Znajdź rozwiązanie szczególne równania $y'' + y = 3 \cos 2t$ w postaci $A \cos 2t$. Zapisz rozwiązanie ogólne.
- 2 ■ ■ ■ Dla oscylatora $m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $F_0 = 1$ N oblicz amplitudę stanu ustalonego przy $\omega = \omega_0$ dla $\gamma = 4$ i $\gamma = 0,4$ kg/s. Jak amplituda w rezonansie zależy od tłumienia?
- 3 ■ ■ ■ Rozwiąż $u'' + 4u = 0,9 \cos(1,8t)$, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$. Zapisz wynik jako iloczyn dwóch sinusów i odczytaj okres dudnień.

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Więcej zadań: Boyce §3.5, §3.8.

× „Rozwiązać równanie różniczkowe to znaleźć liczbę.”

Rozwiązaniem jest funkcja, a dokładniej rodzina funkcji. Konkretną wybiera dopiero warunek początkowy (część 2).

× „Każdy stan równowagi jest tym, co zobaczymy po długim czasie.”

Tylko stabilny. Równowagę niestabilną, jak 750 myszy, najmniejsze zaburzenie zamienia w ucieczkę (przykład 1.1).

× „Jeśli równanie wygląda niewinnie, rozwiązanie istnieje zawsze.”

$y' = y^2$ ma rozwiązanie, które ucieka do nieskończoności w skończonym czasie (przykład 7.1). Równania liniowe mają gwarancję istnienia na całym przedziale, na którym p i g są ciągłe.

× „Mniejszy krok w metodzie Eulera zawsze rozwiązuje problem.”

Błąd maleje tylko jak h , więc dziesięć razy dokładniej oznacza dziesięć razy więcej obliczeń. Lepsza metoda (Heun, Runge–Kutta, metoda połowy kroku Feynmana) wygrywa z mniejszym krokiem.

× „Tłumienie zmienia głównie częstość drgań.”

Słabe tłumienie zmienia częstość tylko o czynnik $\approx 1 - \gamma^2/(8km)$, a amplitudę wygasza wykładniczo (przykład 9.1).

× „Wymuszony oscylator drga ze swoją częstością własną.”

W stanie ustalonym drga z częstością *wymuszenia*. Częstość własna decyduje o tym, jak duża jest amplituda (rezonans) i jakie jest przesunięcie fazy.

× „Superpozycja działa zawsze.”

Tylko dla równań liniowych. Suma dwóch rozwiązań równania wahadła z $\sin \theta$ na ogół nie jest rozwiązaniem. Dlatego tak cenimy linearyzację.

- 1 Co trzeba wiedzieć, żeby jednoznacznie przewidzieć ruch ciężarka na sprężynie?

Położenie i prędkość w jednej chwili. Równanie jest drugiego rzędu, więc potrzebne są dwa warunki początkowe.

- 2 Czy dwie różne krzywe rozwiązań równania $y' = f(t, y)$ z gładkim f mogą się przeciąć?

Nie. W punkcie przecięcia zagadnienie początkowe miałyby dwa rozwiązania, wbrew twierdzeniu o jednoznaczności.

- 3 W równaniu $\dot{v} = 9,8 - v/4$ ciało rzucono w dół z prędkością 60 m/s. Co się stanie?

Zwolni do 39,2 m/s. Nad prędkością graniczną opór przewyższa ciężar.

- 4 Równanie charakterystyczne ma pierwiastki $-1 \pm 3i$. Jak wygląda ruch?

Tłumione drgania: $e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$, pseudoczęstość 3 rad/s, amplituda maleje e razy w jednostce czasu.

- 5 Jak sprawdzić, czy rozwiązanie metodą Eulera jest wiarygodne?

Policzyć jeszcze raz z krokiem dwa razy mniejszym. Różnica między wynikami szacuje błąd. Jeśli się nie zmniejsza, coś jest nie tak.

- 6 Dlaczego żołnierze nie maszerują w nogę po mostach?

Żeby rytm kroków nie trafił w częstość własną mostu. Przy słabym tłumieniu nawet małe okresowe wymuszenie daje w rezonansie duże amplitudy.

PIERWSZY RZĄD

$$y' = p(x)q(y): \int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x) dx$$

$$y' + p y = g: \mu = e^{\int p}, (\mu y)' = \mu g$$

$$\dot{y} = k(A - y) \Rightarrow y = A + (y_0 - A)e^{-kt}$$

$$\text{logistyczne: } y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

$$y' = f(y): \text{równowaga } f(y^*) = 0, \text{ stabilna} \\ \text{gdy } f'(y^*) < 0$$

$$\text{Euler: } y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \text{ błąd } \sim h$$

$$\text{istnienie: } f, \partial_y f \text{ ciągle} \Rightarrow \text{jedyne} \\ \text{rozwiązanie lokalnie}$$

DRUGI RZĄD I DRGANIA

$$ay'' + by' + cy = 0: ar^2 + br + c = 0$$

$$r_{1,2} \text{ rzecz.: } c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}; \lambda \pm i\mu:$$

$$e^{\lambda t}(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$$

$$r \text{ podwójny: } (c_1 + c_2 t)e^{rt}$$

$$m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = F(t), \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\text{tłumienie krytyczne: } \gamma^2 = 4km; \mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}$$

$$R(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

$$\text{RLC: } L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \mathcal{E}(t)$$

Do przeczytania u Boyce'a i DiPrimy

- **Obowiązkowo:** rozdz. 1 (całość), §2.1–2.5 (liniowe, rozdzielone, modelowanie, liniowe a nieliniowe, autonomiczne), §2.7 (Euler), §3.1, §3.3, §3.4, §3.7 (drżania).
- **Dla chętnych:** §2.6 (równania zupełne), §2.8 (dowód twierdzenia o istnieniu metodą Picarda), §3.2 (wroński), §3.5–3.6 (metody dla równań niejednorodnych), §3.8 (rezonans i dudnienia).

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 21-1...21-4 (równania liniowe, oscylator, warunki początkowe), 23-2 (oscylator wymuszony z tłumieniem).
- **Dla chętnych:** 9-6...9-7 (rozwiązywanie równań ruchu krok po kroku: sprężyna i planeta), 24-2 (drżania tłumione), 25-4 (analogie elektryczne).

Równania różniczkowe to język całej dalszej fizyki: mechanika, obwody, ciepło, fale. W fizyce pojawiają się od pierwszego działu (Dział 1: Ruch i jego przyczyny), a dalej pojawiają się równania cząstkowe, w których szukana funkcja zależy od położenia i czasu naraz.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\dot{Q} = 320 - 0,25 Q$ (mg/h). Równowaga $Q^* = 1280$ mg, przyciągająca.
2. $\dot{T} = -0,05 (T - 20)$. Przy 60°C : $-2^\circ\text{C}/\text{min}$. Przy 10°C : $+0,5^\circ\text{C}/\text{min}$. Równanie jest to samo dla stygnięcia i ogrzewania.
3. $m\dot{v} = mg - kv^2$, $v^* = \sqrt{mg/k}$. $k = \frac{mg}{v^{*2}} = \frac{49}{39,2^2} \approx 0,032$ kg/m.

Zadania • część 2

1. $y' = -2Ce^{-2t}$, a $-2y + 6 = -2Ce^{-2t} - 6 + 6 \checkmark$. $C + 3 = 1$, więc $C = -2$.
2. (a) zwyczajne, 2. rzędu, liniowe (współczynnik t nie przeszkadza); (b) 1. rzędu, nieliniowe; (c) cząstkowe, 2. rzędu, liniowe; (d) 2. rzędu, nieliniowe; (e) 2. rzędu, liniowe.
3. $c = 8 - 39,2 = -31,2$; $v = 39,2 - 31,2 e^{-t/4}$, $x = 39,2t - 124,8(1 - e^{-t/4})$. Numerycznie $T \approx 7,84$ s, $v(T) \approx 34,8$ m/s.

Zadania • część 3

1. $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$, $C = -1$: $y = \frac{2}{2 - x^2}$. Istnieje dla $|x| < \sqrt{2}$.
2. $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g} dt$, więc $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - \frac{a}{A}\sqrt{2g}t$. Opróżnienie: $t = \frac{2\sqrt{h_0}A}{a\sqrt{2g}} \approx 452$ s. Połowa: $t = \frac{2(1 - \sqrt{0,5})A}{a\sqrt{2g}} \approx 132$ s. Druga połowa wody wypływa dłużej niż pierwsza, bo ciśnienie maleje.
3. $\ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C$, $y = 2e^{t^2/2}$. Tak, $y = 0$ też jest rozwiązaniem (dla $y(0) = 0$). Rozwiązanie ogólne $y = Ce^{t^2/2}$ zawiera je dla $C = 0$.

Zadania • część 4

1. $((1+t^2)y)' = 6t^2$, $(1+t^2)y = 2t^3 + c$, $y = \frac{2t^3 + c}{1+t^2}$.
2. $I = 1,2(1 - e^{-20t})$ A, $\tau = L/R = 0,05$ s. $I(0,1) = 1,2(1 - e^{-2}) \approx 1,04$ A.
3. $y = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + Ce^{-t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t - \frac{\pi}{4}) + Ce^{-t}$. Po długim czasie zostaje drganie o amplitudzie $1/\sqrt{2}$, opóźnione o 45° względem wymuszenia. Część Ce^{-t} to stan przejściowy.

Zadania • część 5

1. $f'(y) = 3y^2 - 6y + 2$: $f'(0) = 2 > 0$ (niestabilna), $f'(1) = -1 < 0$ (stabilna), $f'(2) = 2 > 0$ (niestabilna). Strzałki: poniżej 0 w dół, między 0 a 1 w górę, między 1 a 2 w dół, powyżej 2 w górę.
2. $\frac{100 \cdot 1000}{100 + 900e^{-0,5t}} = 500 \iff 900e^{-0,5t} = 100$, $t = 2 \ln 9 \approx 4,4$ roku.
3. $f(y) = ry - \frac{r}{K}y^2$, $f'(y) = r - \frac{2r}{K}y = 0 \iff y = K/2$, $f(K/2) = \frac{rK}{4}$. To maksimum, bo $f'' = -2r/K < 0$.

Zadania • część 6

1. Każdy krok mnoży przez 1,25: $1,25^4 \approx 2,441$. Błąd ok. 0,277.
2. $1,1^{10} \approx 2,594$ (błąd 0,125), $1,05^{20} \approx 2,653$ (błąd 0,065): błąd mniej więcej się połowi. $(1+h)^{1/h} \rightarrow e$ przy $h \rightarrow 0$: to jedna z definicji liczby e .
3. $k_1 = y_n, k_2 = y_n(1+h), y_{n+1} = y_n(1+h+\frac{1}{2}h^2)$, czyli trzy pierwsze wyrazy szeregu e^h . $1,28125^4 \approx 2,695$, błąd ok. 0,023 zamiast 0,277, dwanaście razy mniejszy.

Zadania • część 7

1. $p = \frac{\ln t}{t-4}, g = \frac{3t}{t-4}$ są ciągłe dla $t > 0, t \neq 4$. Przedział zawierający $t_0 = 2$: $0 < t < 4$.
2. Dla $y = t^3$: $y' = 3t^2 = 3(t^3)^{2/3} \checkmark$. $\partial f / \partial y = 2y^{-1/3}$ nie jest określona (ani ciągła) w $y = 0$, więc twierdzenie nie gwarantuje jednoznaczności.
3. $y = \frac{y_0}{1-y_0 t}$. Dla $y_0 = 2$: $y = \frac{2}{1-2t}$ na $t < 0,5$. Dla $y_0 = -2$: $y = \frac{-2}{1+2t}$ na $t > -0,5$, więc dla wszystkich $t \geq 0$.

Zadania • część 8

1. $r = -2, -3$: $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, c_1 + c_2 = 2, -2c_1 - 3c_2 = 3$, więc $c_1 = 9, c_2 = -7$: $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$.
2. $r = \pm 2i$: $y = \cos 2t + \sin 2t = \sqrt{2} \cos(2t - \frac{\pi}{4})$.
3. $r = -1$ podwójny: $y = (c_1 + c_2 t)e^{-t}, c_1 = 1, c_2 - c_1 = 0$: $y = (1+t)e^{-t}$. Dla te^{-t} : $y' = (1-t)e^{-t}, y'' = (t-2)e^{-t}, y'' + 2y' + y = (t-2+2-2t+t)e^{-t} = 0 \checkmark$.

Zadania • część 9

1. $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}, T = 0,628 \text{ s}, f = 1,59 \text{ Hz}$.
2. $\gamma_{kr} = 2\sqrt{km} = 10 \text{ kg/s}$. $r = -\gamma/(2m) = -10$ (podwójny): $u = (A+Bt)e^{-10t}, A = 0,1, B - 10A = 0$, więc $u = 0,1(1+10t)e^{-10t} \text{ m}$.
3. $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$. Krytycznie: $R^2 = 4L/C, R_{kr} = 200 \Omega$. $R < R_{kr}$, więc obwód drga z $\mu = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2} = \sqrt{10^6 - 10^4} \approx 995 \text{ rad/s}$.

Zadania • część 10

1. $-4A + A = 3, A = -1$: $y_p = -\cos 2t$. Ogólne: $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cos 2t$.
2. Przy $\omega = \omega_0$: $R = \frac{F_0}{\gamma\omega_0}$. $\gamma = 4; 0,025 \text{ m}; \gamma = 0,4; 0,25 \text{ m}$. Amplituda w rezonansie jest odwrotnie proporcjonalna do tłumienia.
3. $u_p = \frac{0,9}{4-3,24} \cos 1,8t \approx 1,184 \cos 1,8t$. Z warunków początkowych $u = 1,184(\cos 1,8t - \cos 2t) = 2,368 \sin(0,1t) \sin(1,9t)$. Obwiednia $|\sin 0,1t|$ ma okres $\pi/0,1 \approx 31,4$, więc tyle trwa jedno dudnienie.

Matematyka • Równania różniczkowe. Źródła: W. E. Boyce, R. C. DiPrima, D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, wyd. 11 (Wiley 2017), rozdz. 1-3; R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I, 9-6...9-7, 21, 23, 24, 25-4. Przykłady i zadania są własne; modele i metody za Boyce'em i DiPrimą. Cytaty w tłumaczeniu własnym.