

Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa

Pole jeziora na mapie da się zmierzyć, obchodząc tylko jego brzeg: tak działa planimetr. Ładunek w pudełku da się zmierzyć, nie zaglądając do środka, tylko mierząc pole elektryczne na ściankach. Oba triki to ta sama idea co wzór Newtona–Leibniza: całka z pochodnej po obszarze równa się czemuś na jego brzegu. Z trzech twierdzeń, które to wyrażają, wyjdą równanie ciągłości, prawo Archimedesusa i równania Maxwella w dwóch postaciach.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

20 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. II, 3-3...3-8, 13-2, 13-4, 13-5, 18-1; J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7, §16.4, §16.8–16.10

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: pole jeziora z jednego spaceru
- 1 Twierdzenie Greena
- 2 Twierdzenie Stokesa
- 3 Twierdzenie Gaussa
- 4 Równanie ciągłości i równania Maxwella
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: pole jeziora z jednego spaceru

Planimetr to przyrząd z XIX wieku: wodzisz jego rysikiem po konturze figury na mapie, a licznik na kółku pokazuje jej pole. Przyrząd nie „widzi” wnętrza figury, rejestruje tylko ruch wzdłuż brzegu. Jak to możliwe? W jednym wymiarze znamy podobny trik: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, czyli całka z pochodnej po odcinku zależy tylko od wartości w dwóch punktach brzegowych (lekcja 1.5 Całki). W lekcji 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne było tak samo dla gradientu: praca zależy tylko od końców drogi.

Pytanie na start. Obchodzisz brzeg figury przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i sumujesz $\frac{1}{2}(x dy - y dx)$. Dlaczego wynik to pole figury? Odpowiedź w części 1, a liczby w przykładzie 1.1.

Twierdzenie Greena

W lekcji 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja cyrkulacja po małym kwadracie wyszła równa $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y$. Podzielmy teraz duży obszar D na wiele małych kwadratów i dodajmy cyrkulacje po nich wszystkich, każdą przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wspólny bok dwóch sąsiednich kwadratów przebywamy dwa razy, w przeciwnych kierunkach, więc jego wkłady się znoszą. Zostają tylko odcinki leżące na brzegu D . FLP II-3-6 Suma po lewej to cyrkulacja po brzegu, suma po prawej przechodzi w całkę podwójną (lekcja 3.3 Całki podwójne i potrójne):

TWIERDZENIE GREENA

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Brzeg ∂D obiegamy dodatnio: tak, żeby obszar był po lewej stronie. Dla obszaru z dziurą brzeg zewnętrzny idzie przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a wewnętrzny zgodnie z nim. por. Stewart §16.4

Dla $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$ nawias po prawej to $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, więc całka podwójna to pole obszaru. Stąd odpowiedź na pytanie z prologu i zasada działania planimetru:

$$\text{pole}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x dy - y dx).$$

Przykład 1.1

Koło i elipsa

Sprawdź twierdzenie Greena dla pola $[-y; x]$ na kole jednostkowym. Potem oblicz pole elipsy o półosiach a, b z całki po jej brzegu.

- 1 Lewa strona: $\vec{r} = [\cos t; \sin t]$, $-y dx + x dy = (\sin^2 t + \cos^2 t) dt$, całka 2π (lekcja 3.4, zadanie 2.1).
- 2 Prawa strona: $\partial_x Q - \partial_y P = 1 + 1 = 2$, razy pole koła π : $2\pi \checkmark$.
- 3 Elipsa: $\vec{r} = [a \cos t; b \sin t]$, $x dy - y dx = (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = ab dt$. Pole $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi ab = \pi ab$.

Wynik: obie strony to 2π ; pole elipsy πab .

Sprawdzenie: dla $a = b = R$ dostajemy $\pi R^2 \checkmark$. Ten sam wynik daje zmiana zmiennych $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$ z jakobianem $ab\rho$ (lekcja 3.3 Całki podwójne i potrójne) $\checkmark$.

Przykład 1.2

Pole wielokąta ze współrzędnych wierzchołków

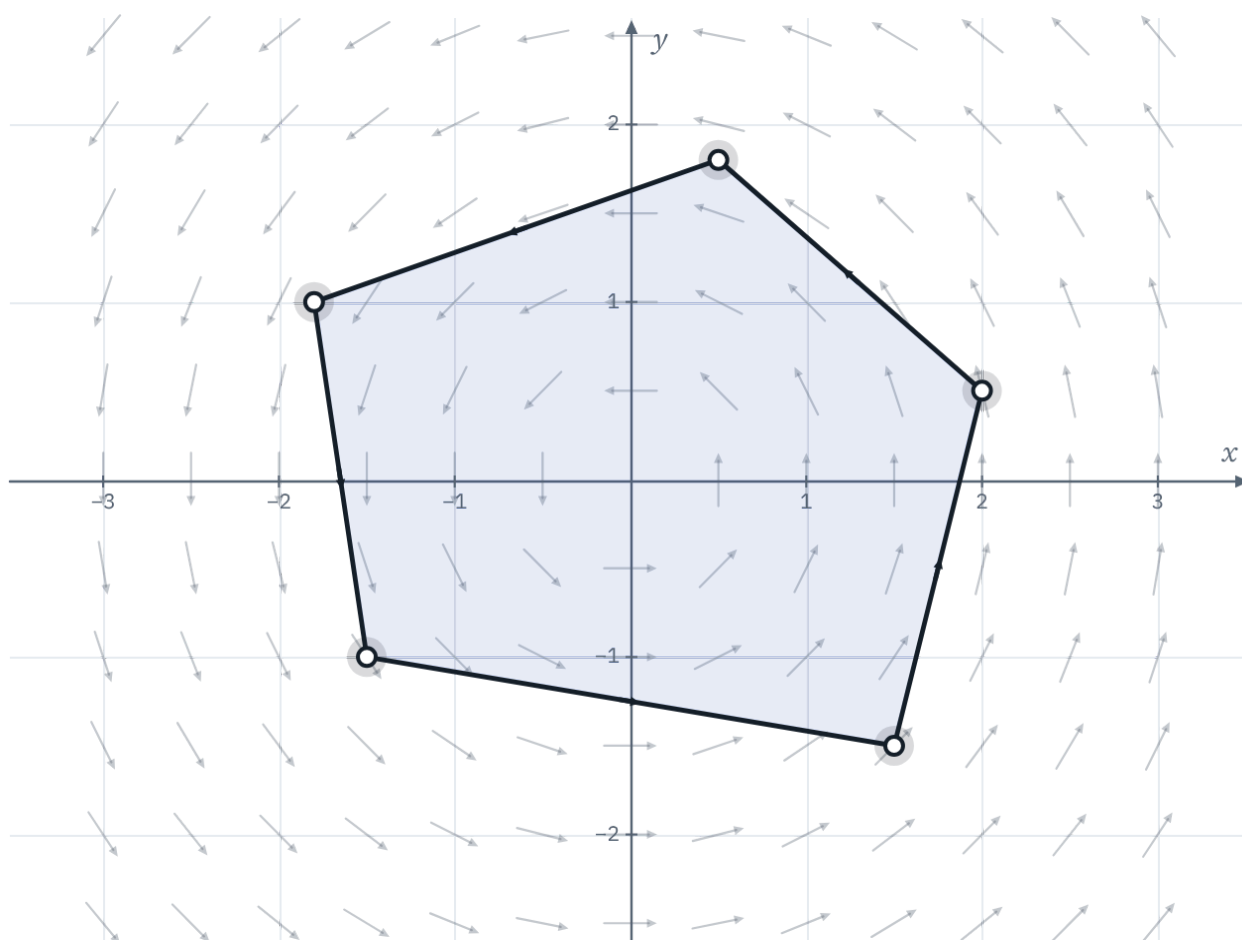
Oblicz pole czworokąta o wierzchołkach (w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara) $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(5; 3)$, $(1; 4)$.

- 1 Na odcinku od $(x_1; y_1)$ do $(x_2; y_2)$ całka $\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$ wynosi $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ (zadanie 1.6). Pole wielokąta to suma takich wyrazów po bokach: **wzór sznurowadłowy** (wzór Gaussa na pole).
- 2 Boki: $0 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$; $4 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 12$; $5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 17$; $1 \cdot 0 - 0 \cdot 4 = 0$.
- 3 Pole $= \frac{1}{2}(0 + 12 + 17 + 0) = 14,5$.

Wynik: 14,5.

Sprawdzenie: prostokąt $[0; 5] \times [0; 4]$ ma pole 20; odcinamy trójkąty w rogach: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 1,5 + 2 + 2 = 5,5$, zostaje 14,5 $\checkmark$.

SYMULACJA 1 Twierdzenie Greena dla wielokąta. Przeciągaj wierzchołki. Lewa strona to całka po brzegu, liczona wzdłuż boków, prawa to suma rotacji po małych komórkach wewnątrz. Dla pola wektorowego $\frac{1}{2}[-y; x]$ obie strony równają się polu powierzchni figury. Włącz komórki, żeby zobaczyć, jak cyrkulacje na wspólnych bokach się znoszą.



— brzeg (obieg dodatni) — komórki — pole F

∫ po brzegu 8,945

∬ (∂Q/∂x - ∂P/∂y) dA 8,944

∂Q/∂x - ∂P/∂y 1

pole (sznurowadło) 8,945

Rotacja pola $\frac{1}{2}[-y; x]$ to 1, więc obie strony to pole wielokąta. Całka po brzegu to dokładnie wzór sznurowadłowy.

Stan na rysunku: pole $\frac{1}{2}[-y; x]$ (pole powierzchni); wierzchołki $[-1,50; -1,00]$, $[1,50; -1,50]$, $[2,00; 0,50]$, $[0,50; 1,80]$, $[-1,80; 1,00]$; $\oint = 8,945$, $\iint = 8,944$.

Twierdzenie Greena wyjaśnia też pułapkę z lekcji 3.4. Dla wiru $\frac{[-y; x]}{x^2+y^2}$ rotacja jest zerowa poza zerem. Weźmy pierścień między dwiema krzywymi otaczającymi zero: Green daje cyrkulację zewnętrzną minus wewnętrzną równą zero. Zatem cyrkulacja po *każdej* krzywej wokół zera jest taka sama jak po okręgu: 2π (zadanie 1.5).

- 1 Sprawdź twierdzenie Greena dla $P = xy$, $Q = x^2$ na kwadracie $[0; 1]^2$, licząc obie strony.
- 2 Oblicz wzorem sznurowadłowym pole trójkąta $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(1; 3)$.
- 3 Oblicz pole pod jednym łukiem cycloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Użyj $\text{pole} = -\oint y \, dx$ (to też wynika z Greena, z $P = -y$, $Q = 0$).
- 4 Oblicz $\oint_C (3y - e^{\sin x}) \, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, dy$, gdzie C to okrąg $x^2 + y^2 = 4$ przebiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
- 5 Dla wiru $\vec{F} = \frac{[-y; x]}{x^2 + y^2}$ zastosuj twierdzenie Greena do pierścienia $1 \leq r \leq 2$. Wywnioskuj, że cyrkulacja po dowolnej krzywej zamkniętej okrążającej zero raz przeciwnie do ruchu wskazówek zegara to 2π .
- 6 Pokaż, że po odcinku od $(x_1; y_1)$ do $(x_2; y_2)$ całka $\frac{1}{2} \int (x \, dy - y \, dx)$ wynosi $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$. Co ta liczba oznacza geometrycznie? Dlaczego wzór sznurowadłowy działa też dla wielokątów wklęsłych?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Twierdzenie Stokesa

Ten sam argument działa na zakrzywionej powierzchni S w przestrzeni. Dzielimy ją na małe płatki; cyrkulacja po każdym to $(\nabla \times \vec{C}) \cdot \hat{n} \, \Delta A$ (lekcja 3.5). Wspólne boki sąsiednich płatków się znoszą, zostaje brzeg: FLP II-3-6

🔧 TWIERDZENIE STOKESA

$$\oint_{\partial S} \vec{C} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{C}) \cdot \hat{n} \, dA.$$

Cyrkulacja po brzegu to strumień rotacji przez powierzchnię. Kierunki wiąże reguła prawej dłoni: palce wzdłuż obiegu brzegu, kciuk wskazuje $\hat{n}$. Twierdzenie Greena to przypadek płaski z $\hat{n} = \hat{z}$. por. Stewart §16.8

Zaskakujący wniosek: po prawej może stać *dowolna* powierzchnia rozpięta na tym samym brzegu, płaska jak membrana bębna albo wydęta jak worek siatki na motyle. Wynik jest ten sam, bo zależy tylko od lewej strony. Przyczyna: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = 0$ (lekcja 3.5), więc pole rotacji jest bezźródłowe i przez każdą powierzchnię „przecinającą” tę samą rurę przechodzi tyle samo.

Przykład 2.1

Membrana i worek

Dla $\vec{C} = [-y; x; 0]$ i okręgu jednostkowego w płaszczyźnie xy (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, patrząc z góry) oblicz strumień rotacji przez koło i przez górną półsferę o tym samym brzegu.

- 1 $\nabla \times \vec{C} = [0; 0; 2]$ (lekcja 3.5, przykład 3.1). Reguła prawej dłoni: $\hat{n}$ w górę.
- 2 Koło: $\hat{n} = \hat{z}$, strumień $2 \cdot \pi = 2\pi$.
- 3 Półsfera: $\hat{n} = \hat{r}$, $[0; 0; 2] \cdot \hat{r} = 2 \cos \theta$, $dA = \sin \theta d\theta d\varphi$. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

Wynik: 2π przez obie powierzchnie, tyle co cyrkulacja po okręgu.

Sprawdzenie: cyrkulacja $[-y; x; 0]$ po okręgu jednostkowym to 2π (przykład 1.1) ✓.

W fizyce twierdzenie Stokesa zamienia prawa całkowite na lokalne. Prawo Ampère'a mówi, że dla prądów stałych cyrkulacja pola magnetycznego po pętli jest proporcjonalna do prądu przez nią przechodzącego: $c^2 \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \vec{j} \cdot \hat{n} dA$. Prawa strona to strumień gęstości prądu, lewa (po Stokesie) to strumień $c^2 \nabla \times \vec{B}$. Skoro równość zachodzi dla każdej małej powierzchni, to w każdym punkcie $c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j}/\epsilon_0$. (FLP II-13-4) (Feynman pisze stałą jako $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$; w podręcznikach często spotkasz $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$.) Szczegóły w fizyce: Dział 15: Prąd i pole magnetyczne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Sprawdź twierdzenie Stokesa dla $\vec{C} = [z; x; y]$ i okręgu jednostkowego w płaszczyźnie $z = 0$ (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, patrząc z góry), biorąc za powierzchnię koło.
- 2 Z prawa Ampère'a, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$, znajdź pole magnetyczne w odległości r od długiego prostego przewodu. Oblicz je dla $I = 10$ A, $r = 5$ cm ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m/A) i porównaj z polem Ziemi (ok. $50 \mu\text{T}$).

- 3 Wewnątrz przewodu o promieniu a , w którym prąd I płynie równomiernie, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} [-y; x; 0]$. Oblicz $\nabla \times \vec{B}$ i porównaj z $\mu_0 \vec{j}$.

- 4 Pokaż na dwa sposoby, że strumień rotacji przez dowolną zamkniętą powierzchnię (np. sferę) jest zerowy.

- 5 W obszarze kołowym o promieniu R jednorodne pole magnetyczne rośnie w tempie $\frac{dB}{dt} = 0,1 \text{ T/s}$. Prawo Faradaya: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dA$. Oblicz siłę elektromotoryczną we współśrodkowej pętli o promieniu $r = 10 \text{ cm} < R$ i natężenie pola elektrycznego na niej. Zapisz prawo w postaci różniczkowej.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Twierdzenie Gaussa

Teraz o oczko wyżej. Dzielimy bryłę V na małe kostki; strumień na zewnątrz każdej to $(\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V$ (lekcja 3.5). Przez wspólną ściankę dwóch sąsiednich kostek strumień wypływający z jednej jest strumieniem wpływającym do drugiej, więc w sumie się znosi. Zostaje strumień przez zewnętrzną powierzchnię: FLP II-3-3

🔑 TWIERDZENIE GAUSSA (GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO, O DYWERGENCJI)

$$\oiint_{\partial V} \vec{C} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{C} dV.$$

Strumień na zewnątrz zamkniętej powierzchni to suma źródeł w środku. Normalna $\hat{n}$ wskazuje na zewnątrz. por. Stewart §16.9

Liczby z lekcji 3.5 to potwierdzają: dla $\vec{r}$ mamy $\nabla \cdot \vec{r} = 3$, a strumień przez sferę to $4\pi R^3 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$, przez walec $3V$, przez sześcián $3V$.

Przykład 3.1

Ładunek w dowolnym pudełku

Pokaż, że strumień pola $k\vec{r}/r^3$ przez dowolną zamkniętą powierzchnię S to $4\pi k$, jeśli S otacza początek układu, i 0, jeśli nie otacza.

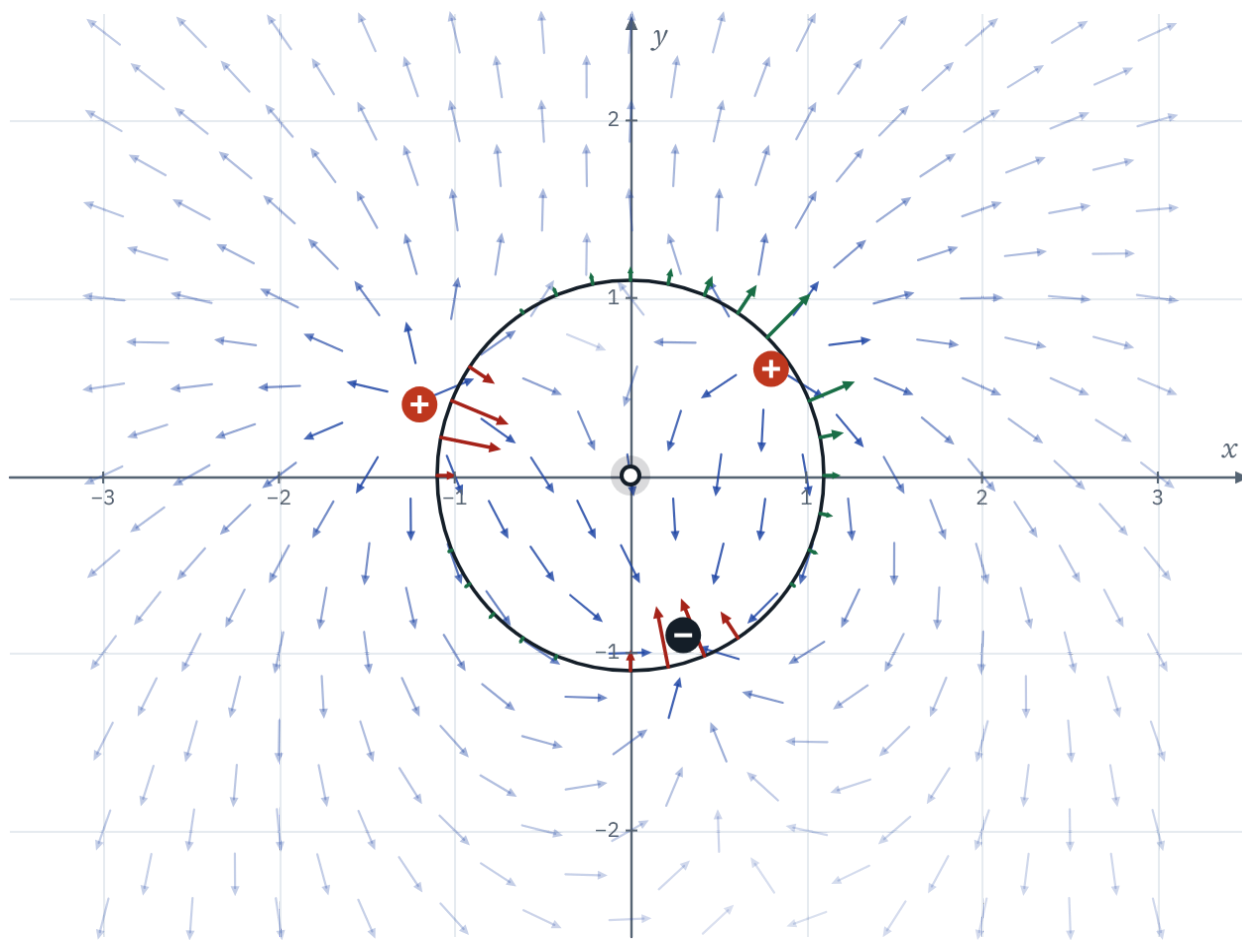
- 1 Poza zerem $\nabla \cdot (k\vec{r}/r^3) = 0$ (lekcja 3.5, przykład 2.1). Jeśli S nie otacza zera, pole jest gładkie w całym wnętrzu i Gauss daje strumień 0.
- 2 Jeśli otacza: wytnij z wnętrza małą kulę o promieniu ε wokół zera. W obszarze między S a sferą dywergencja jest zerowa, więc strumień na zewnątrz tego obszaru jest zerowy: przez S (normalna na zewnątrz) minus przez małą sferę (normalna od zera) daje 0.
- 3 Przez małą sferę strumień to $4\pi k$ (lekcja 3.5, przykład 1.1), więc przez S też.

Wynik: $4\pi k$ albo 0, niezależnie od kształtu powierzchni.

Sprawdzenie: dla sześcianu wokół ładunku numeryczna całka po jednej ścianie daje $\frac{4\pi k}{6}$ (lekcja 3.5, zadanie 1.6) ✓. Dla pola ładunku q , $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$, strumień to q/ϵ_0 : prawo Gaussa (Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa). Dla wielu ładunków strumienie się dodają, więc liczy się suma ładunków w środku.

SYMULACJA 2

Prawo Gaussa na płaszczyźnie: trzy ładunki $(+1, +1, -1)$ i okrąg, który możesz przesuwac i powiększać. W płaszczyźnie pole ładunku słabnie jak $1/r$, a strumień przez okrąg wokół ładunku q to $2\pi q$. Odczyt porównuje strumień liczony po okręgu z 2π razy sumą ładunków w środku. Ładunki poza okręgiem nic nie dodają, choć ich pole przez okrąg przechodzi.



— pole E — ładunek + — ładunek - — wplyw — wplyw

strumień / 2π 0,000

suma ładunków w środku 0

strumień 0,000

Suma ładunków w środku to zero, więc strumień też, choć pole przechodzi przez okrąg: ile wpływa, tyle wypływa.

Stan na rysunku: okrąg o środku $[0,00; 0,00]$, $R = 1,10$; strumień/ $2\pi = 0,000$; suma ładunków w środku 0.

Przykład 3.2

Prawo Archimedesesa

Ciało o objętości V jest zanurzone w cieczy o gęstości ρ_c . Ciśnienie na głębokości to $p = p_0 - \rho_c g z$ (oś z w górę). Pokaż, że wypadkowa sił parcia to $\rho_c g V$ w górę, i oblicz ją dla sześcianu o boku 10 cm w wodzie.

- 1 Na element powierzchni działa siła $-p \hat{n} dA$ (ciecz pcha do środka). Wypadkowa: $\vec{F} = -\oint p \hat{n} dA$.
- 2 Wersja twierdzenia Gaussa dla funkcji skalarnej (zadanie 3.5): $\oint p \hat{n} dA = \iiint \nabla p dV$.
- 3 Wewnątrz ciała przedłużamy p tym samym wzorem (całka po brzegu zależy tylko od wartości na powierzchni). $\nabla p = [0; 0; -\rho_c g]$, więc $\vec{F} = -\iiint \nabla p dV = [0; 0; \rho_c g V]$.
- 4 Sześcian: $V = 10^{-3} \text{ m}^3$, $F = 1000 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} \approx 9,81 \text{ N}$.

Wynik: siła wyporu $\rho_c g V$ w górę, dla dowolnego kształtu; dla sześcianu 9,81 N.

Sprawdzenie: dla sześcianu bezpośrednio: siły na ściankach bocznych się znoszą, a różnica ciśnień między dnem a wieczkiem to $\rho_c g \cdot 0,1$, razy pole $0,01 \text{ m}^2$: $1000 \cdot 9,81 \cdot 0,001 = 9,81 \text{ N} \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz strumień pola $[x^3; y^3; z^3]$ na zewnątrz sfery jednostkowej.
- 2 Oblicz strumień pola $[x + y^2; y + \sin z; z + e^x]$ na zewnątrz powierzchni walca $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$.
- 3 Kula o promieniu R jest równomiernie naładowana ładunkiem Q . Z prawa Gaussa znajdź natężenie pola wewnątrz ($r < R$) i na zewnątrz.
- 4 Strumień pola $\vec{C}$ na zewnątrz każdej małej sfery wokół punktu P jest ujemny. Co wiesz o $\nabla \cdot \vec{C}$ w P ? Czy może się zdarzyć, że $\nabla \cdot \vec{C} = 0$ wszędzie w kuli, a strumień przez jej brzeg jest niezerowy?
- 5 Zastosuj twierdzenie Gaussa do pola $\vec{C} = f \vec{c}$, gdzie $\vec{c}$ to dowolny stały wektor, i wyprowadź $\oint f \hat{n} dA = \iiint \nabla f dV$ (użyte w przykładzie 3.2).

4 Równanie ciągłości i równania Maxwella

Niech ρ będzie gęstością czegoś, co jest zachowane (masy, ładunku, energii), a $\vec{j}$ gęstością jego przepływu: ilością przechodzącą w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni. Dla płynu o prędkości $\vec{v}$ jest $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Ilość w ustalonej objętości V może się zmienić tylko przez przepływ przez jej brzeg:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot \hat{n} dA = - \iiint_V \nabla \cdot \vec{j} dV.$$

Minus, bo strumień na zewnątrz zmniejsza zawartość. Druga równość to twierdzenie Gaussa. Skoro równość zachodzi dla każdej objętości, także dowolnie małej, funkcje pod całkami muszą być równe: FLP II-13-2

🔊 RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Lokalna postać zasady zachowania: w żadnym punkcie nic nie znika i nic się nie pojawia, jedynie przepływa. Dla nieściśliwej cieczy (ρ stała) zostaje $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Równanie przewodnictwa ciepła z lekcji 3.5 to właśnie równanie ciągłości dla energii cieplnej: $\rho = cT$, $\vec{j} = \vec{h} = -\kappa \nabla T$, skąd $c \partial_t T = \kappa \nabla^2 T$. FLP II-3-4

Przykład 4.1

Rozprężający się obłok

Obłok gazu rozszerza się tak, że prędkość w każdym punkcie to $\vec{v} = H\vec{r}$ (H stałe), a gęstość jest jednakowa w całym obłoku, $\rho(t)$. Jak gęstość zależy od czasu?

- 1 $\nabla \cdot (\rho H \vec{r}) = \rho H \nabla \cdot \vec{r} = 3H\rho$ (gęstość nie zależy od położenia).
- 2 Równanie ciągłości: $\rho' + 3H\rho = 0$, więc $\rho = \rho_0 e^{-3Ht}$ (lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne).

Wynik: $\rho(t) = \rho_0 e^{-3Ht}$.

Sprawdzenie: każda odległość rośnie jak e^{Ht} (bo $\dot{\vec{r}} = H\vec{r}$), więc objętość jak e^{3Ht} , a gęstość maleje w tym samym tempie, co zachowuje masę $\checkmark$. To prawo Hubble'a dla gazu, a w kosmologii H to stała Hubble'a (która akurat stała nie jest).

4.1 Równania Maxwella w dwóch postaciach

Cała elektrodynamika klasyczna mieści się w czterech równaniach. Feynman zapisuje je w postaci różniczkowej (środkowa kolumna tabeli). FLP II-18-1 Twierdzenia Gaussa i Stokesa tłumaczą każde z nich na postać całkową, w której łatwiej je zrozumieć i zmierzyć. S to zamknięta powierzchnia, C krzywa zamknięta, a Σ powierzchnia rozpięta na C , z normalną $\hat{n}$ zgodną z obiegiem C według reguły prawej dłoni; $I_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \hat{n} dA$ to prąd przez Σ .

treść	postać różniczkowa	postać całkowa
prawo Gaussa: źródłem pola elektrycznego są ładunki	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0}$
prawo Faradaya: zmienne pole magnetyczne wytwarza wir pola elektrycznego	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n} dA$
nie ma ładunków magnetycznych	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$
prawo Ampère'a z poprawką Maxwella	$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$c^2 \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{I_\Sigma}{\epsilon_0} + \frac{d}{dt} \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{n} dA$

Wyraz $\partial \vec{E} / \partial t$ w ostatnim równaniu dodał Maxwell. Bez niego dywergencja ostatniego równania dawałaby $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, bo $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$; to byłoby sprzeczne z równaniem ciągłości dla ładunku, gdy ładunek gdzieś się gromadzi (np. na okładce kondensatora). Z poprawką równanie ciągłości

wynika z równań Maxwella (zadanie 4.3). Ten sam wyraz daje fale elektromagnetyczne (Dział 16: Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Woda płynie rurą o średnicy 2 cm z prędkością 0,5 m/s, a potem rura zwęża się do średnicy 1 cm. Z jaką prędkością płynie w węższej części? Co ma z tym wspólnego $\nabla \cdot \vec{v} = 0$?

- 2 Które z pól mogą być polem prędkości nieściśliwej cieczy: $[x; -y; 0]$, $[y; x; 0]$, $[x; y; -z]$, $[x; y; -2z]$?

- 3 Weź dywergencję czwartego równania Maxwella i użyj pierwszego, żeby otrzymać równanie ciągłości dla ładunku.

- 4 W przewodniku $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (prawo Ohma). Połącz to z prawem Gaussa i równaniem ciągłości, żeby dostać równanie na gęstość ładunku ρ w środku przewodnika. Jak szybko zanika nadmiarowy ładunek w miedzi ($\sigma = 5,96 \cdot 10^7$ S/m, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m)?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Twierdzenie Stokesa wymaga konkretnej powierzchni.”

Każda powierzchnia rozpięta na tym samym brzegu daje ten sam wynik (przykład 2.1). Wybiera się najwygodniejszą.

× „Kierunek obiegu i normalnej można wybrać niezależnie.”

Nie: wiąże je reguła prawej dłoni. Zła orientacja zmienia znak jednej strony równania.

× „Skoro rotacja jest zerowa w obszarze, to cyrkulacja po każdej pętli w nim też.”

Tylko po pętłach, na których da się rozpiąć powierzchnię leżącą w obszarze. Wir wokół przewodu: pętla wokół osi nie ma takiej powierzchni, bo każda przebija oś (płaski odpowiednik: zadanie 1.5).

× „Ładunki na zewnątrz nie wpływają na pole na powierzchni Gaussa.”

Wpływają na pole, nie na całkowity strumień. Strumień ładunku zewnętrznego wpływa z jednej strony i wypływa z drugiej (symulacja 2).

× „Równania w postaci całkowej i różniczkowej mówią co innego.”

Dla pól gładkich to te same prawa przetłumaczone twierdzeniami Gaussa i Stokesa. Postać całkowa działa też tam, gdzie pole ma skok albo osobliwość.

6 Sprawdź się

1 Zapisz twierdzenie Greena.

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dA, \text{ brzeg obiegany z obszarem po lewej.}$$

2 Jak obliczyć pole figury całką po brzegu?

$$\frac{1}{2} \oint (x dy - y dx); \text{ dla wielokąta wzór sznurowadłowy.}$$

3 Zapisz twierdzenie Stokesa i powiedz, jak wiąże się kierunek obiegu z normalną.

$$\oint_{\partial S} \vec{C} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{C}) \cdot \hat{n} dA; \text{ reguła prawej dłoni.}$$

4 Zapisz twierdzenie Gaussa.

$$\oint_{\partial V} \vec{C} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{C} dV, \text{ normalna na zewnątrz.}$$

5 Ile wynosi strumień pola $k\vec{r}/r^3$ przez sześcián, który nie zawiera zera?

0.

6 Zapisz równanie ciągłości.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

7 Po co Maxwell dodał wyraz $\partial \vec{E} / \partial t$?

Bez niego równania byłyby sprzeczne z zachowaniem ładunku tam, gdzie ładunek się gromadzi.

TRZY TWIERDZENIA

Green: $\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dA$

pole = $\frac{1}{2} \oint (x dy - y dx)$; wielokąt (wierzchołki przeciwnie do ruchu wskazówek): $\frac{1}{2} \sum (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$

Stokes: $\oint_{\partial S} \vec{C} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{C}) \cdot \hat{n} dA$ (prawa dłoń)

Gauss: $\oint_{\partial V} \vec{C} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{C} dV$ ($\hat{n}$ na zewnątrz)

$\oint f \hat{n} dA = \iiint \nabla f dV$ (wypór $\rho_c g V$)

FIZYKA

ciągłość: $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{j} = \rho \vec{v}$;

nieściśliwa: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$; $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$; $c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j}/\epsilon_0 + \partial_t \vec{E}$

przewód: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. II, 3-3...3-8 (twierdzenia Gaussa i Stokesa, przewodnictwo cieplne, podsumowanie), 13-2 (zachowanie ładunku), 13-4 (prawo Ampère'a), 18-1 (równania Maxwella).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **J. Stewart**, *Multivariable Calculus*, wyd. 7: §16.4 (twierdzenie Greena), §16.8 (twierdzenie Stokesa), §16.9 (twierdzenie o dywergencji), §16.10 (podsumowanie).
- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa.

Na tym kończy się część III. Wszystkie trzy twierdzenia mają postać „całka z pochodnej po obszarze = całka po brzegu”, tak jak wzór Newtona-Leibniza; w geometrii różniczkowej to jedno twierdzenie Stokesa dla form różniczkowych. W części IV wrócą jako narzędzie: równania dyfuzji i Laplace'a (4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a) wyprowadza się z równań ciągłości, a falowe z równań Maxwella. W fizyce zobaczysz je w prawie Gaussa (Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa), prawie Ampère'a (Dział 15: Prąd i pole magnetyczne) i w falach elektromagnetycznych (Dział 16: Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Prawa: $\partial_x Q - \partial_y P = 2x - x = x$, $\iint x \, dA = \frac{1}{2}$. Lewa: dół ($y = 0$): 0; prawy bok ($x = 1$, $dx = 0$): $\int_0^1 1 \, dy = 1$; góra ($y = 1$, od $x = 1$ do 0): $\int_1^0 x \, dx = -\frac{1}{2}$; lewy bok: 0. Razem $\frac{1}{2} \checkmark$.
2. $\frac{1}{2}(0 + (4 \cdot 3 - 1 \cdot 0) + 0) = 6$. Sprawdzenie: podstawa 4, wysokość 3 $\checkmark$.
3. Brzeg: odcinek osi x od 0 do 2π (tam $y = 0$, wkład 0), potem cykloida wstecz, od $t = 2\pi$ do 0.
 $-\int_{2\pi}^0 y x' \, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = 3\pi$: trzy razy więcej niż pole koła, które toczy się po prostej.
4. $\partial_x Q - \partial_y P = 7 - 3 = 4$, całka $4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi$. Brzydkie wyrazy $e^{\sin x}$ i $\sqrt{y^4 + 1}$ nic nie wnoszą: $e^{\sin x}$ zależy tylko od x i stoi przy dx , więc jego pochodna po y jest zerowa; z $\sqrt{y^4 + 1}$ przy dy tak samo.
5. W pierścieniu rotacja jest zerowa, więc $\oint_{r=2} \circlearrowleft - \oint_{r=1} \circlearrowleft = 0$ (brzeg wewnętrzny idzie zgodnie z ruchem wskazówek zegara, stąd minus). Obie cyrkulacje to 2π . Dla dowolnej krzywej C wokół zera: weź mały okrąg wewnątrz C i obszar między nimi; ten sam argument daje $\oint_C = 2\pi$.
6. $\vec{r} = [x_1 + (x_2 - x_1)t; y_1 + (y_2 - y_1)t]$; $x y' - y x' = x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ (wyrazy z t się znoszą). To pole trójkąta o wierzchołkach $(0; 0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ ze znakiem (lekcja 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań, wyznacznik). Dla wielokąta wklęsłego część trójkątów ma znak ujemny i odejmuje obszary policzone dwa razy; twierdzenie Greena nie wymaga wypukłości.

Zadania • część 2

1. $\nabla \times \vec{C} = [1; 1; 1]$, strumień przez koło z $\hat{n} = \hat{z}$: $1 \cdot \pi = \pi$. Brzeg: $\vec{r} = [\cos t; \sin t; 0]$, $\vec{C} = [0; \cos t; \sin t]$, $\vec{C} \cdot \vec{r}' = \cos^2 t$, całka $\pi \checkmark$.
2. Z symetrii $\vec{B}$ jest styczne do okręgów wokół przewodu i ma stałą wartość na każdym z nich: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. FLP II-13-5 Liczbowo $4 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 40 \mu\text{T}$, porównywalnie z polem Ziemi: dlatego kompas obok pojedynczego przewodu z prądem potrafi zwariować (w zwykłym kablu dwie żyły niosą przeciwne prądy i ich pola prawie się znoszą).
3. To obrót sztywny (lekcja 3.5, przykład 3.1): $\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} [0; 0; 2] = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \hat{z}$. Gęstość prądu $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$, więc $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \checkmark$, różniczkowa postać prawa Ampère'a.
4. Stokes: przetnij sferę wzdłuż równika. Obie półsfery mają ten sam brzeg, ale z normalną na zewnątrz obiegają go w przeciwnych kierunkach; cyrkulacje się znoszą. Gauss (część 3): strumień to $\iiint \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) \, dV = 0$.
5. $|\mathcal{E}| = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi \cdot 0,01 \cdot 0,1 \approx 3,1 \text{ mV}$. Z symetrii $E \cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$, $E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = 5 \text{ mV/m}$. Postać różniczkowa (Stokes): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Pole elektryczne ma tu rotację, więc nie jest potencjalne (lekcja 3.4).

Zadania • część 3

1. $\nabla \cdot \vec{C} = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$. $\iiint 3r^2 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 3r^4 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4\pi = \frac{12\pi}{5}$.
2. $\nabla \cdot \vec{C} = 1 + 1 + 1 = 3$; objętość 2π ; strumień 6π . Bezpośrednie liczenie po trzech częściach powierzchni byłoby dużo dłuższe.

3. Z symetrii $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Sfera o promieniu r : $E \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{wewn}}/\epsilon_0$. Wewnątrz $Q_{\text{wewn}} = Q \frac{r^3}{R^3}$, więc $E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ (rośnie liniowo). Na zewnątrz $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, jak dla ładunku punktowego. To samo dla grawitacji w jednorodnej kuli (lekcja 3.5, zadanie 2.3).
4. $\nabla \cdot \vec{C}(P) \leq 0$ (granica ujemnych ilorazów strumień/objętość może być zerem, ale nie liczbą dodatnią). Druga część: nie, jeśli pole jest gładkie w całej kuli. Może się zdarzyć, jeśli pole ma osobliwość w środku, jak pole ładunku punktowego (przykład 3.1).
5. $\nabla \cdot (f\vec{c}) = \vec{c} \cdot \nabla f$ (bo $\vec{c}$ jest stały). Gauss: $\vec{c} \cdot \oint \hat{n} dA = \vec{c} \cdot \iiint \nabla f dV$. Równość iloczynów skalarnych dla każdego $\vec{c}$ (np. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) oznacza równość wektorów.

Zadania · część 4

1. Strumień objętości jest stały: $v_1 A_1 = v_2 A_2$, a pole przekroju maleje 4 razy, więc $v_2 = 2$ m/s. To twierdzenie Gaussa dla $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ zastosowane do odcinka rury: przez ścianki nic nie wypływa, więc ile wpływa jednym końcem, tyle wypływa drugim.
2. Dywergencje: 0, 0, 1, 0. Pierwsze, drugie i czwarte tak. Trzecie nie: z każdego kawałka więcej wypływa, niż wpływa, a nieściśliwa ciecz nie może się rozrzedzić. Czwarte to przepływ ku płaszczyźnie $z = 0$ i rozptyw na boki, jak strumień uderzający w ścianę.
3. $c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Po pomnożeniu przez ϵ_0 : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$.
4. $\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$, więc $\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \approx 1,5 \cdot 10^{-19}$ s. Model przewiduje praktycznie natychmiastowe zniknięcie ładunku z wnętrza; tak krótkich czasów prawo Ohma już dobrze nie opisuje (zderzenia elektronów zachodzą co ok. 10^{-14} s), ale wniosek jakościowy, że ładunek w przewodniku siedzi na powierzchni, się utrzymuje (Dział 14: Potencjał, przewodniki i kondensatory).

Matematyka · Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. II (Addison-Wesley 1964; New Millennium Edition 2011), 3-3...3-8, 13-2, 13-4, 13-5, 18-1; J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7, §16.4, §16.8–16.10; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.