

Strumień, dywergencja i rotacja

Patrząc na mapę wiatru, widzisz dwie rzeczy: gdzie powietrze się rozplywa albo zbiega i gdzie kręci się w wiry. Dywergencja i rotacja to te dwie liczby (właściwie liczba i wektor) policzone w każdym punkcie pola. Zbudujemy je z dwóch całek: strumienia przez powierzchnię i cyrkulacji po pętli, skurczonych do punktu. Na koniec dostaniemy laplasjan, operator, który pojawia się w przewodnictwie cieplnym, elektrostatyce i mechanice kwantowej.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5
h zadań

ZADANIA

20 zadań w treści,
z
podpowiedziami i
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
II, 2-2...2-8, 3-2...3-
7; J. Stewart,
Multivariable
Calculus, wyd. 7,
§16.5–16.7

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: co wypływa z kubka
- 1 Strumień przez powierzchnię
- 2 Dywergencja
- 3 Rotacja
- 4 Drugie pochodne i laplasjan
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: co wypływa z kubka

Gorąca herbata stygnie, bo ciepło przepływa przez ścianki kubka na zewnątrz. Feynman opisuje to polem wektorowym $\vec{h}$: przepływem ciepła, czyli energią cieplną przechodzącą w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do $\vec{h}$. (FLP II-2-2) Ile ciepła ucieka z kubka na sekundę? Trzeba zsumować składową $\vec{h}$ prostopadłą do ścianki po całej jej powierzchni. To jest **strumień**. A skąd to ciepło się bierze? Jeśli w środku nie ma grzałki, ze stygnącej herbaty. Liczba, która mówi, ile czegoś „wypływa z punktu” na jednostkę objętości, to **dywergencja**.

Pytanie na start. Pole $\vec{E} = k\vec{r}/r^3$ (ładunek punktowy) rozbiega się od początku układu, a pole $[y; 0; 0]$ ma wszystkie strzałki równoległe. Czy w punkcie $(1; 1; 1)$ któreś z nich ma niezerową dywergencję? A niezerową rotację? Intuicja z rysunku zawodzi w obu przypadkach. Odpowiedź w przykładach 2.1 i 3.1.

1

Strumień przez powierzchnię

Niech woda płynie z prędkością $\vec{v}$ przez małą płaską ramkę o polu ΔA i jednostkowej normalnej $\hat{n}$. W czasie Δt przez ramkę przejdzie woda z ukośnego słupa o objętości $(\vec{v} \cdot \hat{n}) \Delta A \Delta t$. Liczy się tylko składowa prostopadła: woda płynąca wzdłuż ramki przez nią nie przechodzi. Strumień pola $\vec{C}$ przez powierzchnię to suma takich kawałków: (FLP II-3-2)

STRUMIEŃ (CAŁKA POWIERZCHNIOWA)

$$\Phi = \iint_S \vec{C} \cdot \hat{n} dA = \iint_S \vec{C} \cdot d\vec{A}, \quad d\vec{A} = \hat{n} dA.$$

Trzeba wybrać, w którą stronę wskazuje $\hat{n}$. Dla powierzchni zamkniętej umowa mówi: na zewnątrz. Wtedy dodatni strumień znaczy, że więcej wypływa, niż wpływa.

1.1 Jak liczyć: parametryzacja powierzchni

Krzywą opisywaliśmy jednym parametrem (lekcja 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne), powierzchnię opisujemy dwoma: $\vec{r}(u, v)$. Przesunięcie o du daje bok $\vec{r}_u du$, przesunięcie o dv bok $\vec{r}_v dv$. Te dwa wektory rozpinają mały równoległobok, a jego wektor powierzchni to iloczyn wektorowy (lekcja 1.1 Wektory):

$$d\vec{A} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv, \quad \Phi = \iint \vec{C}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv.$$

Kolejność czynników wybiera stronę normalnej; jeśli wyjdzie do środka, zmieniamy znak. Dla sfery o promieniu R we współrzędnych sferycznych (lekcja 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne) $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = R^2 \sin \theta \hat{r}$: wektor na zewnątrz o długości $R^2 \sin \theta$, czyli dokładnie element powierzchni z lekcji 3.3 Całki podwójne i potrójne.

Przykład 1.1

Strumień przez sferę

Oblicz strumień pól $\vec{C}_1 = [x; y; z] = \vec{r}$ i $\vec{C}_2 = k \vec{r}/r^3$ przez sferę o promieniu R ze środkiem w początku układu (normalna na zewnątrz).

- 1 Na sferze $\hat{n} = \hat{r}$, a $\vec{r} = R \hat{r}$. Zatem $\vec{C}_1 \cdot \hat{n} = R$ w każdym punkcie, stałe.
- 2 Stałą mnożymy przez pole sfery: $\Phi_1 = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$.
- 3 $\vec{C}_2 \cdot \hat{n} = k R/R^3 = k/R^2$, też stałe: $\Phi_2 = \frac{k}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k$.

Wynik: $\Phi_1 = 4\pi R^3$; $\Phi_2 = 4\pi k$, niezależnie od promienia.

Sprawdzenie: całka z parametryzacji: $\vec{r} \cdot (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi) = R \cdot R^2 \sin \theta$, a $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^3 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi R^3 \checkmark$. Wynik $4\pi k$ niezależny od R to zapowiedź prawa Gaussa (Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa): cały strumień pochodzi z ładunku w środku.

Przykład 1.2

Powierzchnia zakrzywiona

Oblicz strumień pola $\vec{C} = [x; y; 0]$ (przepływ rozchodzący się poziomo od osi z) przez kopułę $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, z normalną skierowaną w górę.

- 1 Parametryzacja $\vec{r}(u, v) = [u; v; 1 - u^2 - v^2]$ nad kołem $u^2 + v^2 \leq 1$. $\vec{r}_u = [1; 0; -2u]$, $\vec{r}_v = [0; 1; -2v]$.
- 2 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = [2u; 2v; 1]$; składowa z dodatnia, więc normalna w górę $\checkmark$.
- 3 $\vec{C} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 2u^2 + 2v^2$. We współrzędnych biegunowych: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 2\rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$.

Wynik: $\Phi = \pi$.

Sprawdzenie: pole jest poziome, więc przez płaskie dno kopuły ($z = 0$, normalna w dół) strumień jest zerowy. Strumień przez całą zamkniętą powierzchnię (kopuła plus dno) to zatem też π . Dywergencja pola to 2, a objętość kopuły $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$; iloczyn $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \checkmark$ (część 2 wyjaśni, dlaczego to się musi zgadzać).

- 1 Oblicz strumień stałego pola $[1; 2; 3]$ przez kwadrat o boku 2 leżący w płaszczyźnie $x = 0$, z normalną $[1; 0; 0]$. A z normalną $[-1; 0; 0]$?
- 2 Oblicz strumień pola $[x; y; z]$ na zewnątrz przez każdą ścianę sześcianu $[0; 1]^3$ i przez całą jego powierzchnię.
- 3 Oblicz strumień pola $[x; y; z]$ na zewnątrz przez powierzchnię walca $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H$ (bok, wieczko i dno). Porównaj z objętością walca.
- 4 Deszcz pada pionowo: pole $[0; 0; -1]$. Oblicz strumień przez półsferę $z \geq 0$ o promieniu R z normalną na zewnątrz (parasol). Dlaczego jego wartość bezwzględna jest równa polu cienia parasola?
- 5 Wyprowadź pole powierzchni sfery z $|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi|$, gdzie $\vec{r} = R[\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta]$.
- 6 Ładunek punktowy siedzi w środku sześcianu. Jaki strumień pola $k\vec{r}/r^3$ przechodzi przez jedną ścianę? Odpowiedz bez całkowania, a potem sprawdź numerycznie dla sześcianu o boku 2 ($k = 1$).

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

2 Dywergencja

Weźmy mały prostopadłościan o bokach $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Przez ścianę z lewej (normalna $-\hat{x}$) strumień to $-C_x(x) \Delta y \Delta z$, przez ścianę z prawej $+C_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z$. Razem $(C_x(x + \Delta x) - C_x(x)) \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$. Tak samo z dwiema pozostałymi parami ścian. Strumień na zewnątrz małej kostki to więc $(\partial_x C_x + \partial_y C_y + \partial_z C_z) \Delta x \Delta y \Delta z$, a na jednostkę objętości:

FLP II-3-3

⚡ DYWERGENCJA

$$\nabla \cdot \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{strumień na zewnątrz } \Delta V}{\Delta V}.$$

Dywergencja to strumień wypływający na jednostkę objętości: gęstość źródeł pola. Dodatnia: z punktu „coś wypływa” (źródło); ujemna: „coś znika” (ujście); zero: ile wpływa, tyle wypływa. (por. Stewart §16.5)

Zapis $\nabla \cdot \vec{C}$ to „iloczyn skalarny” operatora $\nabla = [\partial_x; \partial_y; \partial_z]$ z polem. Feynman ostrzega: ∇ jest operatorem wektorowym, a nie zwykłym wektorem, a $\nabla \cdot \vec{C}$ to nie to samo co $\vec{C} \cdot \nabla$.

FLP II-2-4, 2-5 Rachunkowo dywergencja to suma trzech pochodnych cząstkowych (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce), każda po „swojej” zmiennej.

Przykład 2.1

Źródło rozłożone i źródło punktowe

Oblicz dywergencję pól z przykładu 1.1: $\vec{r} = [x; y; z]$ i $k\vec{r}/r^3$. Porównaj ze strumieniami przez sferę.

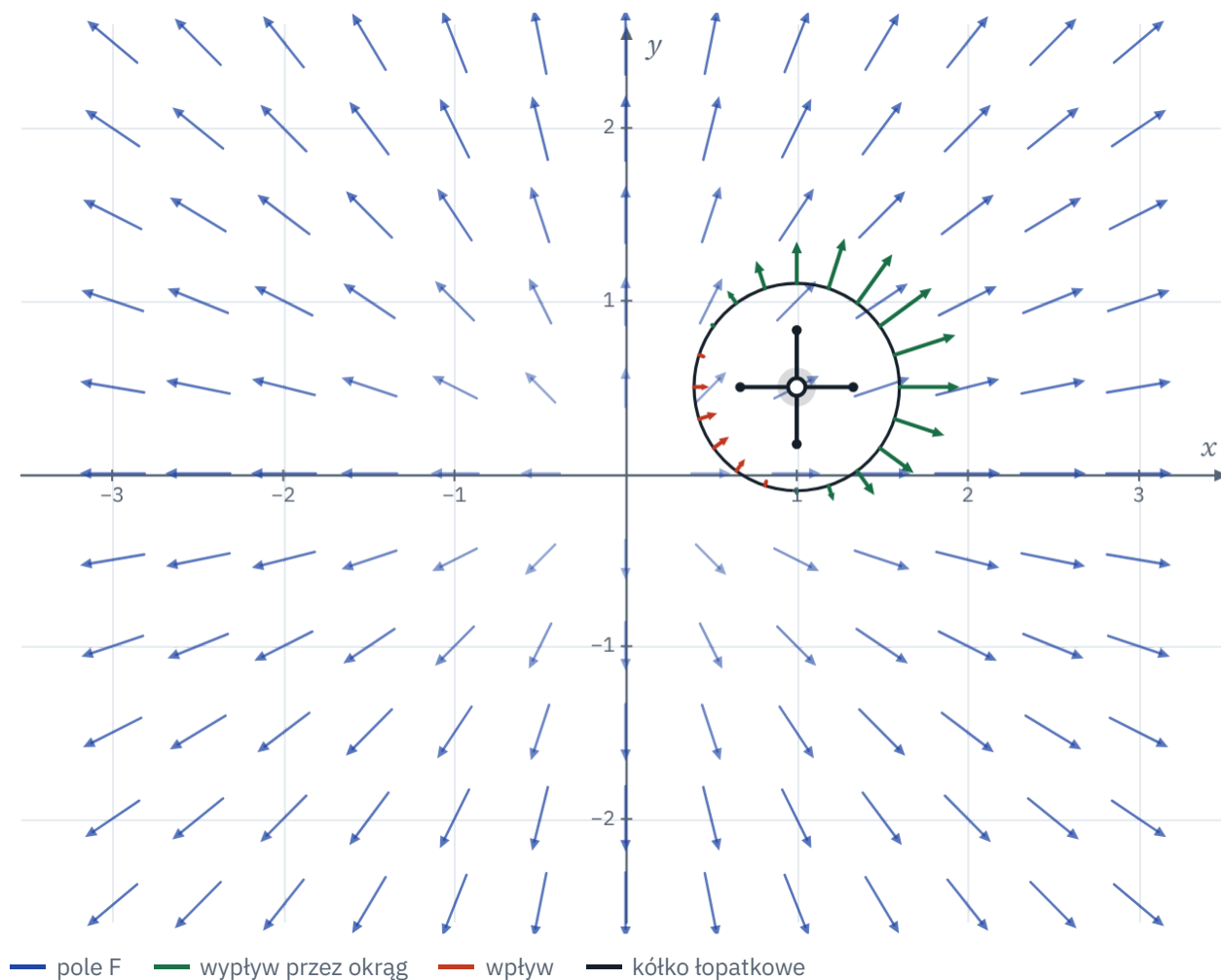
- 1 $\nabla \cdot \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$ wszędzie. Strumień przez sferę $4\pi R^3 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$: dywergencja razy objętość.
- 2 Dla $\vec{r}/r^3$: $\partial_x \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$ (bo $\partial_x r = x/r$). Suma po trzech współrzędnych: $\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$ dla $r \neq 0$.
- 3 Ale strumień przez sferę to $4\pi k \neq 0$. Całe źródło siedzi w jednym punkcie $r = 0$, gdzie pole nie jest określone.

Wynik: $\nabla \cdot \vec{r} = 3$; $\nabla \cdot (k\vec{r}/r^3) = 0$ poza początkiem układu. W punkcie (1; 1; 1) pole ładunku ma zerową dywergencję, choć strzałki się rozbiegają.

Sprawdzenie: strzałki pola $\vec{r}/r^3$ się rozchodzą, ale słabną jak $1/r^2$, a powierzchnia sfery rośnie jak r^2 : przez dwie koncentryczne sfery przechodzi ten sam strumień, więc w warstwie między nimi nic nie przybywa ✓.

SYMULACJA 1

Mała pętla w polu wektorowym. Przecignij jej środek. Strumień przez okrąg (kolory: na zewnątrz i do środka) podzielony przez pole koła daje dywergencję, a cyrkulacja podzielona przez pole daje rotację. Kółko łopatkowe w środku obraca się z prędkością kątową równą połowie rotacji. Zmniejszaj promień i patrz, jak przybliżenia zbiegają do wartości z wzorów.



strumień / pole 2,000

$\nabla \cdot F$ (wzór) 2

cyrkulacja / pole 0,000

$(\nabla \times F)_z$ (wzór) 0

Wszędzie wyptywa (dywergencja 2), nic nie wiruje. Kółko stoi.

Stan na rysunku: pole źródło $[x; y]$; środek pętli $[1,00; 0,50]$, $\rho = 0,60$; strumień/pole 2,000, cyrkulacja/pole 0,000.

W fizyce dywergencja pojawia się zawsze, gdy coś jest zachowane. Feynman wiąże przepływ ciepła z temperaturą równaniem $\vec{h} = -\kappa \nabla T$: ciepło płynie „w dół” temperatury, z przewodnością cieplną κ . (FLP II-2-6) Jeśli w danym miejscu $\nabla \cdot \vec{h} > 0$, ciepło stamtąd ucieka i ośrodek stygnie. Pole elektryczne ma dywergencję proporcjonalną do gęstości ładunku (Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa), a nieściśliwa ciecz bez źródeł ma $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (Dział 10: Płyny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne).

1 Oblicz $\nabla \cdot [x^2y; -xy^2; z]$.



2 Oblicz dywergencję pól $[-y; x; 0]$ i $[x; y; 0]$. Narysuj je i wyjaśnij wynik obrazkiem.



3 Wewnątrz jednorodnej kuli o masie M i promieniu R natężenie grawitacji to $\vec{g} = -\frac{GM}{R^3}\vec{r}$. Oblicz $\nabla \cdot \vec{g}$ i zapisz przez gęstość ρ_m .



4 W pręcie temperatura w chwili $t = 0$ to $T = T_0 - ax^2$ ($a > 0$). Oblicz przepływ ciepła $\vec{h} = -\kappa \nabla T$ i jego dywergencję. Czy środek pręta stygnie, czy się grzeje?



5 Pokaż, że $\nabla \cdot (r^n \hat{r}) = (n+2)r^{n-1}$ dla $r \neq 0$. Dla jakiego n pole radialne nie ma źródeł poza zerem? Dlaczego to właśnie prawo odwrotnych kwadratów?



▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 Rotacja

Teraz zamiast strumienia przez małą zamkniętą powierzchnię liczymy cyrkulację (lekcja 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne) po małym kwadracie o bokach $\Delta x, \Delta y$ w płaszczyźnie xy , przebieganym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dolny bok daje $C_x(y) \Delta x$, górny, przebyty w lewo, $-C_x(y + \Delta y) \Delta x$; razem $-\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$. Boki pionowe dają $+\frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$. Cyrkulacja na jednostkę powierzchni to $\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}$, czyli wielkość z testu na pole potencjalne z lekcji 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne. (FLP II-3-6) Te same rachunki dla kwadratów w płaszczyznach yz i zx dają dwie pozostałe składowe:

ROTACJA

$$\nabla \times \vec{C} = \begin{bmatrix} \partial_y C_z - \partial_z C_y \\ \partial_z C_x - \partial_x C_z \\ \partial_x C_y - \partial_y C_x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}.$$

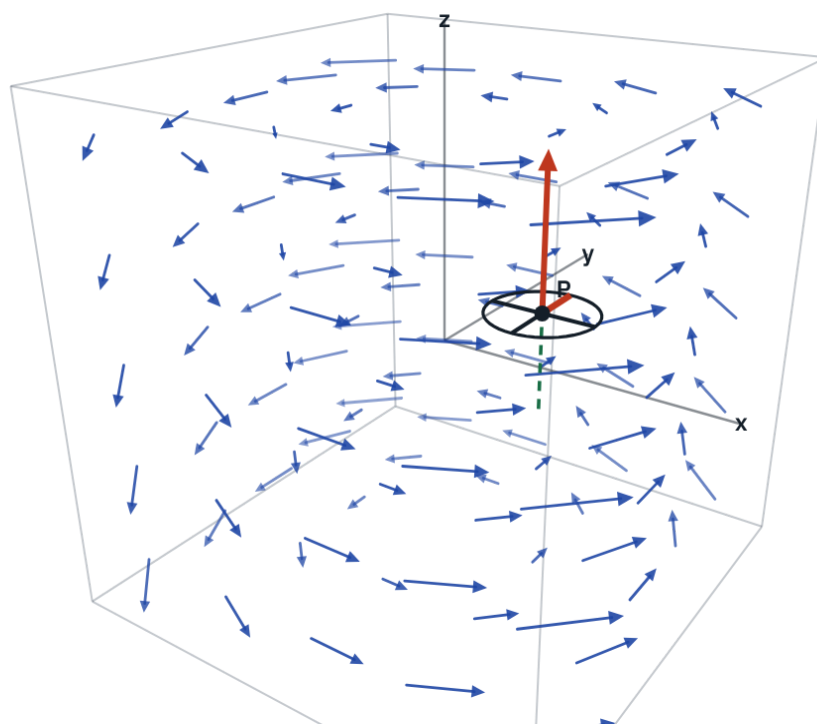
Składowa rotacji wzdłuż jednostkowego wektora $\hat{n}$ to cyrkulacja na jednostkę powierzchni po małej pętli leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do $\hat{n}$, obieganej zgodnie z regułą prawej dłoni: $(\nabla \times \vec{C}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint \vec{C} \cdot d\vec{r}$. (por. Stewart §16.8)

Wyznacznik to tylko sposób zapamiętania, tak jak przy iloczynie wektorowym; pochodne stoją zawsze przed składowymi pola. Fizyczny obraz: wstaw w przepływ wody małe kółko łopatkowe

zamocowane na osi $\hat{n}$. Kręci się z prędkością kątową $\frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n}$ (zadanie 3.2). Rotacja mierzy lokalne wirowanie, a nie to, czy linie pola są zakrzywione.

SYMULACJA 2

Pole wektorowe w przestrzeni. Przeciągnij rysunek, żeby obejrzeć je z różnych stron. W punkcie P czerwona strzałka to $\nabla \times \vec{F}$, a kółko łopatkowe na osi $\hat{n}$ obraca się z prędkością kątową $\frac{1}{2}(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$. Obracaj oś kółka: kręci się najszybciej wzdłuż rotacji, a przy osi prostopadłej stoi. Porównaj obrót wokół osi ukośnej (rotacja też ukośna), ścinanie (proste strzałki, a rotacja niezerowa) i pole przewodu (zakrzywione linie, a rotacja zero).



— pole F — rot F w punkcie P — oś kółka n — kółko łopatkowe

$F(P)$ [0,00; 1,00; 0,00]

rot $F(P)$ [0,00; 0,00; 2,00]

$|\text{rot } F|$ 2,000

n [0,00; 0,00; 1,00]

rot $F \cdot n$ 2,000

ω kółka = $\frac{1}{2} \text{rot } F \cdot n$ 1,000

Kółko kręci się najszybciej, gdy jego oś jest równoległa do rot F , i stoi, gdy jest prostopadła. Teraz kąt między n a rot F wynosi 0° , więc kółko ma 100% największej prędkości kątowej $\frac{1}{2}|\text{rot } F| = 1,000$.

Stan na rysunku: pole wir sztywny $[-y; x; 0]$, $P = (1,0; 0,0; 0,5)$, rot $F = [0,00; 0,00; 2,00]$, oś n : $\theta = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$, $\omega = 1,000$.

Przykład 3.1

Wir i ścinanie

Oblicz rotację pól $[-y; x; 0]$ (obróć sztywny) i $[y; 0; 0]$ (ścinanie: warstwy przesuwają się równoległe, szybciej im wyżej). Dla drugiego pola sprawdź wynik cyrkulacją po kwadracie $[0; 1]^2$.

- 1 $[-y; x; 0]$: składowe x i y rotacji zawierają pochodne po z albo $C_z = 0$, więc znikają. Składowa z : $\partial_x(x) - \partial_y(-y) = 2$. Wynik $[0; 0; 2]$.
- 2 $[y; 0; 0]$: składowa z : $\partial_x(0) - \partial_y(y) = -1$. Wynik $[0; 0; -1]$.
- 3 Cyrkulacja $[y; 0]$ po kwadracie przeciwnie do wskazówek zegara: dół ($y = 0$) daje 0, boki pionowe 0 (pole poziome), góra ($y = 1$, w lewo) $-1 \cdot 1$. Razem -1 , pole kwadratu 1.

Wynik: $\nabla \times [-y; x; 0] = [0; 0; 2]$; $\nabla \times [y; 0; 0] = [0; 0; -1]$, wszędzie, także w $(1; 1; 1)$.

Sprawdzenie: cyrkulacja -1 na polu 1 zgadza się z rotacją $-1 \checkmark$. Proste, równoległe strzałki, a jednak wirowanie: kółko łopatkowe w ścinaniu dostaje mocniej od góry niż od dołu i kręci się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (symulacja 1, pole „ścinanie”).

Odwrotnie: wir wokół przewodu $\frac{[-y; x]}{x^2+y^2}$ z lekcji 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne ma zakrzywione linie, a rotację zero poza osią. Kółko łopatkowe płynie po okręgu, ale się nie obraca: zewnętrzne łopatki dostają słabszy przepływ niż wewnętrzne, a to dokładnie znosi obrót, który kółko zyskałoby, idąc po zakrzywionym torze. Pole o zerowej rotacji nazywamy **bezwirowym**, pole o zerowej dywergencji **beźródłowym**. FLP II-3-7

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz $\nabla \times [yz; xz; xy]$. Co z tego wynika według lekcji 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne? Znajdź potencjał.
- 2 Bryła obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$, więc prędkość jej punktów to $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Pokaż, że $\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$. Co to mówi o kółku łopatkowym?
- 3 Woda w kanale o szerokości $2a$ płynie z prędkością $\vec{v} = [v_0(1 - y^2/a^2); 0; 0]$: najszybciej w środku, zero przy brzegach. Oblicz rotację. Gdzie kółko łopatkowe kręci się najszybciej, a gdzie wcale?

- 4 Sprawdź, że wir punktowy $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{[-y; x; 0]}{x^2+y^2}$ ma zerową rotację poza osią z , choć jego cyrkulacja po każdym okręgu wokół osi to Γ .

- 5 Pokaż, że dla funkcji f i pola $\vec{A}$ o ciągłych drugich pochodnych $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ i $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$. Zinterpretuj: co mówi pierwsza tożsamość o polach potencjalnych, a co druga o liniach pola magnetycznego?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Drugie pochodne i laplasjan

Operator ∇ można przyłożyć dwa razy. Feynman wypisuje wszystkie kombinacje. FLP II-2-7
Dwie dają zawsze zero: $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ i $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ (zadanie 3.5). Najważniejsza jest dywergencja gradientu:

🔧 LAPLASJAN

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Dla funkcji zależnej tylko od r : $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right)$. Laplasjan pola wektorowego to laplasjan każdej składowej kartezjańskiej, a $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

Co mierzy laplasjan? W jednym wymiarze f'' to krzywizna: $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \approx h^2 f''(x)$. Na płaskiej siatce o kroku h tak samo:

$$\nabla^2 f \approx \frac{f_{\text{lewy}} + f_{\text{prawy}} + f_{\text{górny}} + f_{\text{dolny}} - 4f}{h^2} = \frac{4}{h^2} (\bar{f}_{\text{sąsiedzi}} - f).$$

Laplasjan jest proporcjonalny do tego, o ile średnia z otoczenia przewyższa wartość w punkcie. W punkcie, który jest „dołkiem” względem sąsiadów, $\nabla^2 f > 0$; na „górze” $\nabla^2 f < 0$. Stąd sens równania przewodnictwa: ciepło uciekające z punktu obniża temperaturę, $c \partial T / \partial t = -\nabla \cdot \vec{h}$ (c to pojemność cieplna jednostki objętości), a z $\vec{h} = -\kappa \nabla T$ wychodzi $\partial T / \partial t = D \nabla^2 T$, gdzie $D = \kappa / c$ (dyfuzyjność cieplna, m^2/s). FLP II-3-4 Punkt chłodniejszy od średniej sąsiadów się ogrzewa, cieplejszy stygnie. Funkcja z $\nabla^2 f = 0$ (**harmoniczna**) nie ma lokalnych górek ani dołków: w każdym punkcie równa się średniej z otoczenia. Tak wygląda potencjał elektryczny w pustej przestrzeni (Dział 14: Potencjał, przewodniki i kondensatory).

Przykład 4.1

Trzy laplasjany

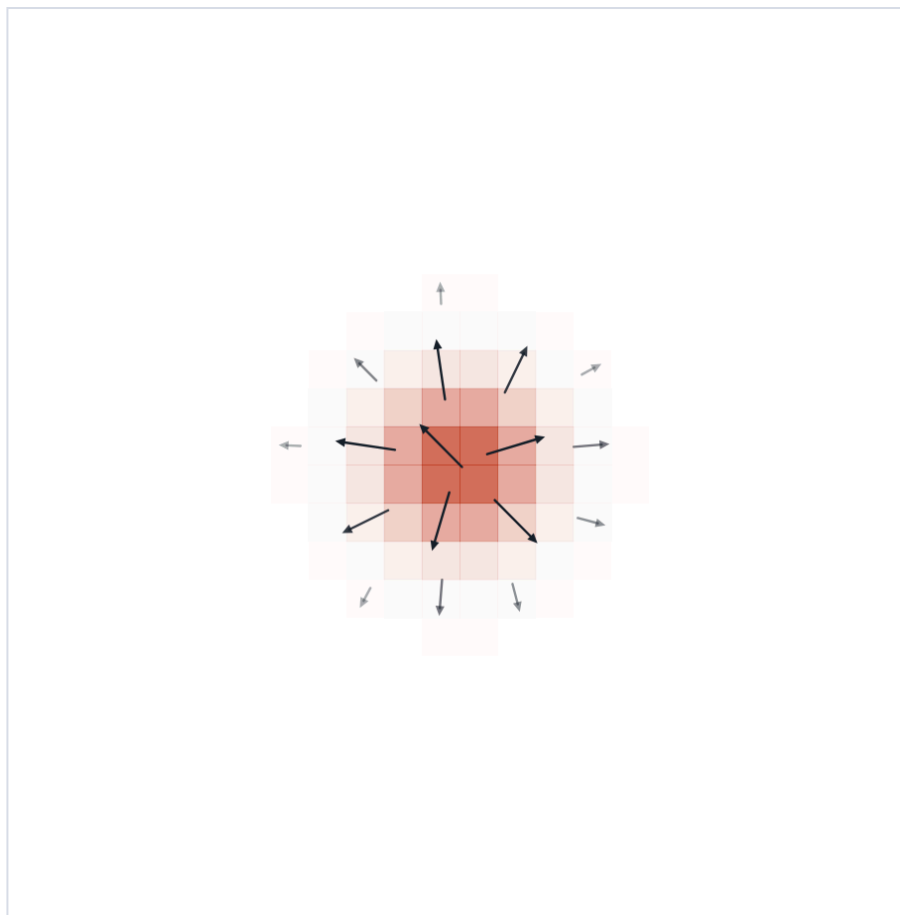
Oblicz $\nabla^2(x^2 + y^2 + z^2)$, $\nabla^2(x^2 - y^2)$ i $\nabla^2 \frac{1}{r}$ dla $r \neq 0$.

- 1 $x^2 + y^2 + z^2$: $2 + 2 + 2 = 6$. Wzorem radialnym: $f = r^2$, $r^2 f' = 2r^3$, pochodna $6r^2$, przez r^2 : $6 \checkmark$.
- 2 $x^2 - y^2$: $2 - 2 + 0 = 0$. Siodło: w kierunku x wygięte w górę, w kierunku y tak samo mocno w dół.
- 3 $\frac{1}{r}$: $r^2 f' = r^2 \cdot (-\frac{1}{r^2}) = -1$, pochodna 0. Zatem $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ poza zerem.

Wynik: 6, 0, 0.

Sprawdzenie: $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, a $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$ (przykład 2.1), więc $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \checkmark$. Potencjał ładunku punktowego jest harmoniczny wszędzie poza ładunkiem.

SYMULACJA 3 Temperatura na płytce (siatka 24×24). Kolor to temperatura, a strzałki na nakładce pokazują przepływ ciepła $-\nabla T$. Kliknij lub przeciągnij po płytce, żeby ją podgrzać (albo ochłodzić). Uruchom stygnięcie: w każdym kroku temperatura w węźle zmienia się proporcjonalnie do dyskretnego laplasjanu. Górki się obniżają, dolki zasypują, a profil wygładza.



— cieplej — chłodniej — przepływ ciepła $-\nabla T$

kroki 0

średnia T 0,019

max T 0,865

min T 0,000

W każdym kroku węzeł zbliża się do średniej sąsiadów (dyskretny laplasjan). Brzegi są izolowane, więc podczas stygnięcia średnia temperatura się nie zmienia: ciepło tylko się przemieszcza.

Stan na rysunku: 0 kroków; średnia T 0,019, max 0,865, min 0,000.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

1 Oblicz $\nabla^2(e^x \sin y)$ i $\nabla^2(x^3 + xyz)$.

■ ■ ■

- 2 Wzorem radialnym oblicz $\nabla^2 r$ i $\nabla^2 r^n$. Dla jakich n funkcja r^n jest harmoniczna poza zerem?
- 3 Oblicz dyskretny laplasjan funkcji $f = x^2 + y^2$ w punkcie (1; 2) z krokiem $h = 0,1$ (tylko x i y , wzór z pięciu punktów). Porównaj z dokładnym $\nabla^2 f$. Dlaczego zgodność jest tak dobra?
- 4 Sprawdź, że $T(x, t) = e^{-Dk^2 t} \sin kx$ spełnia równanie $\partial_t T = D \partial_x^2 T$. Dla miedzi $D \approx 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Po jakim czasie amplituda zaburzenia temperatury o długości fali 10 cm spada e razy? A dla 1 m? Co stąd wynika o wygładzaniu drobnych i dużych nierówności?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Strzałki się rozbiegają, więc dywergencja jest dodatnia.”

Liczy się też, jak zmienia się ich długość. Pole ładunku $\vec{r}/r^3$ rozbiega się, a ma dywergencję zero poza ładunkiem (przykład 2.1).

× „Linie pola są proste, więc rotacja jest zerowa.”

Ścinanie $[y; 0; 0]$ ma proste linie i rotację -1 (przykład 3.1). Odwrotnie, wir wokół przewodu ma linie kołowe i zerową rotację poza osią.

× „ ∇ to wektor, więc $\nabla \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \nabla$.”

$\nabla \cdot \vec{C}$ to liczba (funkcja), $\vec{C} \cdot \nabla = C_x \partial_x + C_y \partial_y + C_z \partial_z$ to operator, który czeka na funkcję. Kolejność ma znaczenie.

× „Strumień przez powierzchnię zamkniętą wokół ładunku zależy od jej kształtu.”

Dla pola $1/r^2$ nie: przez sferę, sześcián i każdą inną powierzchnię otaczającą ładunek przechodzi $4\pi k$ (przykład 1.1, zadanie 1.6).

× „Laplasjan to po prostu druga pochodna, więc mówi o krzywiznie w jednym kierunku.”

To suma krzywizn wzdłuż trzech osi. Siodło $x^2 - y^2$ jest mocno wygięte w obu kierunkach, a ma laplasjan zero.

Sprawdź się

- 1 Jak obliczyć strumień przez powierzchnię $\vec{r}(u, v)$?

$\iint \vec{C}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$, ze znakiem zależnym od wybranej strony normalnej.

- 2 Co mierzy dywergencja?

Strumień wypływający z małej objętości, podzielony przez tę objętość: gęstość źródeł.

- 3 Ile wynosi $\nabla \cdot [x; y; z]$, a ile $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3)$?

3 i 0 (dla $r \neq 0$).

- 4 Co mierzy składowa rotacji wzdłuż $\hat{n}$?

Cyrkulację na jednostkę powierzchni po małej pętli leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do $\hat{n}$; dla przepływu: podwojoną prędkość kątową kółka łopatkowego.

- 5 Jakie dwie kombinacje drugich pochodnych są zawsze zerowe?

$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ i $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

- 6 Co oznacza $\nabla^2 f > 0$ w punkcie?

Wartość w punkcie jest mniejsza od średniej z otoczenia (lokalny „dołek”).

- 7 Ile wynosi $\nabla^2 \frac{1}{r}$ poza zerem?

0: potencjał ładunku punktowego jest harmoniczny.

STRUMIEŃ I DYWERGENCJA

$$\Phi = \iint_S \vec{C} \cdot \hat{n} dA; d\vec{A} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv$$

$$\text{sfera: } d\vec{A} = R^2 \sin \theta \hat{r} d\theta d\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{C} = \partial_x C_x + \partial_y C_y + \partial_z C_z = \text{strumień / objętość}$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3; \nabla \cdot (r^n \hat{r}) = (n+2)r^{n-1}$$

$$\text{przepływ ciepła: } \vec{h} = -\kappa \nabla T$$

ROTACJA I LAPLASJAN

$$\nabla \times \vec{C} = [\partial_y C_z - \partial_z C_y; \partial_z C_x - \partial_x C_z; \partial_x C_y - \partial_y C_x]$$

$$(\nabla \times \vec{C}) \cdot \hat{n} = \text{cyrkulacja / pole}; \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}$$

$$\nabla \times \nabla f = \vec{0}; \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f; \text{radialnie } \frac{1}{r^2}(r^2 f)'$$

$$\nabla^2 r^2 = 6; \nabla^2 \frac{1}{r} = 0; \nabla^2 f \approx \frac{4}{h^2}(\bar{f} - f) \text{ (2D)}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. II, 2-3...2-8 (gradient, operator ∇ , przepływ ciepła, drugie pochodne, pułapki) i 3-2...3-7 (strumień, strumień z sześcianu, przewodnictwo cieplne, cyrkulacja po kwadracie, pola bezwirowe i bezźródłowe).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7: §16.5 (rotacja i dywergencja), §16.6 (powierzchnie parametryczne i ich pola), §16.7 (całki powierzchniowe).
- K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*: operator ∇ , dywergencja i rotacja.

Sumując dywergencję po całej objętości, dostaniemy strumień przez jej brzeg, a sumując rotację po powierzchni, cyrkulację po jej brzegu. To twierdzenia Gaussa i Stokesa z lekcji 3.6 Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa, z których wyjdą równanie ciągłości i równania Maxwella. Laplasjan wróci w równaniach dyfuzji, falowym i Laplace'a (4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\vec{C} \cdot \hat{n} = 1$, pole 4; strumień 4. Z przeciwną normalną -4 .
2. Ściana $x = 1$: $\vec{C} \cdot \hat{n} = x = 1$, strumień 1. Ściana $x = 0$: $\vec{C} \cdot \hat{n} = -x = 0$. Tak samo dla y i z . Razem 3.
3. Bok: $R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H$. Wieczko ($\hat{n} = \hat{z}$, $z = H$): $H \cdot \pi R^2$. Dno ($z = 0$): 0. Razem $3\pi R^2 H = 3V$. Tak jak w przykładzie 1.1 dla kuli ($4\pi R^3 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$) i w zadaniu 1.2 dla sześciianu.
4. $\hat{z} \cdot \hat{r} R^2 \sin \theta = R^2 \cos \theta \sin \theta$; całka po $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ i φ daje πR^2 , więc strumień to $-\pi R^2$ (minus, bo deszcz przechodzi przez powierzchnię do środka, przeciw normalnej). Każda kropla przechodząca przez parasol przechodzi też przez jego cień na ziemi, a liczy się tylko składowa prostopadła.
5. $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = R^2 \sin \theta [\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta]$, długość $R^2 \sin \theta$. $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2$.
6. Przez cały sześciian przechodzi $4\pi k$, tyle co przez sferę (każdy promień z ładunku przebija obie powierzchnie raz). Ściany są równoważne z symetrii: $\frac{4\pi k}{6} = \frac{2\pi k}{3} \approx 2,094$. Numerycznie ściana $z = 1$: $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} \approx 2,0944 \checkmark$.

Zadania • część 2

1. $2xy - 2xy + 1 = 1$.
2. 0 i 2. Wir krąży, nic nie wypływa z żadnego punktu. Pole $[x; y; 0]$ rozchodzi się od osi z i rośnie z odległością: z każdego kawałka wypływa więcej, niż wpływa.
3. $\nabla \cdot \vec{g} = -\frac{3GM}{R^3} = -4\pi G \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -4\pi G \rho_m$. Masa jest „ujściem” pola grawitacji; na zewnątrz kuli dywergencja jest zerowa (przykład 2.1).
4. $\vec{h} = [2\kappa a x; 0; 0]$; ciepło płynie od środka na boki. $\nabla \cdot \vec{h} = 2\kappa a > 0$ wszędzie: z każdego kawałka ciepło ucieka, więc pręt stygnie (najszybciej tam, gdzie krzywizna profilu jest największa; tu wszędzie tak samo).
5. $\partial_x(r^{n-1}x) = r^{n-1} + (n-1)r^{n-3}x^2$. Suma: $3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} = (n+2)r^{n-1}$. Zero dla $n = -2$. Tylko przy spadku $1/r^2$ strumień przez każdą sferę jest ten sam, bo pole sfery rośnie jak r^2 .

Zadania • część 3

1. $[x - x; y - y; z - z] = \vec{0}$. Pole jest potencjalne (przestrzeń jednospójna): $\varphi = xyz$.
2. $\vec{v} = [\omega_y z - \omega_z y; \omega_z x - \omega_x z; \omega_x y - \omega_y x]$. Składowa z rotacji: $\partial_x(\omega_z x - \omega_x z) - \partial_y(\omega_y z - \omega_z y) = 2\omega_z$; reszta analogicznie. Kółko zanurzone w obracającej się sztywno cieczy obraca się razem z nią, z $\omega = \frac{1}{2}|\nabla \times \vec{v}|$: stąd czynnik $\frac{1}{2}$.
3. $\nabla \times \vec{v} = [0; 0; 2v_0 y/a^2]$. Najszybciej przy brzegach ($|y| = a$, $|\nabla \times \vec{v}| = 2v_0/a$), w przeciwne strony przy lewym i prawym brzegu. W środku kanału, gdzie woda płynie najszybciej, kółko się nie obraca.
4. Składowa z : $\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$ (lekcja 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne, zadanie 3.4). Cała „rotacja” siedzi na osi, jak całe źródło pola ładunku w jednym punkcie (przykład 2.1).

5. Składowa z rotacji gradientu: $\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f = 0$ (twierdzenie Schwarz'a). $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = 0$: wyrazy znoszą się parami. Pola potencjalne są bezwirowe. Pole będące rotacją jest bezźródłowe; pole magnetyczne ma postać $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, więc jego linie nigdzie się nie zaczynają ani nie kończą. FLP II-2-7

Zadania · część 4

- $e^x \sin y - e^x \sin y = 0$ (funkcja harmoniczna). $6x + 0 + 0 = 6x$.
- $\nabla^2 r = \frac{1}{r^2}(r^2)' = \frac{2}{r}$. $\nabla^2 r^n = \frac{1}{r^2}(n r^{n+1})' = n(n+1)r^{n-2}$. Zero dla $n = 0$ (stała) i $n = -1$ (potencjał ładunku).
- $\frac{1}{0,01}(f(1,1; 2) + f(0,9; 2) + f(1; 2,1) + f(1; 1,9) - 4f(1; 2)) = \frac{0,04}{0,01} = 4$. Dokładnie $2 + 2 = 4$. Dla wielomianu drugiego stopnia wzór jest dokładny: błąd pochodzi z czwartych pochodnych (wzór Taylora, lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce), a tu są zerowe.
- $\partial_t T = -Dk^2 T$, $\partial_x^2 T = -k^2 T \checkmark$. Czas zaniku $\tau = \frac{1}{Dk^2}$ z $k = 2\pi/\lambda$: dla 10 cm $\tau \approx 2,3$ s, dla 1 m $\tau \approx 230$ s. Czas rośnie jak λ^2 : drobne nierówności znikają szybko, duże bardzo powoli. Równanie dyfuzji wróci w lekcji 4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a.

Matematyka · Strumień, dywergencja i rotacja. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. II (Addison-Wesley 1964; New Millennium Edition 2011), 2-2...2-8, 3-2...3-7; J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7, §16.5–16.7; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.