

Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne

Wnosisz plecak na szczyt jednym szlakiem albo drugim. Praca przeciw grawitacji jest ta sama, a praca przeciw tarcia nie. Czy patrząc na sam wzór siły, da się rozpoznać, która to sytuacja, bez sprawdzania wszystkich dróg? Da się, i ta lekcja pokazuje jak. Przy okazji dostaniemy energię potencjalną jako „funkcję pierwotną” siły, prosty test na pole potencjalne z ważną pułapką (wir wokół przewodu) i odpowiedź na pytanie, dlaczego w termodynamice energia wewnętrzna jest funkcją stanu, a ciepło nie.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

17 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 14-1, 14-3...14-5;
J. Stewart,
Multivariable Calculus, wyd. 7, §16.1–16.3

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dwa szlaki na szczyt
- 1 Pola wektorowe
- 2 Całka krzywoliniowa i praca
- 3 Pola potencjalne
- 4 Różniczki zupełne i funkcje stanu
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwa szlaki na szczyt

Ze schroniska na szczyt prowadzą dwa szlaki: krótki i stromy oraz długi zakosami. Wnosisz plecak o masie m na wysokość h wyżej. Ile pracy wykonujesz przeciw grawitacji? Oba szlaki dają mgh . Teraz pchasz skrzynię po podłodze z tarciem z jednego rogu pokoju do drugiego. Droga prosta i droga wzdłuż ścian dają różną pracę, bo tarcie działa przez całą drogę.

Feynman nazywa siłę **zachowawczą**, jeśli praca między dwoma punktami jest taka sama po każdej drodze. Dla takiej siły można zdefiniować energię potencjalną, a energia mechaniczna jest zachowana. FLP I-14-3 Ale „po każdej drodze” to nieskończenie wiele sprawdzeń.

Pytanie na start. Siła w płaszczyźnie ma składowe $F = [y; x]$ albo $F = [-y; x]$. Która z nich jest zachowawcza? Czy da się to rozstrzygnąć bez liczenia pracy po wielu drogach? Odpowiedź w części 3, a liczby w przykładzie 2.1.

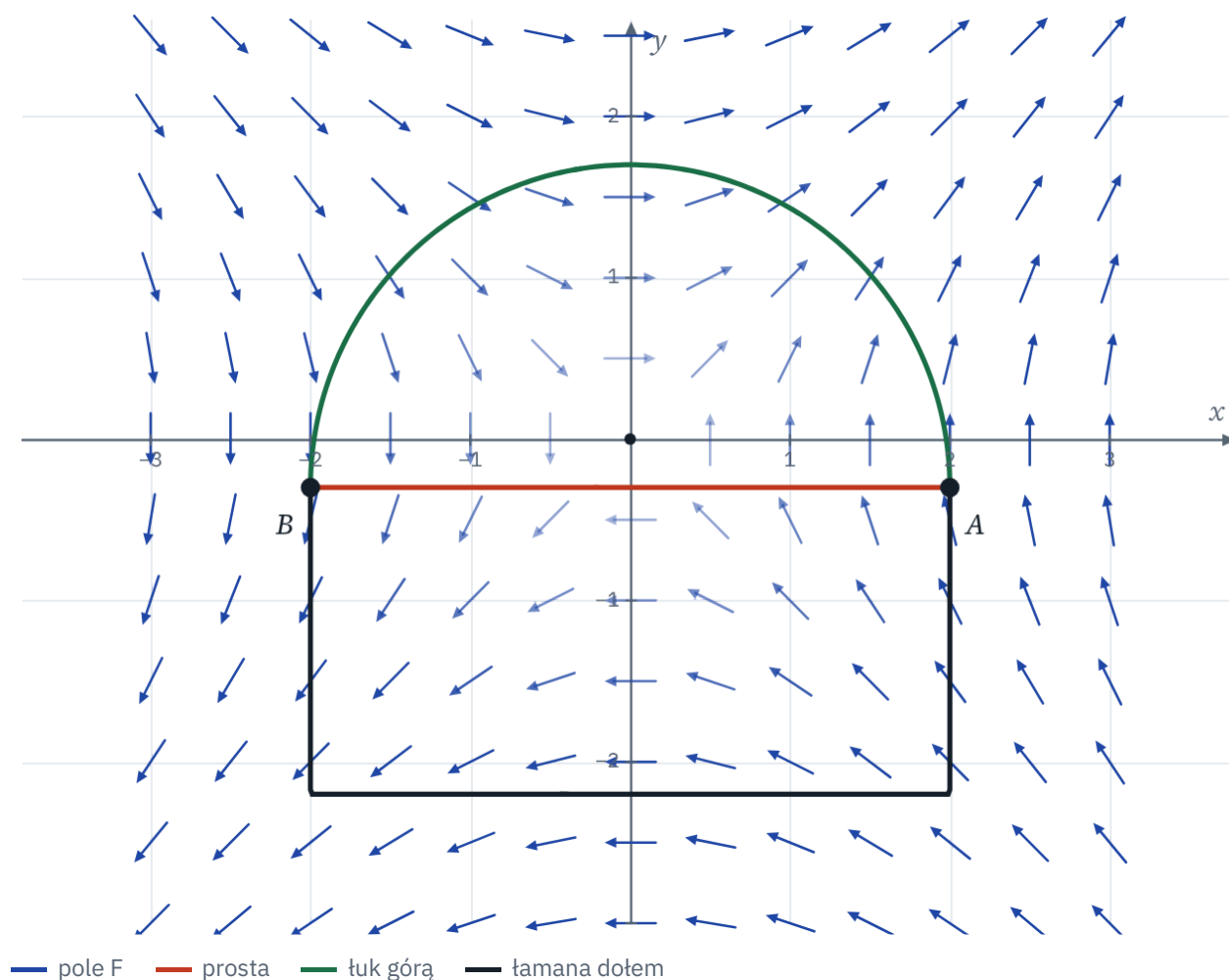
Pola wektorowe

Pole wektorowe przypisuje każdemu punktowi przestrzeni wektor: $\vec{F}(x, y, z) = [P; Q; R]$, gdzie P, Q, R to funkcje położenia. Przykłady z fizyki: siła grawitacji $-GMm\vec{r}/r^3$, pole elektryczne, prędkość wiatru albo wody w rzece, siła sprężyny $-k\vec{r}$. Gradient z lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce to też pole wektorowe, zbudowane z funkcji skalarnej.

Pole rysujemy jako strzałki w wybranych punktach albo jako **linie pola**, styczne w każdym punkcie do wektora pola. Dwa przykłady warto mieć przed oczami. Pole $[x; y]$ to strzałki skierowane od środka, coraz dłuższe. Pole $[-y; x]$ to wir: strzałki okrążają środek przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, jak prędkość obracającej się płyty (lekcja 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne, zadanie 2.4).

SYMULACJA 1

Pole wektorowe i praca po trzech drogach z A do B . Wybierz pole, a obok zobaczysz pracę $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ po każdej z trzech dróg. Dla pola $[y; x]$ wszystkie są równe. Dla wiru $[-y; x]$ różne. Dla wiru $\frac{[-y; x]}{x^2+y^2}$ dwie drogi dają to samo, a trzecia, która okrąży początek układu z drugiej strony, coś innego.



W po prostej 1,2000

W po łuku górą 1,2000

W po łamanej dołem 1,2000

$\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ 0

Pole gradientowe: praca na każdej drodze to $\varphi(B) - \varphi(A) = xy(B) - xy(A)$. Wszystkie trzy wyniki są równe.

Stan na rysunku: pole $[y; x] = \nabla(xy)$; W: prosta 1,2000, łuk górą 1,2000, łamana dołem 1,2000.

2 Całka krzywoliniowa i praca

Feynman definiuje pracę jako sumę $\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$ po małych odcinkach drogi, w granicy coraz krótszych: tylko składowa siły wzdłuż przesunięcia wykonuje pracę. FLP I-14-1 To jest **całka**

krzywoliniowa (skierowana) pola $\vec{F}$ po krzywej C . Liczymy ją, opisując krzywą parametrycznie, $\vec{r}(t)$ dla $a \leq t \leq b$, tak jak tor w lekcji 1.3 Pochodne. Wtedy $d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt$ i

CAŁKA KRZYWOLINIOWA (PRACA)

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

Wynik nie zależy od wyboru parametryzacji (szybkości przebiegania krzywej), ale zmienia znak przy zmianie kierunku przebiegu. (por. Stewart §16.2)

Przykład 2.1

Trzy drogi, dwa pola

Oblicz pracę pól $\vec{F}_1 = [y; x]$ i $\vec{F}_2 = [-y; x]$ od $(0; 0)$ do $(1; 1)$ po trzech drogach: prostej $y = x$, paraboli $y = x^2$ i łamanej przez $(1; 0)$.

- 1 Prosta: $\vec{r} = [t; t]$, $\vec{r}' = [1; 1]$. $\vec{F}_1 \cdot \vec{r}' = t + t$, $\int_0^1 2t dt = 1$. $\vec{F}_2 \cdot \vec{r}' = -t + t = 0$.
- 2 Parabola: $\vec{r} = [t; t^2]$, $\vec{r}' = [1; 2t]$. $\vec{F}_1: \int_0^1 (t^2 + 2t^2) dt = 1$. $\vec{F}_2: \int_0^1 (-t^2 + 2t^2) dt = \frac{1}{3}$.
- 3 Łamana: najpierw $[t; 0]$ ($dy = 0$), potem $[1; t]$ ($dx = 0$). $\vec{F}_1: \int_0^1 0 dt + \int_0^1 1 dt = 1$. $\vec{F}_2: 0 + \int_0^1 1 dt = 1$.

Wynik: $\vec{F}_1$ daje zawsze 1; $\vec{F}_2$ daje 0, $\frac{1}{3}$, 1, zależnie od drogi.

Sprawdzenie: $\vec{F}_1 = \nabla(xy)$, a xy zmienia się od 0 do 1: praca to różnica wartości, niezależnie od drogi (część 3) ✓. Dla $\vec{F}_2$ na prostej $y = x$ pole jest prostopadłe do drogi ($[-t; t] \cdot [1; 1] = 0$), więc praca zero ✓.

Bywa też potrzebna całka po długości łuku z funkcji skalarnej, $\int_C f ds$ z $ds = |\vec{r}'(t)| dt$: na przykład masa drutu o gęstości liniowej f . Ta całka nie zależy od kierunku przebiegu (zadanie 2.5).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz pracę pola $[-y; x]$ po okręgu jednostkowym przebieganym raz przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a potem zgodnie z nim.

- 2 Oblicz $\int_C x \, dy - y \, dx$ po odcinku od $(1; 0)$ do $(0; 1)$.
■ ■ ■
- 3 Pokaż, że zmiana parametryzacji $t = 2s$ (dwa razy szybszy przebieg) nie zmienia całki z przykładu 2.1 po paraboli dla $\vec{F}_2$.
■ ■ ■
- 4 Wynosisz satelitę o masie 1 t z powierzchni Ziemi ($R = 6371$ km) na wysokość 400 km. Jaką pracę wykonujesz przeciw grawitacji $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ (z $GM = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$)? Porównaj z mgh .
■ ■ ■
- 5 Drut ma kształt półokręgu $x^2 + y^2 = 1$ (w metrach), $y \geq 0$, i gęstość liniową $\lambda = 1 + y$ (kg/m). Oblicz jego masę.
■ ■ ■
- 6 Pchasz skrzynię z siłą pokonującą tarcie 10 N (stały opór skierowany przeciw ruchowi). Ile pracy wykonasz na drodze prostej 5 m, a ile po półokręgu o tej samej cięciwie? Dlaczego siła tarcia nie jest polem wektorowym w sensie tej lekcji?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Pola potencjalne

Jeśli pole jest gradientem, $\vec{F} = \nabla\varphi$, to wzdłuż drogi $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = d\varphi$ (lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych), a całka z różniczki to przyrost funkcji:

✎ PODSTAWOWE TWIERDZENIE DLA CAŁEK KRZYWOLINIOWYCH

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Praca pola gradientowego zależy tylko od końców drogi. Pole $\vec{F} = \nabla\varphi$ nazywamy **potencjalnym** (fizycy mówią: **zachowawczym**), a φ jego **potencjałem**. W fizyce piszemy $\vec{F} = -\nabla U$ z energią potencjalną $U = -\varphi$. por. Stewart §16.3

To odpowiednik wzoru Newtona–Leibniza z lekcji 1.5 Całki: potencjał jest „funkcją pierwotną” pola. Feynman dochodzi do tego samego od strony fizyki: praca siły zachowawczej od 1 do 2 to $U(1) - U(2)$, a $\vec{F} = -\nabla U$, bo dla małego przesunięcia $F_x \Delta x = -\Delta U$. FLP I-14-3, 14-5

Dla pola ciągłego na zbiorze otwartym i **spójnym** (z każdego punktu da się dojść do każdego) trzy warunki są równoważne:

1. $\vec{F} = \nabla\varphi$ dla pewnej funkcji φ ;
2. praca $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ zależy tylko od końców drogi;
3. praca po każdej drodze zamkniętej (cyrkulacja $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$) jest zerowa.

Równoważność 2 i 3: drogę zamkniętą rozcinamy na dwie drogi z A do B , jedną przebytą w przeciwną stronę. Z 2 wynika 1: definiujemy $\varphi(P)$ jako pracę od ustalonego punktu do P , jak Feynman definiuje U .

3.1 Test, który nie wymaga sprawdzania dróg

Jeśli $\vec{F} = [P; Q] = \nabla\varphi$, to $P = \varphi_x$, $Q = \varphi_y$, a z twierdzenia Schwarz'a o pochodnych mieszanych (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce) $\partial P/\partial y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \partial Q/\partial x$. To warunek konieczny. Na obszarze bez „dziur” wystarcza:

⚡ KRYTERIUM POLA POTENCJALNEGO

Na płaszczyźnie: jeśli P, Q mają ciągle pochodne na obszarze **jednospójnym** (bez dziur: każdą krzywą zamkniętą da się ściągnąć do punktu, nie wychodząc z obszaru), to

$$\vec{F} = [P; Q] \text{ jest potencjalne} \iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

W przestrzeni warunek to trzy równości $\partial_y P = \partial_z Q$, $\partial_z P = \partial_x Q$, $\partial_x P = \partial_y Q$, czyli $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ (rotacja, lekcja 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja), znów na obszarze jednospójnym. Uwaga: w przestrzeni przeszkadza wycięta prosta (np. przewód), a nie wycięty punkt. $\mathbb{R}^3$ bez początku układu jest jednospójne, dlatego test działa dla pola Coulomba.

Wróćmy do prologu. Dla $[y; x]: \partial_x Q = 1 = \partial_y P$, pole potencjalne z $\varphi = xy$. Dla $[-y; x]: \partial_x Q = 1$, $\partial_y P = -1$, różnica 2: pole nie jest potencjalne, a praca zależy od drogi.

Przykład 3.1

Szukanie potencjału

Sprawdź, że $\vec{F} = [2xy + z; x^2; x]$ jest potencjalne, znajdź potencjał i pracę od $(0; 0; 0)$ do $(1; 2; 3)$.

- 1 Test: $\partial_y R = 0 = \partial_z Q$; $\partial_z P = 1 = \partial_x R$; $\partial_x Q = 2x = \partial_y P \checkmark$. Przestrzeń nie ma dziur, więc pole jest potencjalne.
- 2 $\varphi_x = 2xy + z$, więc $\varphi = x^2 y + xz + g(y, z)$. Z $\varphi_y = x^2 + g_y = x^2$ mamy $g_y = 0$. Z $\varphi_z = x + g_z = x$: $g_z = 0$, więc g jest stałą.
- 3 $\varphi = x^2 y + xz$; praca $\varphi(1; 2; 3) - \varphi(0; 0; 0) = 2 + 3 = 5$.

Wynik: $\varphi = x^2 y + xz$ (z dokładnością do stałej), praca 5.

Sprawdzenie: $\nabla(x^2 y + xz) = [2xy + z; x^2; x] \checkmark$. Po odcinku $\vec{r} = [t; 2t; 3t]$: $\vec{F} \cdot \vec{r}' = (4t^2 + 3t) + 2t^2 + 3t = 6t^2 + 6t$, $\int_0^1 = 2 + 3 = 5 \checkmark$.

3.2 Pułapka: wir wokół przewodu

Pole $\vec{F} = \frac{[-y; x]}{x^2 + y^2}$ (tak, z dokładnością do stałej, wygląda pole magnetyczne prostego przewodu z prądem, Dział 15: Prąd i pole magnetyczne) spełnia $\partial_x Q = \partial_y P$ wszędzie poza początkiem układu (sprawdź w zadaniu 3.4). A jednak jego cyrkulacja po okręgu wokół początku wynosi 2π , a nie zero. Nie ma sprzeczności: pole nie jest określone w $(0; 0)$, więc obszar ma dziurę i kryterium nie obowiązuje. Lokalnie to jest gradient kąta, $\vec{F} = \nabla\theta$, ale kąt po obejściu początku rośnie o 2π i nie jest jednoznaczna funkcją. Cyrkulacja po krzywej, która *nie* okrąży początku, jest zerowa. W fizyce dokładnie to mówi prawo Ampère'a: cyrkulacja pola magnetycznego zależy tylko od prądu objętego drogą.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Które pola są potencjalne: $[3x^2 y; x^3 + 2y]$, $[y \cos x; \sin x + 1]$, $[xy; xy]$, $[y^2; 2xy + e^y]$?
Znajdź potencjały.
- 2 Oblicz pracę pola $[3x^2 y; x^3 + 2y]$ od $(0; 0)$ do $(2; 1)$ po dowolnej drodze.
- 3 Pokaż, że siła kulombowska (lub grawitacyjna) $\vec{F} = k \vec{r}/r^3$ jest potencjalna, i znajdź jej potencjał.

- 4  Sprawdź, że dla $\vec{F} = \frac{[-y; x]}{x^2+y^2}$ zachodzi $\partial_x Q = \partial_y P$ poza zerem, i oblicz cyrkulację po okręgu o promieniu 3 wokół zera.
- 5  Energia potencjalna to $U = x^2 + xy + y^2$. Oblicz siłę i pracę tej siły od (1; 0) do (0; 1).
- 6  Pokaż, że pole stałe $\vec{F} = [F_x; F_y; F_z]$ jest potencjalne i wywnioskuj stąd, że praca grawitacji w pobliżu Ziemi to $-mg\Delta z$ po każdej drodze. Dlaczego zakosy na szlaku nic nie zmieniają w pracy, a jednak pomagają turyście?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

4 Różniczki zupełne i funkcje stanu

Wyrażenie $P dx + Q dy$ nazywamy **różniczką zupełną**, jeśli jest różniczką pewnej funkcji: $P dx + Q dy = d\varphi$. To dokładnie warunek, że pole $[P; Q]$ jest potencjalne, więc test jest ten sam: $\partial_y P = \partial_x Q$ (na obszarze bez dziur). Całka z różniczki zupełnej po drodze to przyrost φ , niezależny od drogi. Gdy test nie zachodzi, piszemy często δ zamiast d , żeby pamiętać, że wynik zależy od drogi.

4.1 Termodynamika: co jest funkcją stanu

Stan gazu doskonałego opisują np. temperatura T i objętość V . Pierwsza zasada termodynamiki (Dział 9: Termodynamika i entropia) mówi, że ciepło dostarczone przy małej, quasi-statycznej (odwracalnej) zmianie to $\delta Q = C_V dT + p dV$, gdzie $p = nRT/V$ i C_V to pojemność cieplna przy stałej objętości (dla gazu doskonałego zależy co najwyżej od T ; dla jednoatomowego stała, $\frac{3}{2}nR$). Zastosujmy test do $\delta Q = C_V dT + \frac{nRT}{V} dV$:

$$\frac{\partial C_V}{\partial V} = 0 \neq \frac{\partial}{\partial T} \frac{nRT}{V} = \frac{nR}{V}.$$

Ciepło nie jest różniczką zupełną: nie istnieje „ilość ciepła zawarta w gazie”, a ciepło pobrane między dwoma stanami zależy od drogi. Ale po podzieleniu przez T :

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV, \quad \frac{\partial}{\partial V} \frac{C_V}{T} = 0 = \frac{\partial}{\partial T} \frac{nR}{V}.$$

To już różniczka zupełna funkcji $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{const}$: **entropii**. Czynniki $1/T$, który zamienia δQ w różniczkę zupełną, to **czynniki całkujące**. Dla dwóch zmiennych jakiś czynnik całkujący zawsze istnieje; treścią drugiej zasady jest to, że dla każdego układu działa ten sam, uniwersalny czynnik $1/T$.

Przykład 4.1

Dwie drogi między tymi samymi stanami

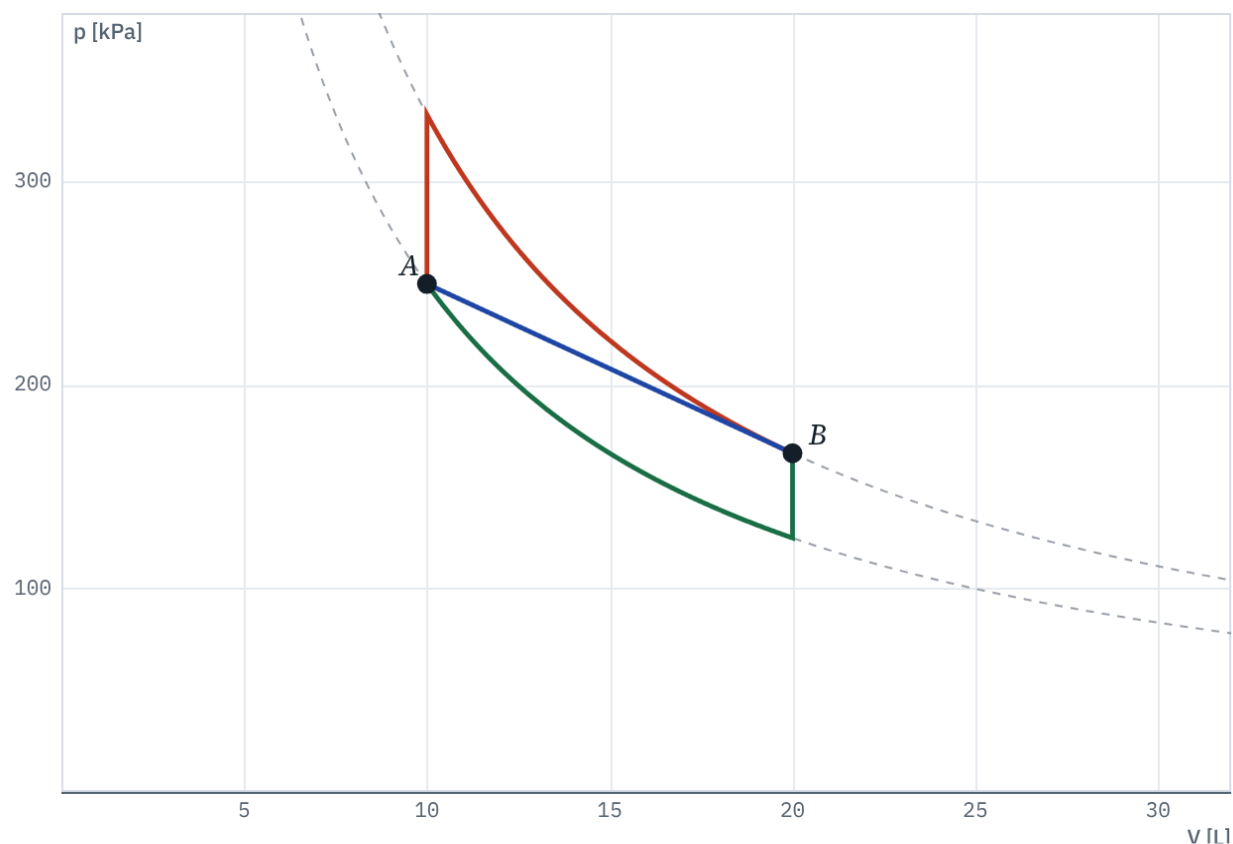
Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego ($C_V = \frac{3}{2}R$, $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol K})$) przechodzi ze stanu A (300 K, 10 L) do stanu B (400 K, 20 L). Droga 1: najpierw ogrzanie przy stałej objętości do 400 K, potem rozprężanie izotermiczne. Droga 2: najpierw rozprężanie izotermiczne w 300 K, potem ogrzanie przy stałej objętości. Oblicz Q , W , ΔU i ΔS .

- 1 $\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \cdot 100 \approx 1247 \text{ J}$ na obu drogach (energia wewnętrzna to funkcja stanu).
- 2 Praca gazu przy rozprężaniu izotermicznym $W = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$: droga 1 w 400 K: $W_1 \approx 2305 \text{ J}$; droga 2 w 300 K: $W_2 \approx 1729 \text{ J}$. Przy stałej objętości praca jest zerowa.
- 3 $Q = \Delta U + W$: $Q_1 \approx 3552 \text{ J}$, $Q_2 \approx 2976 \text{ J}$.
- 4 $\Delta S = C_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 12,47 \cdot 0,2877 + 8,314 \cdot 0,6931 \approx 9,35 \text{ J/K}$ na obu drogach.

Wynik: Q i W zależą od drogi (różnica 576 J), a ΔU i ΔS nie.

Sprawdzenie: $Q_1 - Q_2 = W_1 - W_2 = R \cdot 100 \cdot \ln 2 \approx 576 \text{ J} \checkmark$. Dla trzeciej drogi, prostej na wykresie $p(V)$, numeryczna całka $\int \delta Q/T$ też daje 9,35 J/K (symulacja 2).

SYMULACJA 2 Trzy drogi między stanami A i B na wykresie $p(V)$. Pole pod krzywą to praca, różna dla każdej drogi. Odczyt pokazuje, że Q i W zależą od drogi, a ΔU i $\Delta S = \int \delta Q/T$ nie. Zmieniaj temperaturę i objętość stanu B .



— droga 1: izochora, potem izoterma — droga 2: izoterma, potem izochora — droga 3: prosta
- - izotermy

droga 1: W, Q 2305 J; 3552 J

droga 2: W, Q 1729 J; 2976 J

droga 3: W, Q 2079 J; 3326 J

ΔU (każda droga) 1247 J

$\Delta S = \int \delta Q/T$ (drogi 1, 2, 3) 9,351; 9,351; 9,351 J/K

Stan na rysunku: $B = (400 \text{ K}; 20,0 \text{ L})$; $W = 2305 \text{ J}, 1729 \text{ J}, 2079 \text{ J}$; $Q = 3552 \text{ J}, 2976 \text{ J}, 3326 \text{ J}$; $\Delta U = 1247 \text{ J}$, $\Delta S = 9,351 \text{ J/K}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 35 min

1 Czy $2xy \, dx + x^2 \, dy$ jest różniczką zupełną? A $y \, dx - x \, dy$?

2 Pokaż, że $\frac{1}{x^2}$ jest czynnikiem całkującym dla $y \, dx - x \, dy$ (dla $x \neq 0$) i znajdź funkcję, której różniczką jest wynik.

- 3 Oblicz Q i W dla drogi z przykładu 4.1 biegnącej po prostej na wykresie $p(V)$, z $p_A = 249,4$ kPa do $p_B = 166,3$ kPa.
- 4 Gaz przechodzi cykl zamknięty. Ile wynoszą $\oint dU$ i $\oint dS$? Czy $\oint \delta Q$ musi być zerowe? Co oznacza niezerowe $\oint \delta Q$?
- 5 Pokaż, że $dp = \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV$ dla gazu doskonałego jest różniczką zupełną, i wyjaśnij, dlaczego musiało tak wyjść.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Praca zależy tylko od początku i końca drogi.”

Tylko dla pól potencjalnych. Pole $[-y; x]$ daje na trzech drogach 0, $\frac{1}{3}$ i 1 (przykład 2.1).

× „Jeśli $\partial_x Q = \partial_y P$, to pole jest potencjalne.”

Tylko na obszarze bez dziur. Wir $\frac{[-y; x]}{x^2+y^2}$ spełnia test poza zerem, a ma cyrkulację 2π wokół zera.

× „Całka krzywoliniowa zależy od tego, jak szybko przebiegamy krzywą.”

Nie zależy od parametryzacji (zadanie 2.3). Zależy tylko od kierunku przebiegu: odwrócenie kierunku zmienia znak.

× „Ciało ma określoną ilość ciepła.”

Ciepło nie jest funkcją stanu: δQ nie jest różniczką zupełną, a ciepło pobrane między dwoma stanami zależy od drogi (przykład 4.1). Funkcjami stanu są energia wewnętrzna i entropia.

× „Potencjał jest jeden.”

Z dokładnością do stałej. Fizyczne są tylko różnice potencjałów, dlatego wybór zera energii potencjalnej jest umowny.

× „W fizyce i w matematyce potencjał to to samo.”

Znak bywa inny: matematycy piszą $\vec{F} = \nabla\varphi$, fizycy $\vec{F} = -\nabla U$. Siła pcha w stronę spadku energii potencjalnej.

6 Sprawdź się

1 Jak obliczyć $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dla krzywej $\vec{r}(t)$?

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

2 Ile wynosi praca pola $\nabla\varphi$ od A do B ?

$$\varphi(B) - \varphi(A), \text{ po każdej drodze.}$$

3 Jaki test sprawdza, czy $[P; Q]$ jest potencjalne?

$$\partial_x Q = \partial_y P \text{ na obszarze jednospójnym.}$$

4 Ile wynosi cyrkulacja pola potencjalnego?

Zero po każdej drodze zamkniętej.

5 Dlaczego wir $\frac{[-y; x]}{x^2+y^2}$ nie jest potencjalny?

Bo ma cyrkulację 2π wokół zera; test nie obowiązuje, bo obszar ma dziurę w zerze.

6 Czy δQ jest różniczką zupełną?

Nie. Dla procesów odwracalnych różniczką zupełną jest $\delta Q/T = dS$.

7 Jaki jest związek siły z energią potencjalną?

$$\vec{F} = -\nabla U.$$

CAŁKI KRZYWOLINIOWE

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

zmiana kierunku: znak minus;

parametryzacja: bez znaczenia

$$\int_C f ds, \quad ds = |\vec{r}'| dt \text{ (masa drutu, długość)}$$

$$\text{cyrkulacja: } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

POLA POTENCJALNE I RÓŻNICZKI

$$\int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A); \text{ fizyka: } \vec{F} = -\nabla U$$

potencjalne $\iff$ niezależność od drogi

$\iff$ zerowe cyrkulacje

test 2D: $\partial_x Q = \partial_y P$; 3D: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$; obszar jednospójny!

potencjał: całkuj $\varphi_x = P$ po x , dobierz $g(y, z)$

$P dx + Q dy = d\varphi$ (zupełna) $\iff$ ten sam test

δQ nie zupełna; $\delta Q/T = dS$ (proces odwracalny; czynnik całkujący $1/T$)

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 14-1, 14-3...14-5 (praca jako całka, siły zachowawcze i niezachowawcze, potencjał i $\vec{F} = -\nabla U$).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **J. Stewart**, *Multivariable Calculus*, wyd. 7: §16.1 (pola wektorowe), §16.2 (całki krzywoliniowe), §16.3 (podstawowe twierdzenie dla całek krzywoliniowych, pola zachowawcze).
- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: całki krzywoliniowe i różniczki zupełne.

Cyrkulację po małej pętli zamienimy w lekcji 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja w rotację, a strumień przez małą zamkniętą powierzchnię w dywergencję. Twierdzenia Greena i Stokesa (3.6 Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa) powiedzą, że cyrkulacja po brzegu to suma rotacji wewnątrz, co wyjaśni, dlaczego dziura w obszarze tak wszystko zmienia. Różniczki zupełne wrócą w termodynamice (Dział 9: Termodynamika i entropia), a pola potencjalne w elektrostatyce (Dział 14: Potencjał, przewodniki i kondensatory).



Odpowiedzi

Zadania · część 2

1. $\vec{r} = [\cos t; \sin t]$: $\vec{F} \cdot \vec{r}' = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, praca 2π . W drugą stronę -2π .
2. $\vec{r} = [1 - t; t]$: $(1 - t) \cdot 1 - t \cdot (-1) = 1$, całka 1.
3. $\vec{r} = [2s; 4s^2]$, $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, $\vec{r}' = [2; 8s]$: $\int_0^{1/2} (-4s^2 \cdot 2 + 2s \cdot 8s) ds = \int_0^{1/2} 8s^2 ds = \frac{1}{3} \checkmark$. Szybszy przebieg daje większe $\vec{r}'$, ale krótszy przedział s .
4. $W = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \approx 3,70 \cdot 10^9 \text{ J}$. $mgh \approx 3,92 \cdot 10^9 \text{ J}$, o 6% za dużo, bo g maleje z wysokością.
5. $ds = dt$ dla $[\cos t; \sin t]$: $\int_0^\pi (1 + \sin t) dt = \pi + 2 \approx 5,14 \text{ kg}$. Zmiana kierunku przebiegu nic nie zmienia, bo $ds > 0$.
6. 50 J i $10 \cdot \pi \cdot 2,5 \approx 78,5 \text{ J}$. Siła tarcia zależy od kierunku ruchu, a nie tylko od położenia, więc nie da się jej zapisać jako $\vec{F}(x, y)$. Feynman podkreśla, że tarcie tylko pozornie łamie zasadę zachowania energii: energia przechodzi w ciepło. (FLP I-14-4)

Zadania · część 3

1. Pierwsze: $\varphi = x^3 y + y^2$. Drugie: $\varphi = y \sin x + y$. Trzecie nie ($\partial_x Q - \partial_y P = y - x$). Czwarte: $\varphi = xy^2 + e^y$.
2. $\varphi(2; 1) - \varphi(0; 0) = 8 + 1 = 9$.
3. $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, więc $\vec{F} = \nabla \left(-\frac{k}{r} \right)$. Energia potencjalna $U = -\varphi = \frac{k}{r}$ (dla przyciągania $k < 0$, np. $k = -GMm$: $U = -\frac{GMm}{r}$).
4. $\partial_x \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y \frac{-y}{x^2+y^2} \checkmark$. Na okręgu $\vec{F} = \frac{1}{r} \hat{\theta}$, a $d\vec{r} = r d\theta \hat{\theta}$, więc cyrkulacja to $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, niezależnie od promienia.
5. $\vec{F} = -\nabla U = [-2x - y; -x - 2y]$. Praca = $U(A) - U(B) = 1 - 1 = 0$.
6. $\varphi = F_x x + F_y y + F_z z$. Dla $\vec{F} = [0; 0; -mg]$: praca $-mg\Delta z$. Zakosy rozkładają tę samą pracę na dłuższą drogę, więc wymagana siła (i moc przy tej samej prędkości) jest mniejsza. Praca mięśni to inna sprawa: organizm zużywa energię także na samo napinanie mięśni, co Feynman wyraźnie odróżnia od pracy fizycznej. (FLP I-14-1)

Zadania · część 4

1. Tak: $d(x^2 y)$. Nie: $\partial_y(y) = 1 \neq \partial_x(-x) = -1$.
2. $\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy$: $\partial_y \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \partial_x \left(-\frac{1}{x} \right) \checkmark$. To $d \left(-\frac{y}{x} \right)$.
3. W to pole trapezu: $\frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) \approx \frac{1}{2} \cdot 415,7 \text{ kPa} \cdot 0,01 \text{ m}^3 = 2078,5 \text{ J}$. $Q = \Delta U + W \approx 3326 \text{ J}$. Inne niż na drogach 1 i 2.
4. $\oint dU = \oint dS = 0$ (funkcje stanu, cyrkulacja zerowa). $\oint \delta Q$ nie musi być zerowe; z pierwszej zasady $\oint \delta Q = \oint \delta W$, czyli pole cyklu na wykresie $p(V)$: tak pracuje silnik cieplny.
5. $\partial_V \frac{nR}{V} = -\frac{nR}{V^2} = \partial_T \left(-\frac{nRT}{V^2} \right) \checkmark$. Musiało, bo $p = nRT/V$ jest funkcją stanu, a to jej różniczka zupełna (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce).

