

Całki podwójne i potrójne

Masa płyty o zmiennej grubości, objętość bryły, środek masy, moment bezwładności Ziemi, prawdopodobieństwo, że cząstka jest w danym obszarze. Wszystkie te wielkości to sumy po bardzo wielu małych kawałkach powierzchni albo objętości. Całka wielokrotna to ta sama idea co całka z lekcji 1.5, tylko kawałki są prostokątami i prostopadłościanami. Ta lekcja pokazuje, jak takie całki liczyć (po jednej zmiennej naraz), jak dobrać współrzędne, żeby rachunek stał się prosty, i dlaczego przy zmianie współrzędnych pojawia się wyznacznik.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

22 zadania w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 19-1...19-3; J. Stewart,
Multivariable Calculus, wyd. 7, rozdz. 15

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: całka, której nie da się policzyć
- 1 Całka podwójna
- 2 Zamiana zmiennych i jacobian
- 3 Całki potrójne
- 4 Środek masy i moment bezwładności
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: całka, której nie da się policzyć

Rozkład normalny (krzywa Gaussa), który opisuje rozrzut wyników pomiarów (lekcje 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru i 5.1 Prawdopodobieństwo i rozkłady), ma kształt $e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, a po zmianie skali e^{-x^2} . Żeby go unormować, potrzebujemy

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Funkcja e^{-x^2} nie ma funkcji pierwotnej wyrażającej się przez funkcje elementarne. Metody z lekcji 1.5 Całki tu nie pomogą: ani podstawienie, ani całkowanie przez części. A mimo to I ma dokładną, prostą wartość.

Pytanie na start. Zgadnij, ile wynosi I . *Podpowiedź: wynik zawiera π , choć w całce nie ma żadnego okręgu. Skąd tu okrąg? Odpowiedź w przykładzie 2.1.*

Sztuczka polega na tym, żeby zamiast jednej całki policzyć jej kwadrat, czyli całkę po całej płaszczyźnie. Wtedy pojawia się okrąg, a wraz z nim współrzędne biegunowe z lekcji 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne. Najpierw jednak musimy wiedzieć, czym jest całka po płaszczyźnie.

Całka podwójna

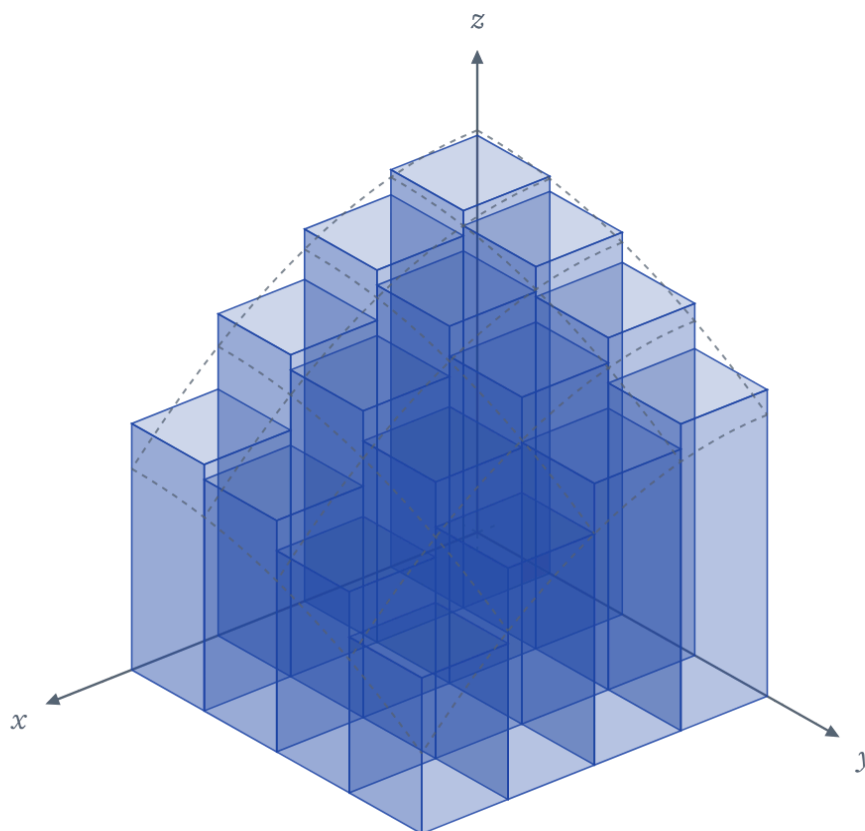
Niech $f(x, y) \geq 0$ będzie wysokością „dachu” nad obszarem D na płaszczyźnie. Dzielimy D na małe prostokąty o polach ΔA_k , nad każdym stawiamy słupek o wysokości f w jakimś jego punkcie i sumujemy objętości. Gdy prostokąty maleją, suma dąży do objętości bryły pod wykresem. To **całka podwójna**:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

To ta sama konstrukcja co suma Riemanna w lekcji 1.5 Całki, tylko kawałki są prostokącikami $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Dla f o dowolnym znaku całka to objętość nad płaszczyzną minus objętość pod nią. Interpretacja zależy od tego, czym jest f : dla $f = 1$ całka to pole D , dla gęstości powierzchniowej σ (kg/m²) to masa, dla gęstości prawdopodobieństwa to prawdopodobieństwo.

SYMULACJA 1

Suma Riemanna w dwóch wymiarach. Nad kwadratem $[0; 2] \times [0; 2]$ stoją słupki o wysokości f w środku każdego kwadracika. Funkcja to $f(x, y) = 2 - 0,25x^2 - 0,15y^2$, jej całka to $\frac{88}{15}$. Zwiększaj liczbę podziałów: suma objętości słupków zbliża się do całki, tak jak w lekcji 1.5. Przeciągnij rysunek, żeby obrócić widok.



— słupki $f(\text{środek}) \cdot \Delta A$ - - wykres f

liczba słupków n^2 16

suma Riemanna 5,90000

całka dokładna $88/15$ 5,86667

błąd 0,03333

Stan na rysunku: $n = 4$ (16 słupków), suma Riemanna 5,90000, całka 5,86667, błąd 0,03333.

1.1 Liczymy po jednej zmiennej naraz

Całki podwójnej nie liczy się z definicji. Na prostokącie $[a; b] \times [c; d]$ najpierw całkujemy po y przy ustalonym x (pole przekroju bryły płaszczyzną $x = \text{const}$), a potem to pole całkujemy po x . To „krojenie chleba”: objętość = suma pól przekrojów razy ich grubość. Taki zapis, całka z całki, to **całka iterowana**.

TWIERDZENIE FUBINIEGO (CAŁKA ITEROWANA)

$$\iint_{[a; b] \times [c; d]} f \, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

dla funkcji ciągłej, a także ograniczonej, której nieciągłości leżą na skończenie wielu gładkich krzywych (o ile całki iterowane istnieją). Kolejność całkowania można zamienić. Na obszarze nieograniczonym, jak w prologu, to samo działa dla $f \geq 0$.

por. Stewart §15.2

Przykład 1.1

Na prostokącie

Oblicz $\iint_D (x + y^2) \, dA$ dla $D = [0; 2] \times [0; 1]$.

- 1 Wewnętrzna, po y (x jest stałą): $\int_0^1 (x + y^2) \, dy = x + \frac{1}{3}$.
- 2 Zewnętrzna: $\int_0^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) \, dx = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

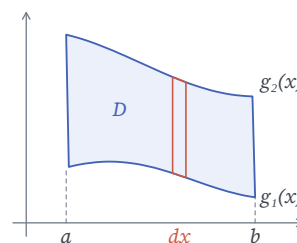
Wynik: $\frac{8}{3}$.

Sprawdzenie: w odwrotnej kolejności $\int_0^2 (x + y^2) \, dx = 2 + 2y^2$, a $\int_0^1 (2 + 2y^2) \, dy = 2 + \frac{2}{3} \checkmark$. Szacunek: wartość w środku prostokąta $f(1; \frac{1}{2}) = 1,25$ razy pole 2 daje $2,5 \approx 2,67 \checkmark$.

1.2 Obszary, które nie są prostokątami

Jeśli D to obszar między wykresami, $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, to granice wewnętrznej całki zależą od x :

$$\iint_D f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$



Ten sam obszar można często opisać „poziomo”: $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$. Wybór kolejności nie zmienia wyniku, ale może zmienić trudność rachunku z niemożliwego na łatwy. Zawsze zaczynaj od rysunku obszaru.

Przykład 1.2

Zmiana kolejności ratuje rachunek

Oblicz $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$.

- 1 W tej kolejności się nie da: e^{y^2} nie ma elementarnej funkcji pierwotnej (prolog).
- 2 Obszar: $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$, czyli trójkąt nad przekątną $y = x$, o wierzchołkach $(0; 0), (0; 1), (1; 1)$. Poziomo: $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$.
- 3 $\int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

Wynik: $\frac{e-1}{2} \approx 0,859$.

Sprawdzenie: e^{y^2} na trójkącie leży między 1 a $e \approx 2,72$, a pole trójkąta to $\frac{1}{2}$, więc wynik musi leżeć między 0,5 a 1,36 ✓. Czynnikiem y po wewnętrznej całce to długość odcinka $0 \leq x \leq y$, i to on umożliwił podstawienie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

6 zadań · ok. 45 min

1 Oblicz $\int_0^1 \int_0^2 xy^2 dy dx$.

2 Oblicz $\iint_D xy dA$ dla trójkąta $0 \leq y \leq x \leq 1$ w obu kolejnościach.

3 Oblicz $\iint_{[0;1] \times [0;2]} x e^{xy} dA$. W której kolejności jest łatwiej?

4 Oblicz pole obszaru między parabolą $y = x^2$ a prostą $y = x$ jako całkę podwójną z $f = 1$.

5 Zamień kolejność całkowania: $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx$. Narysuj obszar.

6 Pokaż, że dla $f(x, y) = g(x)h(y)$ na prostokącie całka podwójna to iloczyn dwóch całek pojedynczych. Wykorzystaj to w prologu: zapisz I^2 jako całkę podwójną.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Zamiana zmiennych i jacobian

Gdy obszar albo funkcja mają symetrię kołową, kroimy płaszczyznę na kawałki pierścieni zamiast prostokątów. W lekcji 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne pole takiego kawałka to $dA = r dr d\theta$: prostokącik o bokach dr i $r d\theta$. Zatem

$$\iint_D f dA = \iint f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Czynnika r nie wolno zgubić: kawałki daleko od środka są większe niż te przy środku.

Przykład 2.1

Całka Gaussa

Oblicz $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

- 1 Z zadania 1.6: $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA$.
- 2 We współrzędnych biegunowych $x^2 + y^2 = r^2$, a cała płaszczyzna to $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$: $I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta$.
- 3 Czynniki r zrobił swoje: $\int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$. Zatem $I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$.

Wynik: $I = \sqrt{\pi} \approx 1,7725$.

Sprawdzenie: numerycznie suma $e^{-x^2} \Delta x$ dla $\Delta x = 0,1$ na $[-5; 5]$ daje 1,77245 ✓. Okrąg pojawił się, bo $e^{-x^2} e^{-y^2} = e^{-r^2}$ zależy tylko od odległości od środka.

2.1 Jakobian: skąd czynnik przy dA

Ogólnie: niech $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Mały prostokącik $du \times dv$ w zmiennych $(u; v)$ przechodzi (w pierwszym przybliżeniu, lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce) w równoległobok rozpięty na wektorach $[x_u; y_u] du$ i $[x_v; y_v] dv$. Jego pole to moduł wyznacznika z lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań (piszemy krótko $x_u = \partial x / \partial u$ i tak dalej):

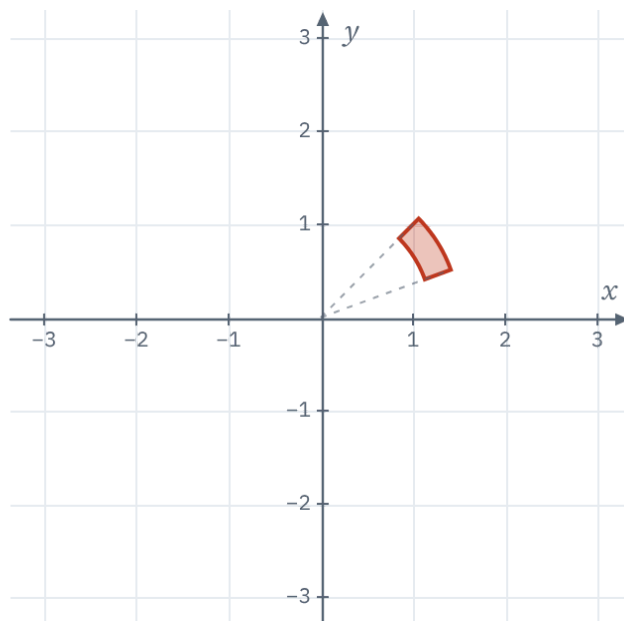
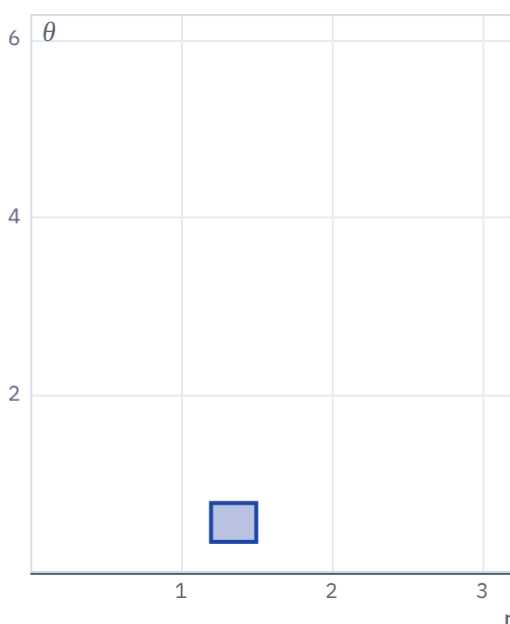
ZAMIANA ZMIENNYCH W CAŁCE PODWÓJNEJ

$$dA = |J| du dv, \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

J to **jacobian**, wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych. Mówi, ile razy przekształcenie powiększa małe pola. W trzech wymiarach $dV = |J| du dv dw$ z wyznacznikiem 3×3 . Przekształcenie musi być wzajemnie jednoznaczne (poza zbiorem o zerowym polu): gdyby θ biegło od 0 do 4π , każde pole policzylibyśmy dwa razy. (por. Stewart §15.10)

Dla biegunowych: $J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$. Dla przekształcenia liniowego jacobian jest stały i równy jego wyznacznikowi: to dokładnie „współczynnik zmiany pól” z lekcji 2.1. Przekształcenie nieliniowe w małej skali wygląda jak liniowe, więc lokalnie mnoży pola przez $|J|$.

SYMULACJA 2 Mały prostokąt $\Delta r \times \Delta \theta$ w zmiennych $(r; \theta)$ po lewej i jego obraz na płaszczyźnie $(x; y)$ po prawej: kawałek pierścienia. Zmieniaj r : ten sam prostokąt w $(r; \theta)$ daje tym większy kawałek, im dalej od środka. Stosunek pól wynosi dokładnie $r + \frac{\Delta r}{2}$, czyli r w środku prostokąta; gdy $\Delta r \rightarrow 0$, dąży do r .



— prostokąt $\Delta r \times \Delta \theta$ — obraz na płaszczyźnie $(x; y)$

pole w $(r; \theta)$: $\Delta r \cdot \Delta \theta$ 0,1309

pole obrazu 0,1767

stosunek pól 1,350

r w środku prostokąta 1,350

Stan na rysunku: $r = 1,20$, $\Delta r = 0,30$, $\Delta \theta = 25^\circ$; pole w $(r; \theta)$ 0,1309, pole obrazu 0,1767, stosunek 1,350 (r w środku 1,350).

- 1 Oblicz objętość bryły pod paraboloidą $z = 4 - x^2 - y^2$ i nad płaszczyzną $z = 0$.
■ ■ ■
- 2 Tarcza o promieniu R ma gęstość powierzchniową $\sigma = \sigma_0(1 + r/R)$. Oblicz jej masę.
■ ■ ■
- 3 Oblicz pole elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ podstawieniem $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$.
■ ■ ■
- 4 Jaka jest średnia odległość punktu koła o promieniu R od jego środka? Dlaczego wynik jest większy niż $R/2$?
■ ■ ■
- 5 Gęstość prawdopodobieństwa położenia cząstki na płaszczyźnie to $p(x, y) = C e^{-(x^2+y^2)/(2s^2)}$. Wyznacz C z warunku, że całkowite prawdopodobieństwo to 1, i oblicz prawdopodobieństwo, że cząstka jest dalej niż $2s$ od środka.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Całki potrójne

Całka potrójna $\iiint_V f \, dV$ to suma po prostopadłościanikach $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Liczymy ją jak podwójną: trzy całki pojedyncze, od wewnętrznej do zewnętrznej. Dla $f = 1$ to objętość, dla gęstości masy (kg/m^3) masa. Przy symetrii osiowej lub środkowej używamy współrzędnych z lekcji 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne:

ELEMENTY OBJĘTOŚCI

$$dV = dx \, dy \, dz = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Czynniki ρ i $r^2 \sin \theta$ to jacobiany przejścia od kartezjańskich do walcowych i sferycznych (wyznaczniki 3×3 macierzy pochodnych). Uwaga: tu ρ to odległość od osi z ; gdy w tej samej całce występuje gęstość masy, piszemy ją ρ_m .

por. Stewart §15.8, §15.9

Przykład 3.1

Objętość kuli dwoma sposobami

Oblicz objętość kuli o promieniu R we współrzędnych sferycznych i walcowych.

- 1 Sferyczne: $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- 2 Walcowe: dla danego ρ kula sięga od $z = -\sqrt{R^2 - \rho^2}$ do $+\sqrt{R^2 - \rho^2}$:
 $\int_0^{2\pi} \int_0^R 2\sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{2}{3}(R^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Wynik: $\frac{4}{3}\pi R^3$, oba sposoby zgodne.

Sprawdzenie: wymiar $[R^3] \checkmark$. Kula zajmuje $\frac{\pi}{6} \approx 52\%$ sześcianu, w który jest wpisana: rozsądne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz $\iiint_{[0;1]^3} (x + y + z) \, dV$.
■ ■ ■
- 2 Oblicz objętość walca o promieniu R i wysokości H oraz stożka o tych samych wymiarach we współrzędnych walcowych.
■ ■ ■
- 3 Oblicz objętość „rożka lodowego”: części kuli $r \leq 1$ leżącej w stożku $\theta \leq 45^\circ$.
■ ■ ■
- 4 Średnia gęstość Ziemi: masa $5,97 \cdot 10^{24}$ kg, promień 6371 km. Porównaj z gęstością skał skorupy (około 2700 kg/m³). Co z tego wynika?
■ ■ ■
- 5 Jaka jest średnia odległość punktu kuli o promieniu R od środka?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Środek masy i moment bezwładności

Feynman definiuje środek masy jako średnią położen ważoną masami, $\vec{R}_{\text{sm}} = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i$, i przypomina (dowód w rozdziale 18), że układ ciał porusza się tak, jakby cała masa była skupiona

w tym punkcie. FLP I-19-1 Fizykę środka masy omawia lekcja Dział 3: Pęd, zderzenia i środek masy. Dla ciała ciągłego suma staje się całką:

☛ ŚRODEK MASY I MOMENT BEZWŁADNOŚCI CIAŁA CIĄGŁEGO

$$\vec{R}_{\text{sm}} = \frac{1}{M} \iiint \vec{r} \rho_m dV, \quad M = \iiint \rho_m dV, \quad I_z = \iiint (x^2 + y^2) \rho_m dV.$$

ρ_m to gęstość masy (indeks odróżnia ją od współrzędnej walcowej ρ). I_z to moment bezwładności względem osi z : każdy kawałek masy liczy się z kwadratem odległości od osi.

Przykład 4.1

Środek masy półkola

Znajdź środek masy jednorodnego półkola $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$.

- 1 Z symetrii $\bar{x} = 0$. Pole $A = \frac{1}{2}\pi R^2$.
- 2
$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^\pi \int_0^R (r \sin \theta) r dr d\theta = \frac{1}{A} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi}.$$

Wynik: $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R$.

Sprawdzenie: Feynman dostaje ten sam wynik bez całki, z (drugiego) twierdzenia Pappusa–Guldina: obracając półkole wokół jego średnicy, dostajemy kulę, a objętość bryły obrotowej to pole figury razy droga, którą przebywa jej środek masy. $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi \bar{y}$, więc $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$ ✓. FLP I-19-2 Wynik jest mniejszy niż $\frac{R}{2}$, bo półkole jest szersze przy średnicy.

Moment bezwładności kuli i wewnątrz Ziemi

Oblicz moment bezwładności jednorodnej kuli o masie M i promieniu R względem osi przez środek. Zmierzona wartość dla Ziemi to $I \approx 0,331 MR^2$. Co to mówi o jej wnętrzu?

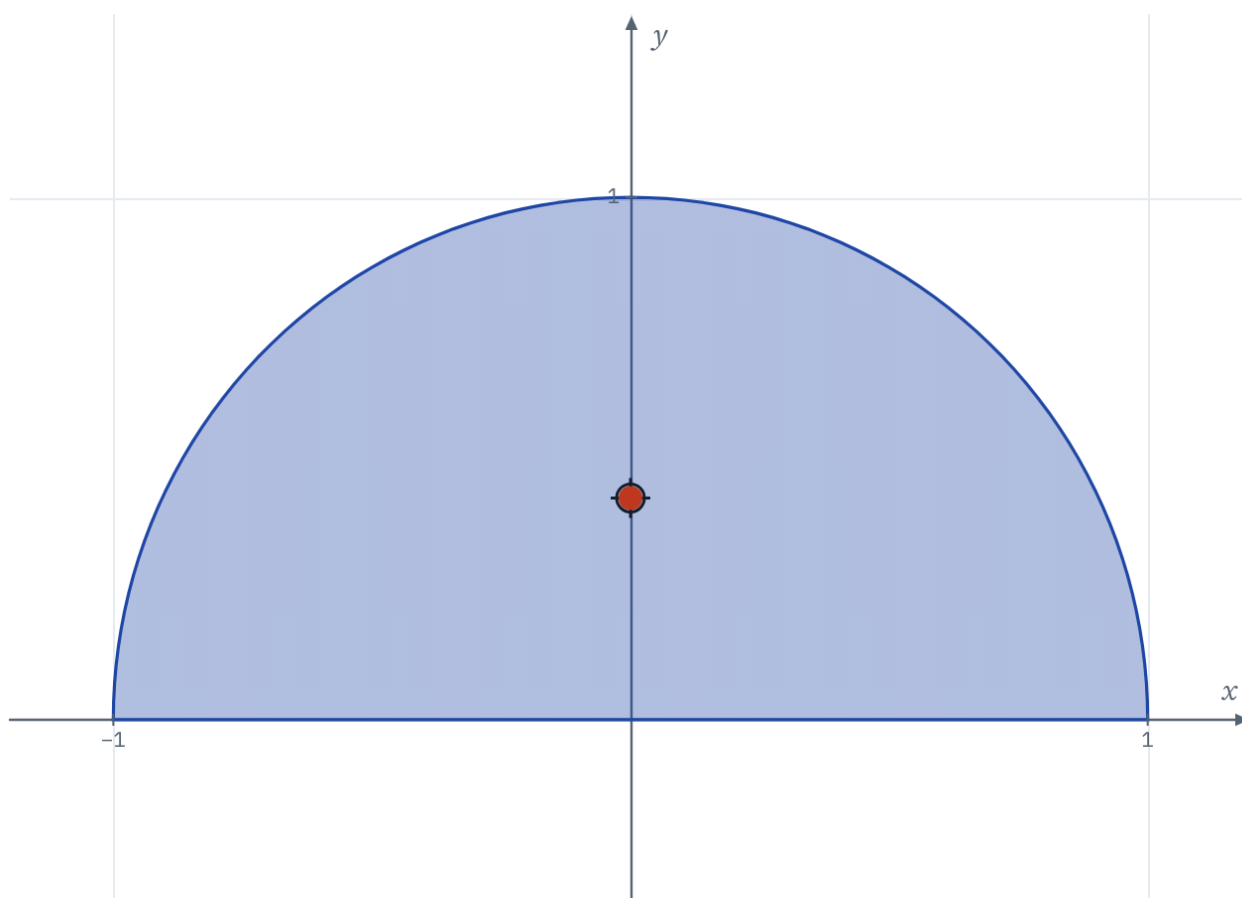
- 1 Kwadrat odległości od osi z : $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$. $I = \rho_m \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \rho_m \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15} \rho_m R^5$.
- 2 Z $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m$: $I = \frac{2}{5}MR^2 = 0,4 MR^2$ (Feynman podaje ten wynik w tabeli bez wyprowadzenia). FLP I-19-3
- 3 Dla kuli, której gęstość maleje liniowo od środka do zera na powierzchni, $\rho_m = \rho_0(1 - r/R)$, ten sam rachunek daje $I = \frac{4}{15}MR^2 \approx 0,267 MR^2$ (zadanie 4.5).

Wynik: jednorodna kula: $0,4 MR^2$. Ziemia: $0,331 MR^2$, czyli masa jest skupiona bliżej środka niż w kuli jednorodnej, choć nie tak bardzo jak w modelu liniowym.

Sprawdzenie: $\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3} \checkmark$ (podstawienie $u = \cos \theta$). Wniosek zgadza się z zadaniem 3.4: średnia gęstość dwa razy większa niż skał przy powierzchni. Dwie niezależne całki mówią to samo o jądrze Ziemi.

SYMULACJA 3

Środek masy figury płaskiej, policzony numerycznie z całki podwójnej. Wybierz figurę i zmieniaj gęstość powierzchniową $\sigma = \sigma_0(1 + k s)$, gdzie s rośnie od 0 do 1 w górę albo w prawo przez całą figurę. Środek masy przesuwa się w stronę gęstszej części. Dla jednorodnego półkola wypada w $\frac{4R}{3\pi}$, jak w przykładzie 4.1.



— figura (ciemniej = gęściej) — środek masy - - - środek figury jednorodnej

masa $M(\sigma_0 = 1)$ 1,571

$\bar{x}$ 0,000

$\bar{y}$ 0,424

$4R/(3\pi)$ (jednorodne) 0,424

Stan na rysunku: półkole, $\sigma = 1 + 0,0 \cdot s$; $M = 1,571$, środek masy $[0,000; 0,424]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

6 zadań · ok. 50 min

1 Znajdź środek masy jednorodnego trójkąta o wierzchołkach $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$.

2 Pokaż, że moment bezwładności jednorodnej tarczy względem jej osi to $\frac{1}{2}MR^2$.

3 Znajdź środek masy jednorodnej półkuli $r \leq R$, $z \geq 0$.

- 4 Gdzie leży środek masy jednorodnego stożka o wysokości H (od podstawy)?
- 5 Sprawdź wynik z przykładu 4.2 dla $\rho_m = \rho_0(1 - r/R)$: oblicz M i I .
- 6 Udowodnij twierdzenie Steinera: moment bezwładności względem osi odległej o d od równoległej osi przez środek masy to $I = I_{\text{śm}} + Md^2$. Użyj go dla pręta o długości L obracanego wokół końca.

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

- × „We współrzędnych biegunowych $dA = dr d\theta$.”

Brakuje jakobianu: $dA = r dr d\theta$. Bez niego pole koła wyszłoby $2\pi R$, z jednostką długości.

- × „Przy zamianie kolejności całkowania wystarczy zamienić granice miejscami.”

Tylko na prostokącie. Na innych obszarach trzeba narysować obszar i opisać go od nowa (przykład 1.2, zadanie 1.5).

- × „Środek masy jednorodnej figury leży w połowie jej wysokości.”

Półkole: $0,42R$, nie $0,5R$; stożek: $\frac{H}{4}$, nie $\frac{H}{2}$. Środek masy przesuwa się tam, gdzie jest więcej materii.

- × „Jakobian to zawsze r .”

To jakobian biegunowych i walcowych. Sferyczne mają $r^2 \sin \theta$, elipsa abr , każde podstawienie swój wyznacznik.

- × „Jak funkcja nie ma funkcji pierwotnej, to całki nie da się policzyć dokładnie.”

Całka Gaussa (przykład 2.1) i przykład 1.2 pokazują, że czasem pomaga przejście do wyższego wymiaru albo zmiana kolejności.

× „Moment bezwładności zależy tylko od masy i rozmiaru.”

Zależy od rozkładu masy: kula jednorodna $0,4MR^2$, Ziemia $0,33MR^2$, cienka sfera $\frac{2}{3}MR^2$. Właśnie dlatego pomiar I mówi coś o wnętrzu planety.

6 Sprawdź się

1 Co oznacza $\iint_D 1 \, dA$?

Pole obszaru D .

2 Kiedy można zamienić kolejność całkowania?

Dla funkcji ciągłej (twierdzenie Fubiniego), ale na obszarze nieprostokątnym trzeba opisać obszar od nowa.

3 Ile wynosi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$?

$\sqrt{\pi}$.

4 Czym jest jacobian geometrycznie?

Współczynnikiem, przez który przekształcenie mnoży małe pola (objętości):
wyznacznikiem macierzy pochodnych.

5 Jaki jest element objętości we współrzędnych sferycznych?

$r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

6 Gdzie leży środek masy półkola?

Na osi symetrii, $\frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R$ od średnicy.

7 Ile wynosi moment bezwładności jednorodnej kuli?

$\frac{2}{5}MR^2$.

CAŁKI WIELOKROTNE

$\iint_D f \, dA = \lim \sum f \, \Delta A$; $f = 1$: pole; $f = \sigma$: masa

Fubini: $\int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx$, kolejność dowolna (na prostokącie; inne obszary opisz od nowa)

obszar $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$: granice wewnętrzne zależą od x

$dA = r \, dr \, d\theta$; $dA = |J| \, du \, dv$, $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$ (ρ : odległość od osi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

MASA, ŚRODEK MASY, BEZWŁADNOŚĆ

$$M = \iiint \rho_m \, dV, \quad \vec{R}_{\text{śm}} = \frac{1}{M} \iiint \vec{r} \rho_m \, dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \rho_m \, dV; \text{Steiner: } I = I_{\text{śm}} + Md^2$$

półkole $\frac{4R}{3\pi}$; półkula $\frac{3}{8}R$; stożek $\frac{H}{4}$; trójkąt: średnia wierzchołków

tarcza $\frac{1}{2}MR^2$; kula $\frac{2}{5}MR^2$; pręt (koniec) $\frac{1}{3}ML^2$, (środek) $\frac{1}{12}ML^2$

Pappus: $V_{\text{obrotowa}} = A \cdot 2\pi \bar{y}$, $\bar{y}$ = odległość środka figury od osi obrotu

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 19-1...19-3 (środek masy, twierdzenie Pappusa, momenty bezwładności i twierdzenie o osiach równoległych).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **J. Stewart**, *Multivariable Calculus*, wyd. 7: rozdz. 15 (całki podwójne i potrójne, zamiana zmiennych, zastosowania).
- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: całki wielokrotne i ich zastosowania (środki masy, momenty bezwładności).

Całki po krzywej (3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne) i po powierzchni (3.5 Strumień, dywergencja i rotacja) zbudujemy z tej samej idei: suma po małych kawałkach łuku $d\vec{r}$ albo powierzchni $d\vec{S}$. Momenty bezwładności wrócą przy ruchu obrotowym (Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna), a całki z gęstości prawdopodobieństwa w rachunku prawdopodobieństwa (5.1 Prawdopodobieństwo i rozkłady) i w mechanice kwantowej, gdzie $|\psi|^2 \, dV$ to prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w objętości dV (Dział 19: Atom wodoru i układ okresowy).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $\int_0^1 x \cdot \frac{8}{3} dx = \frac{4}{3}$.
- $\int_0^1 \int_0^x xy dy dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$; $\int_0^1 \int_y^1 xy dx dy = \int_0^1 \frac{y(1-y^2)}{2} dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \checkmark$.
- Najpierw po y : $\int_0^2 xe^{xy} dy = e^{2x} - 1$, potem $\int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \frac{e^2 - 1}{2} - 1 = \frac{e^2 - 3}{2} \approx 2,19$. Najpierw po x trzeba by całkować przez części.
- $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$.
- Obszar: $0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2$. Czyli między osią y a parabolą $x = y^2$ (nad krzywą $y = \sqrt{x}$), pod prostą $y = 2$. Poziomo: $0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2$: $\int_0^2 \int_0^{y^2} f dx dy$.
- $\int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h \right) dx = \int_a^b g \cdot \int_c^d h$. Zatem $I^2 = \int e^{-x^2} dx \int e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA$.

Zadania • część 2

- Paraboloida przecina $z = 0$ na okręgu $r = 2$. $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.
- $2\pi\sigma_0 \int_0^R (r + r^2/R) dr = 2\pi\sigma_0 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{3} \right) = \frac{5}{3}\pi\sigma_0 R^2$.
- $J = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$. Pole: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = \pi ab$.
- $\frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot r dr d\theta = \frac{2R}{3}$. Pierścienie przy brzegu mają większe pole niż te przy środku, więc dalekie punkty ważą więcej.
- $C \cdot 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2/(2s^2)} dr = C \cdot 2\pi s^2 = 1, C = \frac{1}{2\pi s^2}$. $P(r > 2s) = \frac{1}{s^2} \int_{2s}^\infty r e^{-r^2/(2s^2)} dr = e^{-2} \approx 0,135$.

Zadania • część 3

- Każdy z trzech wyrazów daje $\frac{1}{2}$, razem $\frac{3}{2}$.
- Walec: $\pi R^2 H$. Stożek: $\int_0^H \pi R^2 (1 - z/H)^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.
- $2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 0,613$.
- $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 1,083 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$, $\bar{\rho}_m \approx 5510 \text{ kg/m}^3$, dwa razy więcej niż skorupa. Wnętrze musi być znacznie gęstsze od powierzchni (żelazne jądro).
- $\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R r \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3}{4}R$. Więcej niż w kole ($\frac{2}{3}R$), bo powłoki rosną jak r^2 .

Zadania • część 4

- $\bar{x} = \frac{1}{1/2} \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, z symetrii $\bar{y} = \frac{1}{3}$: średnia wierzchołków.
- $\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \sigma \cdot \frac{\pi R^4}{2} = \frac{1}{2} M R^2$, bo $M = \sigma \pi R^2$. (W lekcji 1.5 ten sam wynik dało sumowanie pierścieni.)
- $\bar{z} = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R$.

$$4. \bar{z} = \frac{\int_0^H z \pi R^2 (1-z/H)^2 dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{H}{4}.$$

$$5. M = 4\pi\rho_0 \int_0^R (r^2 - r^3/R) dr = \frac{\pi}{3}\rho_0 R^3. \quad I = \frac{8\pi}{3}\rho_0 \int_0^R (r^4 - r^5/R) dr = \frac{8\pi}{3}\rho_0 \cdot \frac{R^5}{30} = \frac{4\pi}{45}\rho_0 R^5. \quad I/(MR^2) = \frac{4}{15}.$$

$$6. \iiint [(x-d)^2 + y^2] \rho_m dV = I_{\text{śm}} - 2d \iiint x \rho_m dV + d^2 M = I_{\text{śm}} + M d^2. \text{Pręt: } I_{\text{śm}} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} M L^2, \text{ więc } \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2, \text{ jak u Feynmana.}$$

Matematyka · Całki podwójne i potrójne. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 19-1...19-3; J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7, rozdz. 15; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.