

Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne

Planeta krąży wokół Słońca, prąd płynie w prostym przewodzie, elektron siedzi w atomie. W każdym z tych problemów jest wyróżniony środek albo oś i współrzędne kartezjańskie tylko przeszkadzają. Ta lekcja daje trzy układy dopasowane do takiej symetrii. Ważniejsze od samych wzorów jest jedno spostrzeżenie: wersory tych układów zmieniają kierunek z miejsca na miejsce. Z tego biorą się przyspieszenie dośrodkowe, człon Coriolisa w przyspieszeniu i dodatkowe czynniki we wzorze na gradient.

CZAS

ok. 2,5 h teorii + 2 h zadań

ZADANIA

20 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

J. Stewart,
Multivariable Calculus, wyd. 7,
§10.3, §15.8, §15.9;
K. A. Stroud,
Engineering Mathematics

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: z Warszawy do Nowego Jorku
- 1 Współrzędne biegunowe i ruchome wersory
- 2 Współrzędne walcowe
- 3 Współrzędne sferyczne
- 4 Błędne intuicje
- 5 Sprawdź się
- 6 Karta wzorów i co dalej

Prolog: z Warszawy do Nowego Jorku

Warszawa leży na szerokości $52,23^\circ$ N i długości $21,01^\circ$ E, Nowy Jork na $40,71^\circ$ N i $74,01^\circ$ W. Jak daleko leci samolot? Na płaskiej mapie wystarczyłoby twierdzenie Pitagorasa, ale Ziemia jest (prawie) kulą, a szerokość i długość geograficzna to nie są współrzędne kartezjańskie. Na typowej mapie (np. w odwzorowaniu Merkatora) najkrótsza trasa wygląda w dodatku na łuk wygięty na północ.

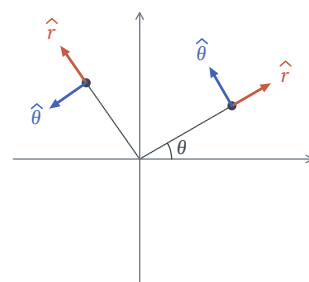
Pytanie na start. Oszacuj odległość po powierzchni Ziemi (promień 6371 km). Czy łuk na mapie oznacza, że samolot nadkłada drogi? Odpowiedź w przykładzie 3.1.

Szerokość i długość geograficzna to w istocie współrzędne sferyczne. Żeby z nich liczyć, trzeba umieć przejść do zwykłych osi x, y, z i z powrotem. Zaczniemy od płaszczyzny, gdzie widać najważniejsze zjawisko: wersory „idą” razem z punktem.

1

Współrzędne biegunowe i ruchome wersory

W lekcji 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe punkt płaszczyzny opisaliśmy odległością r od początku i kątem θ od dodatniej półosi x : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Teraz dołożmy do każdego punktu dwa wersory: $\hat{r}$ wskazuje kierunek, w którym rośnie r (od środka na zewnątrz), a $\hat{\theta}$ kierunek, w którym rośnie θ (prostopadle, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara):



WERSORY BIEGUNOWE

$$\hat{r} = [\cos \theta; \sin \theta], \quad \hat{\theta} = [-\sin \theta; \cos \theta], \quad \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}.$$

Wektor położenia to $\vec{r} = r \hat{r}$. Wersory są prostopadłe i mają długość 1, ale ich kierunek zależy od θ .

Wersory $\vec{i}, \vec{j}$ są wszędzie takie same, a $\hat{r}$ i $\hat{\theta}$ obracają się razem z punktem. Gdy punkt się porusza, zmieniają się więc nie tylko współrzędne, ale i wersory. Różniczkujemy $\vec{r} = r \hat{r}$ iloczynowo (lekcja 1.3 Pochodne), pamiętając, że $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$ (reguła łańcuchowa):

PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIE WE WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}.$$

Każdy wyraz ma sens fizyczny. $\dot{r}$ to prędkość oddalania się od środka, $r\dot{\theta}$ to prędkość „po okręgu”. W przyspieszeniu $-r\dot{\theta}^2$ to **przyspieszenie dośrodkowe** z lekcji 1.3 Pochodne (dla ruchu po okręgu zostaje tylko ono i $r\ddot{\theta}$). Wyraz $2\dot{r}\dot{\theta}$ pojawia się, gdy punkt jednocześnie oddala się od środka i obraca: to człon **Coriolisa**. W układzie inercyjnym to nie jest siła, tylko część przyspieszenia; w układzie obracającym się razem z ciałem ten sam wyraz pojawia się jako pozorna siła Coriolisa. Nikt tu nie wprowadza nowych sił. Te wyrazy biorą się wyłącznie z tego, że wersory się obracają.

Przykład 1.1

Biedronka na obracającej się platformie

Obrotowa platforma (jak karuzela) obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Biedronka idzie od środka wzdłuż narysowanego na niej promienia z prędkością $v = 0,1 \text{ m/s}$ względem platformy, więc $r = vt$, $\theta = \omega t$. Oblicz jej prędkość i przyspieszenie (względem podłogi) po $t = 3 \text{ s}$.

- 1 $r = 0,3 \text{ m}$, $\dot{r} = 0,1 \text{ m/s}$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta} = 0$.
- 2 $\vec{v} = 0,1 \hat{r} + 0,3 \cdot 2 \hat{\theta} = 0,1 \hat{r} + 0,6 \hat{\theta} \text{ (m/s)}$, $|\vec{v}| \approx 0,61 \text{ m/s}$.
- 3 $\vec{a} = (0 - 0,3 \cdot 4) \hat{r} + (0 + 2 \cdot 0,1 \cdot 2) \hat{\theta} = -1,2 \hat{r} + 0,4 \hat{\theta} \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Wynik: $\vec{v} = 0,1 \hat{r} + 0,6 \hat{\theta} \text{ m/s}$, $\vec{a} = -1,2 \hat{r} + 0,4 \hat{\theta} \text{ m/s}^2$.

Sprawdzenie: biedronka idzie po prostej względem platformy ze stałą prędkością, a mimo to ma przyspieszenie względem podłogi. Składowa $0,4 \text{ m/s}^2$ wzdłuż $\hat{\theta}$ to człon Coriolisa. Połowa ($\dot{r}\dot{\theta} = 0,2$) bierze się stąd, że im dalej od środka, tym szybciej porusza się podłoże; druga połowa stąd, że prędkość $\dot{r} \hat{r}$ obraca się razem z platformą. Jednostki: $\text{m} \cdot \text{rad}^2/\text{s}^2 = \text{m/s}^2 \checkmark$.

Dla siły centralnej (skierowanej wzdłuż promienia, do środka lub od środka, jak grawitacja) składowa $\hat{\theta}$ przyspieszenia jest zerowa: $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$. Zatem $r^2\dot{\theta}$ jest stałe: to zachowanie momentu pędu, a geometrycznie drugie prawo Keplera (promień zakreśla równe pola w równych czasach, bo prędkość połowa to $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$). Tę historię opowiada lekcja fizyki o grawitacji (Dział 5: Grawitacja i orbity).

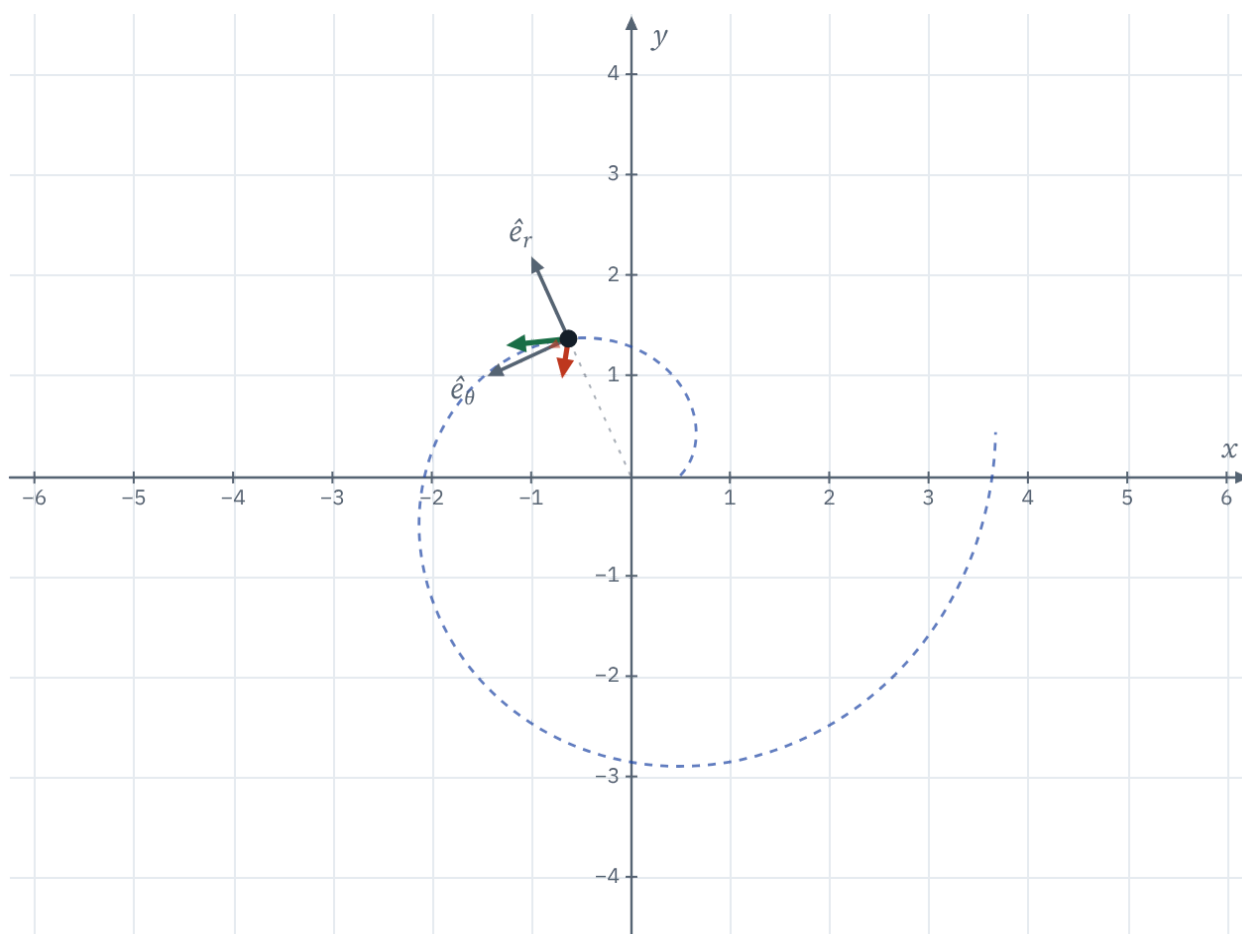
1.1 Gradient we współrzędnych biegunowych

Przesunięcie o dr zmienia położenie o dr wzdłuż $\hat{r}$, a przesunięcie o $d\theta$ o $r d\theta$ wzdłuż $\hat{\theta}$ (łuk okręgu). Zatem $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$. Piszemy $\nabla f = A\hat{r} + B\hat{\theta}$; wtedy $\nabla f \cdot d\vec{r} = A dr + Br d\theta$, a to ma być równe $df = f_r dr + f_\theta d\theta$. Porównanie daje $A = f_r$, $B = \frac{1}{r} f_\theta$ (to samo wychodzi z reguły łańcuchowej z lekcji 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}.$$

Czynnik $1/r$ jest konieczny: kąt nie jest długością, a zmiana θ o $d\theta$ przesuwa punkt o $r d\theta$. Ten sam pomysł daje element pola $dA = r dr d\theta$ (prostokąt o bokach dr i $r d\theta$), którego użyjemy w lekcji 3.3 Całki podwójne i potrójne.

SYMULACJA 1 Ruchome wersory. Punkt porusza się po okręgu albo po spirali. Przy punkcie widać wersory $\hat{r}, \hat{\theta}$ (na rysunku $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$; obracają się razem z punktem), a także rozkład prędkości i przyspieszenia na składowe. Na spirali pojawia się składowa Coriolisa $2\dot{r}\dot{\theta}$ wzdłuż $\hat{\theta}$ (przerywana). Strzałki $\vec{v}$ i $\vec{a}$ są narysowane w zmniejszonej skali.



— wersory $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ — prędkość v — przyspieszenie a - - - tor

r, θ 1,50; 115°

$v_r = dr/dt$ 0,40

$v_\theta = r\omega$ 1,20

$a_r = d^2r/dt^2 - r\omega^2$ -0,960

$a_\theta = 2\omega \cdot dr/dt$ (ω stałe) 0,640

Stan na rysunku: $t = 2,50$ s, $\omega = 0,80$ rad/s, $r = 1,50$; $a_r = -0,960$, $a_\theta = 0,640$.

[ZADANIA · CZĘŚĆ 1](#)

7 zadań · ok. 45 min

1 Sprawdź, że $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ i że $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$.

2 Punkt porusza się po okręgu o promieniu 2 m, $\theta = 3t$ (t w sekundach). Podaj $\vec{v}$ i $\vec{a}$ we współrzędnych biegunowych.

3 Wyprowadź wzór na $\vec{a}$, różniczkując $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ i używając $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$, $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$.

4 Oblicz gradient $f = x^2 + y^2$ i $g = y/x$ we współrzędnych biegunowych. Porównaj z kartezjańskim wynikiem dla f .

5 Satelita na orbicie eliptycznej wokół pewnej planety ma w perycentrum $r = 7000$ km i prędkość 8 km/s, a w apocentrum $r = 14\,000$ km. Jaka jest prędkość w apocentrum?

6 Zapisz element pola dA we współrzędnych biegunowych i oblicz nim pole koła o promieniu R (całkując po r od 0 do R i po θ od 0 do 2π).

7 Koralek ślizga się bez tarcia po pręcie, który obraca się w płaszczyźnie poziomej ze stałą ω . W płaszczyźnie ruchu siła pręta działa tylko wzdłuż $\hat{\theta}$ (w pionie równoważy ciężar). Pokaż, że $\ddot{r} = \omega^2 r$, i rozwiąż to równanie dla $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$. Jaką siłą pręt działa na koralek o masie m ?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

2 Współrzędne walcowe

W trzech wymiarach najprostsze rozszerzenie to dołożenie do biegunowych zwykłej wysokości z . Odległość od osi z oznaczamy ρ (żeby nie mylić jej z odległością od początku), a kąt azymutalny φ . Uwaga: kąt θ z płaszczyzny nazywa się teraz φ ; litera θ zostaje zarezerwowana dla kąta od osi z we współrzędnych sferycznych.

WSPÓŁRZĘDNE WALCOWE (P ; Φ ; Z)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{atan2}(y, x).$$

Wersory: $\hat{\rho} = [\cos \varphi; \sin \varphi; 0]$, $\hat{\varphi} = [-\sin \varphi; \cos \varphi; 0]$, $\hat{z}$. Przesunięcie: $d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}, \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Walcowe pasują do wszystkiego, co ma oś symetrii: przewodu z prądem, rury, wiru, pręta. Pole elektryczne naładowanego, długiego przewodu jest skierowane wzdłuż $\hat{\rho}$ i maleje jak $1/\rho$ (Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa), a pole magnetyczne przewodu z prądem okrąża go wzdłuż $\hat{\varphi}$ (Dział 15: Prąd i pole magnetyczne). W kartezjańskich byłoby to $\propto \frac{[x; y; 0]}{x^2 + y^2}$ i $\propto \frac{[-y; x; 0]}{x^2 + y^2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

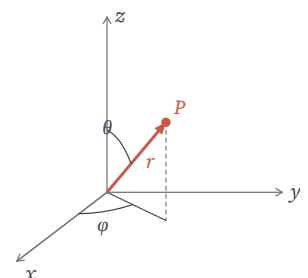
5 zadań · ok. 30 min

- 1 Zamień na walcowe punkt $(1; 1; 1)$, a na kartezjańskie punkt $\rho = 3$, $\varphi = 120^\circ$, $z = -2$.
- 2 Jakie powierzchnie opisują równania $\rho = 2$, $\varphi = 30^\circ$, $z = 5$?
- 3 Oblicz gradient $f = \ln \rho$ i $g = \varphi$. Gdzie te funkcje się pojawiają w fizyce?
- 4 Zapisz wektor $\vec{F} = [-y; x; 0]$ we współrzędnych walcowych. Jak wygląda jego wykres?
- 5 Oblicz objętość walca o promieniu R i wysokości H , całkując $dV = \rho d\rho d\varphi dz$.

▢ ▢ ▢ podstawowe ▢ ▢ ▢ średnie ▢ ▢ ▢ feynmanowskie

3 Współrzędne sferyczne

Gdy jest wyróżniony środek (Słońce, jądro atomu, ładunek punktowy), naturalnym opisem jest odległość od środka r i dwa kąty. Używamy konwencji fizycznej (normy ISO 80000-2): θ to kąt od dodatniej półosi z (kąt biegunowy, od 0 na „biegunie północnym” do π na „południowym”), a φ to azymut, jak w walcowych.



WSPÓŁRZĘDNE SFERYCZNE (R ; Θ ; Φ)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta; \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Równoważnie $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$; np. $\varphi = -74,01^\circ$ to to samo co $285,99^\circ$.

Przesunięcie: $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}, \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Czynniki przy przesunięciach mają prosty sens. Zmiana θ przesuwa punkt po południku, okręgu o promieniu r : łuk $r d\theta$. Zmiana φ przesuwa go po równoleżniku, okręgu o promieniu $r \sin \theta$ (odległość od osi): łuk $r \sin \theta d\varphi$. Równoleżniki kurczą się ku biegunom i stąd $\sin \theta$ w mianowniku gradientu oraz w elemencie objętości. Prostopadłościanik o bokach dr , $r d\theta$, $r \sin \theta d\varphi$ ma objętość $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. (por. Stewart §15.9)

PUŁAPKA · DWIE KONWENCJE

Matematycy (w tym Stewart) często piszą $(\rho; \theta; \varphi)$ z θ jako azymutem i φ jako kątem od osi z , czyli odwrotnie niż fizycy. Wzory są te same po zamianie liter. U Stewarta ρ w sferycznych to odległość od początku (u nas r), a walcowe zapisuje on jako $(r; \theta; z)$. Zawsze sprawdź, który kąt mierzy się od osi z . W tym kursie: θ od osi z , φ azymut.

Wersor $\hat{r} = [\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta]$ wskazuje od środka, $\hat{\theta}$ na „południe” wzdłuż południka, $\hat{\varphi}$ na „wschód” wzdłuż równoleżnika. Geografia używa tego samego układu z dwiema zmianami: szerokość geograficzna to $90^\circ - \theta$ (liczona od równika), a długość to φ (na zachód ujemna).

Przykład 3.1

Warszawa–Nowy Jork

Oblicz odległość po powierzchni Ziemi ($R = 6371$ km) między Warszawą ($52,23^\circ$ N, $21,01^\circ$ E) a Nowym Jorkiem ($40,71^\circ$ N, $74,01^\circ$ W).

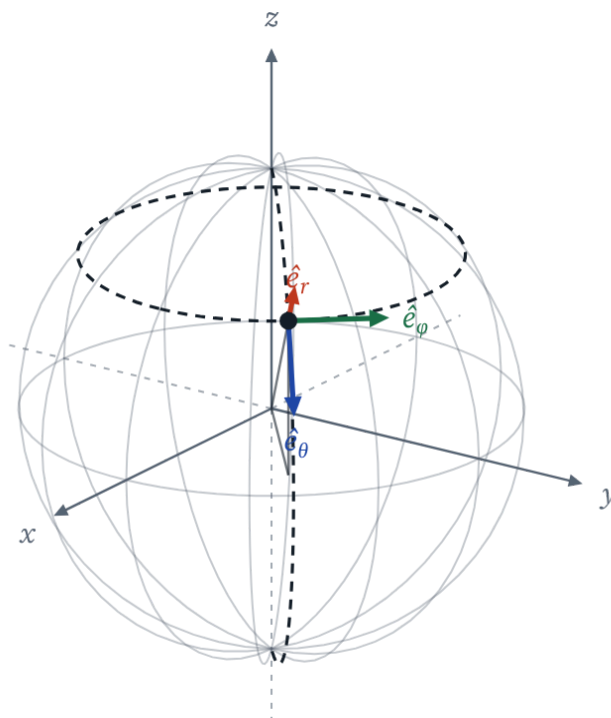
- 1 Wersory $\hat{r}$: dla Warszawy $\theta = 37,77^\circ$, $\varphi = 21,01^\circ$: $\hat{r}_W \approx [0,572; 0,220; 0,790]$. Dla Nowego Jorku $\theta = 49,29^\circ$, $\varphi = -74,01^\circ$: $\hat{r}_N \approx [0,209; -0,729; 0,652]$.
- 2 Kąt między nimi z iloczynu skalarnego (lekcja 1.1 Wektory): $\cos \gamma = \hat{r}_W \cdot \hat{r}_N \approx 0,475$, $\gamma \approx 61,6^\circ \approx 1,076$ rad.
- 3 Najkrótsza droga po kuli to łuk koła wielkiego (o środku w środku Ziemi): $s = R\gamma \approx 6371 \cdot 1,076$.

Wynik: około 6850 km.

Sprawdzenie: cięciwa (tunel przez Ziemię) $R|\hat{r}_W - \hat{r}_N| \approx 6530$ km jest krótsza od łuku, jak powinna. Łuk na mapie nie oznacza nakładania drogi: to płaska mapa zniekształca koło wielkie, które na kuli jest najkrótszą drogą.

SYMULACJA 2

Współrzędne sferyczne w przestrzeni. Zmieniaj r , θ i φ . Przy punkcie widać wersory $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ (na rysunku $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$), a na sferze południk i równoleżnik przez punkt. Zwróć uwagę, jak równoleżnik maleje do zera przy $\theta \rightarrow 0$: dlatego w elemencie objętości stoi $\sin \theta$. Przeciągnij rysunek, żeby obrócić widok.



— $\hat{e}_r$ — $\hat{e}_\theta$ — $\hat{e}_\varphi$ — — południk i równoleżnik

(x; y; z) [1,17; 0,98; 1,29]

promień równoleżnika $r \sin \theta$ 1,532

szerokość geograficzna $90^\circ - \theta$ 40°

czynnik $r^2 \sin \theta$ w dV (jakobian) 3,064

Stan na rysunku: $r = 2,00$, $\theta = 50^\circ$, $\varphi = 40^\circ$; $(x; y; z) = [1,17; 0,98; 1,29]$, promień równoleżnika 1,532.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

8 zadań · ok. 55 min

- 1 Zamień na sferyczne punkty $(1; 1; 1)$, $(-2; 0; 0)$, $(0; 0; -3)$, a na kartezjańskie punkt $r = 2$, $\theta = 60^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

- 2 Jakie powierzchnie opisują $r = 5$, $\theta = 30^\circ$, $\varphi = 0$?
■ ■ ■
- 3 Oblicz gradient energii potencjalnej $U = -\frac{GMm}{r}$ we współrzędnych sferycznych. Jaka jest siła?
■ ■ ■
- 4 Wyraź $\hat{z}$ przez $\hat{r}$ i $\hat{\theta}$, licząc gradient funkcji $f = z = r \cos \theta$ na dwa sposoby.
■ ■ ■
- 5 Z jaką prędkością porusza się Warszawa ($52,23^\circ$ N) wokół osi Ziemi? Długość doby gwiazdowej (obrot względem gwiazd, a nie Słońca) to 86 164 s. Ile wynosi długość równoleżnika Warszawy?
■ ■ ■
- 6 Oblicz pole sfery i objętość kuli, całkując $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ i dV .
■ ■ ■
- 7 Jaka część powierzchni Ziemi leży na północ od koła podbiegunowego ($66,56^\circ$ N)?
■ ■ ■
- 8 Dwa punkty leżą na tym samym równoleżniku $52,23^\circ$ N, 90° długości od siebie. Porównaj drogę wzdłuż równoleżnika z drogą po kole wielkim. Dlaczego samoloty nie lecą wzdłuż równoleżnika?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Błędne intuicje

× „Wersory $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ są stałe jak $\vec{i}$, $\vec{j}$.”

Zmieniają się z położeniem. Różniczkując wektor zapisany w tych wersorach, trzeba różniczkować także wersory. Stąd człony $-r\dot{\theta}^2$ i $2\dot{r}\dot{\theta}$.

× „ $\nabla f = [f_r; f_\theta; f_\varphi]$.”

Nie: kąty to nie długości. Poprawnie $f_r \hat{r} + \frac{1}{r} f_\theta \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} f_\varphi \hat{\varphi}$. Sprawdź wymiary: f_θ ma inną jednostkę niż f_r .

× „ $dV = dr d\theta d\varphi$.”

Brakuje $r^2 \sin \theta$. Bez tego objętość kuli wyszłaby $2\pi^2 R$, z jednostką długości zamiast objętości.

× „Kąt θ w sferycznych to szerokość geograficzna.”

Szerokość to $90^\circ - \theta$. Na równiku $\theta = 90^\circ$, na biegunie północnym $\theta = 0$.

× „Każdy punkt ma jednoznaczne współrzędne sferyczne.”

Na osi z azymut φ jest dowolny, a w zerze dowolne są oba kąty. W tych punktach wzory z $1/(r \sin \theta)$ wymagają ostrożności.

× „Najkrótsza trasa to ta, która na mapie jest odcinkiem prostej.”

Na kuli najkrótsza jest droga po kole wielkim, która na typowej mapie (np. Merkatora) wygląda na łuk (przykład 3.1).

5 Sprawdź się

1 Ile wynosi $d\hat{r}/d\theta$?

$\hat{\theta}$.

2 Co oznacza wyraz $-r\dot{\theta}^2$ w przyspieszeniu?

Przyspieszenie dośrodkowe.

3 Jaka wielkość jest stała przy ruchu w polu siły centralnej?

$r^2\dot{\theta}$ (moment pędu na jednostkę masy); stąd drugie prawo Keplera.

4 Jak wygląda element objętości we współrzędnych walcowych?

$\rho d\rho d\varphi dz$.

5 A w sferycznych?

$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

6 Od czego mierzy się kąt θ w konwencji fizycznej?

Od dodatniej półosi z .

7 Jak obliczyć odległość dwóch miast po powierzchni Ziemi?

$R\gamma$, gdzie $\cos \gamma = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2$.

6 Karta wzorów i co dalej

BIEGUNOWE I WALCOWE

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta; \hat{r} = [\cos \theta; \sin \theta],$$

$$\hat{\theta} = [-\sin \theta; \cos \theta]$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta}$$

$$\text{siła centralna: } r^2 \dot{\theta} = \text{const}$$

$$\nabla f = f_r \hat{r} + \frac{1}{r} f_\theta \hat{\theta}; \quad dA = r dr d\theta$$

$$\text{walcowe: } \nabla f = f_\rho \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} f_\varphi \hat{\varphi} + f_z \hat{z}; \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

SFERYCZNE (θ OD OSI Z)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$$

$$\nabla f = f_r \hat{r} + \frac{1}{r} f_\theta \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} f_\varphi \hat{\varphi}$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi; \quad dA_{\text{sfer}} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\text{geografia: szerokość} = 90^\circ - \theta, \text{ długość} = \varphi$$

$$\text{koło wielkie: } s = R\gamma, \quad \cos \gamma = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2$$

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- J. Stewart, *Multivariable Calculus*: §10.3 (współrzędne biegunowe), §15.8 i §15.9 (całki potrójne we współrzędnych walcowych i sferycznych). Uwaga na konwencję kątów.
- K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*: współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne oraz ich elementy pola i objętości.

Elementy $r dr d\theta$ i $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ to jakobiany, z których korzysta lekcja 3.3 Całki podwójne i potrójne (całki wielokrotne). Dywergencja i rotacja w tych współrzędnych pojawią się w 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja, a prawo Gaussa dla ładunku punktowego i naładowanego przewodu (Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa) oraz prawo Ampère'a dla przewodu z prądem (Dział 15: Prąd i pole magnetyczne). Wzór na przyspieszenie we współrzędnych biegunowych to punkt wyjścia do równania orbity (Dział 5: Grawitacja i orbity). Kąty opisujące położenie orbity w przestrzeni (nachylenie, długość węzła) to w istocie kąty sferyczne kierunku momentu pędu (2 Elementy orbitalne i równanie Keplera).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $-\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$. $\frac{d}{d\theta} [\cos \theta; \sin \theta] = [-\sin \theta; \cos \theta] = \hat{\theta}$.
2. $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 3$: $\vec{v} = 6 \hat{\theta}$ m/s, $\vec{a} = -18 \hat{r}$ m/s² (czysto dośrodkowe, $v^2/r = 36/2 \checkmark$).
3. $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + r\ddot{\theta}(-\hat{r})$. Zbierając: $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$. Dwójka przy $\dot{r}\dot{\theta}$ bierze się z dwóch różnych miejsc.
4. $f = r^2$: $\nabla f = 2r \hat{r}$, czyli $2\vec{r} = [2x; 2y] \checkmark$. $g = \tan \theta$: $\nabla g = \frac{1}{r \cos^2 \theta} \hat{\theta}$.
5. $7000 \cdot 8 = 14\,000 \cdot v$, więc $v = 4$ km/s.
6. $dA = r dr d\theta$; $\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \checkmark$.
7. Składowa $\hat{r}$ siły jest zerowa: $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$. Rozwiązanie: $r = r_0 \cosh \omega t$ (funkcje hiperboliczne z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne). Siła: $m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 2m\omega\dot{r} = 2m\omega^2 r_0 \sinh \omega t$, wzdłuż $\hat{\theta}$.

Zadania • część 2

1. $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$, $z = 1$. $(-1,5; 2,60; -2)$.
2. Walec o osi z i promieniu 2; półpłaszczyzna zawierająca oś z ; płaszczyzna pozioma.
3. $\nabla \ln \rho = \frac{1}{\rho} \hat{\rho}$: tak maleje pole elektryczne przewodu (potencjał przewodu jest proporcjonalny do $-\ln \rho$). $\nabla \varphi = \frac{1}{\rho} \hat{\varphi}$: kształt pola magnetycznego przewodu z prądem i prędkości w wirze potencjalnym (φ nie jest jednoznaczna funkcją, bo po obejściu osi rośnie o 2π).
4. $[-y; x; 0] = \rho[-\sin \varphi; \cos \varphi; 0] = \rho \hat{\varphi}$. Wiry wokół osi z , coraz szybsze z odległością, jak w obracającej się bryle sztywnej.
5. $\frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot H = \pi R^2 H \checkmark$.

Zadania • część 3

1. $r = \sqrt{3}$, $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,7^\circ$, $\varphi = 45^\circ$. $r = 2$, $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 180^\circ$. $r = 3$, $\theta = 180^\circ$, φ dowolne (na osi z azymut nie jest określony). $(0; \sqrt{3}; 1)$.
2. Sfera; górna połowa stożka o wierzchołku w zerze i osi z (półkął rozwarcia 30° , nad płaszczyzną xy); półpłaszczyzna xz z $x > 0$.
3. $\nabla U = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$, więc $\vec{F} = -\nabla U = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$: prawo powszechnego ciążenia, jedną liniijką.
4. Kartezjańsko $\nabla z = \hat{z}$. Sferycznie: $f_r = \cos \theta$, $\frac{1}{r} f_\theta = -\sin \theta$, więc $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$.
5. Promień równoleżnika $R \sin \theta = R \cos(52,23^\circ) \approx 3902$ km, obwód $\approx 24\,500$ km, prędkość ≈ 285 m/s (na równiku 465 m/s).
6. $R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R^2$. $\int_0^R r^2 dr \cdot 4\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \checkmark$.
7. $\theta_0 = 23,44^\circ$, $\frac{1-\cos \theta_0}{2} \approx 0,041$, czyli około 4% (ok. 21 mln km²).

8. Po równoleżniku: ćwierć obwodu $24\,500/4 \approx 6130$ km. Po kole wielkim: $\cos \gamma = \sin^2(52,23^\circ)$ (tu szerokość!) daje $\gamma \approx 51,3^\circ$, $s \approx 5710$ km, o 420 km mniej. Równoleżnik (poza równikiem) nie jest kołem wielkim, więc nie jest najkrótszą drogą.

Matematyka · Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne. Źródła: J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7, §10.3, §15.8, §15.9; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.