

Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych

W lekcji 1.4 poznałeś pochodne cząstkowe i gradient. Tu robimy z nich narzędzia. Reguła łańcuchowa mówi, jak szybko zmienia się temperatura, którą czuje termometr niesiony przez wiatr. Test drugiej pochodnej odróżnia dno doliny od przełęczy, czyli równowagę trwałą od nietrwałej. Mnożniki Lagrange'a rozwiązują problemy z więzami: najtańsza puszka o danej objętości, najbliższy punkt płaszczyzny, rozkład, który maksymalizuje entropię. Wszystkie trzy narzędzia zaczynają się od jednego faktu: w pierwszym przybliżeniu zmiana funkcji to iloczyn skalarny gradientu z przesunięciem.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

21 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

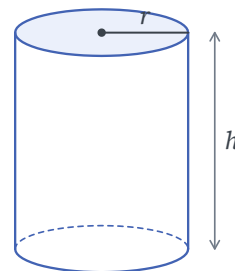
J. Stewart, *Multivariable Calculus*, §14.5, §14.7, §14.8; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: najtańsza pushka
- 1 Reguła łańcuchowa
- 2 Ekstrema bez więzów
- 3 Ekstrema z więzami: mnożniki Lagrange'a
- 4 Błędne intuicje
- 5 Sprawdź się
- 6 Karta wzorów i co dalej

Prolog: najtańsza puszka

Producent napojów chce puszkę o objętości 330 ml, zużywającą jak najmniej blachy. Puszka to walec o promieniu r i wysokości h . Pole powierzchni (blacha) to $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$: dwa denka i płaszcz. Objętość $V = \pi r^2 h$ jest ustalona.



W lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce rozwiązalibyśmy to tak: z warunku na objętość wyznaczamy $h = V/(\pi r^2)$, wstawiamy do A i szukamy minimum funkcji jednej zmiennej. Wychodzi $h = 2r$: najtańsza puszka jest tak wysoka, jak szeroka. Tymczasem prawdziwe puszki są wyraźnie wyższe niż szerokie (zmiierz swoją). Czy producenci nie umieją liczyć?

Pytanie na start. Co trzeba zmienić w modelu, żeby wyszła puszka wyższa niż szeroka? Odpowiedź: weź puszkę do ręki i porównaj sztywność denka i ścianki. Odpowiedź w przykładzie 3.1.

Wyznaczenie jednej zmiennej z warunku działa tu, bo warunek jest prosty. Przy trudniejszych więzach (punkt na elipsoidzie, kilka warunków naraz) przestaje działać. Część 3 da metodę, która działa także przy trudnych więzach i przy okazji mówi, ile kosztuje każdy dodatkowy mililitr. Najpierw jednak dwa narzędzia, na których ta metoda stoi.

Reguła łańcuchowa

W lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce zmiana funkcji przy małym przesunięciu $d\vec{r} = [dx; dy]$ to różniczka zupełna $df = f_x dx + f_y dy = \nabla f \cdot d\vec{r}$ (piszemy krótko $f_x = \partial f / \partial x$). Jeśli punkt porusza się po krzywej $\vec{r}(t) = [x(t); y(t)]$, to w czasie dt przesuwa się o $d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt$. Dzieląc przez dt :

REGUŁA ŁAŃCUCHOWA (WIELE ZMIENNYCH)

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\vec{r}}.$$

Każda zmienna wnosi swój wkład: pochodną f po tej zmiennej razy tempo zmiany zmiennej. Dla funkcji trzech zmiennych dochodzi trzeci wyraz. por. Stewart §14.5

Słownie: tempo zmian f odczuwane przez poruszający się punkt to składowa gradientu wzdłuż ruchu razy szybkość. Ruch wzdłuż poziomicy ($\dot{\vec{r}} \perp \nabla f$) nie zmienia f .

Przykład 1.1

Robot na gorącej płycie

Temperatura płyty to $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$ ($^{\circ}\text{C}$, metry; przykład 4.1 z lekcji 1.4). Mały robot pomiarowy jeździ po okręgu $\vec{r}(t) = [3 \cos t; 3 \sin t]$ (czas w sekundach). Jak szybko zmienia się temperatura, którą mierzy?

- 1 $\nabla T = [-2x; -4y]$, $\dot{\vec{r}} = [-3 \sin t; 3 \cos t]$.
- 2 $\frac{dT}{dt} = (-2x)(-3 \sin t) + (-4y)(3 \cos t) = 18 \cos t \sin t - 36 \sin t \cos t = -9 \sin 2t$.

Wynik: $\frac{dT}{dt} = -9 \sin 2t$ $^{\circ}\text{C/s}$; najszybszy spadek, 9 $^{\circ}\text{C/s}$, dla $t = \pi/4$ i $t = 5\pi/4$.

Sprawdzenie: wprost $T(t) = 100 - 9 \cos^2 t - 18 \sin^2 t = 91 - 9 \sin^2 t$, a $\frac{d}{dt}(91 - 9 \sin^2 t) = -18 \sin t \cos t = -9 \sin 2t$ ✓. Temperatura jest najwyższa na osi x ($t = 0$, 91 $^{\circ}\text{C}$) i najniższa na osi y (82 $^{\circ}\text{C}$), bo w kierunku y płyta stygnie szybciej.

1.1 Pochodna substancjalna

Jeśli pole zmienia się także w czasie, $T(x, t)$, to dochodzi wyraz od jawnej zależności od t . Dla punktu poruszającego się z prędkością $v = \dot{x}$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{w 3D: } \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T).$$

To **pochodna substancjalna** (inaczej materialna albo wędrowna): zmiana odczuwana przez obiekt niesiony z prądem. Pierwszy wyraz to zmiana lokalna (w ustalonym miejscu), drugi to wyraz konwekcyjny, skutek przemieszczania się w polu. Ten sam wzór opisuje przyspieszenie cząstki płynu (Dział 10: Płyiny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne) i transport ciepła.

Przykład 1.2

Rano na autostradzie

Rano temperatura rośnie wszędzie o $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ na godzinę, a na północ (oś x) spada o $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ na każde 100 km. Samochód jedzie na północ z prędkością 90 km/h. Jak zmienia się temperatura za oknem?

1 $\partial T/\partial t = 2\text{ }^{\circ}\text{C/h}$, $\partial T/\partial x = -0,06\text{ }^{\circ}\text{C/km}$, $v = 90\text{ km/h}$.

2 $dT/dt = 2 + 90 \cdot (-0,06) = 2 - 5,4 = -3,4\text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

Wynik: kierowca widzi spadek o $3,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ na godzinę, choć w każdym ustalonym miejscu robi się cieplej.

Sprawdzenie: jednostki: $\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{km}} = \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}} \checkmark$. Samochód stojący ($v = 0$) zobaczyłby $+2\text{ }^{\circ}\text{C/h} \checkmark$.

1.2 Zmiana zmiennych i funkcje uwikłane

Ta sama reguła działa, gdy x i y zależą od kilku nowych zmiennych. Dla współrzędnych biegunowych $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne):

$$\frac{\partial f}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta.$$

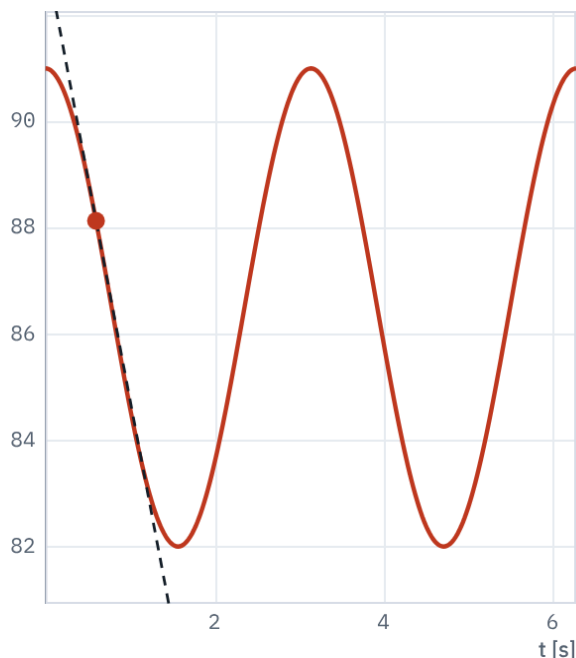
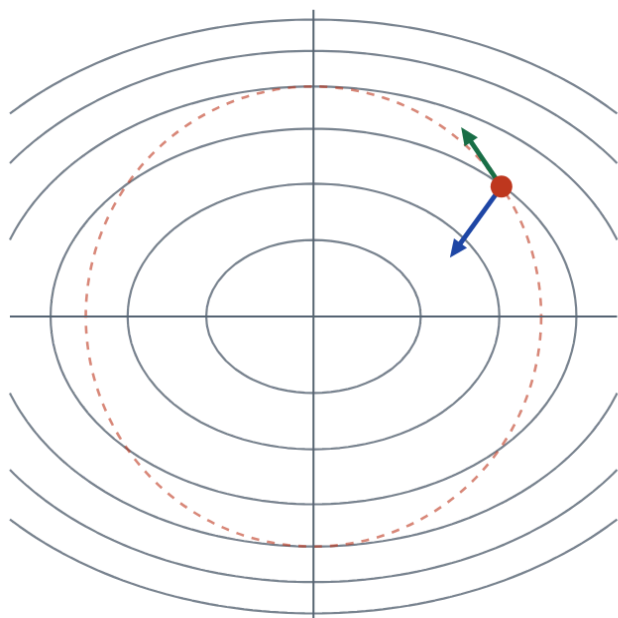
To narzędzie lekcji 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne. Drugi ważny przypadek to **funkcja uwikłana**: funkcja $y(x)$ zadana równaniem $F(x, y) = 0$, czyli krzywa. Wzdłuż krzywej F się nie zmienia, więc $F_x dx + F_y dy = 0$, czyli

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (F_y \neq 0).$$

Dla okręgu $x^2 + y^2 = 25$ w punkcie $(3; 4)$: $dy/dx = -\frac{2x}{2y} = -\frac{3}{4}$, bez rozwiązywania względem y . Ten sam pomysł daje wzory termodynamiki, gdzie p, V, T wiąże równanie stanu (Dział 9: Termodynamika i entropia).

SYMULACJA 1

Punkt porusza się po okręgu na mapie temperatury z przykładu 1.1. Obok (na wąskim ekranie pod mapą): temperatura odczuwana przez punkt w funkcji czasu. Strzałki pokazują gradient i prędkość; ich iloczyn skalarny to nachylenie wykresu. Gdy prędkość jest prostopadła do gradientu (styczna do poziomic), wykres ma ekstremum.



— poziomic T — ∇T — prędkość — $T(t)$ wzdłuż drogi

T 88,13 °C

∇T [-4,95; -6,78]

prędkość [-1,69; 2,48]

$dT/dt = \nabla T \cdot v$ -8,39 °C/s

Stan na rysunku: $R = 3,0$ m, $t = 0,60$ s; $T = 88,13$ °C, $dT/dt = \nabla T \cdot v = -8,39$ °C/s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

7 zadań · ok. 45 min

- 1 Dla $f(x, y) = x^2 y$ i $x = t^2, y = \sin t$ oblicz df/dt regułą łańcuchową i wprost.
- 2 Znajdź dy/dx dla krzywej $x^3 + y^3 = 9$ w punkcie (1; 2).
- 3 Sprawdź wzór na $\partial f/\partial r$ dla $f = x^2 + y^2$. Ile wynosi $\partial f/\partial \theta$ i dlaczego?
- 4 Gaz doskonały: $pV = nRT$. Wyznacz $(\frac{\partial V}{\partial T})_p$, $(\frac{\partial T}{\partial p})_V$, $(\frac{\partial p}{\partial V})_T$ i pokaż, że ich iloczyn to -1.
- 5 Balon meteorologiczny wznosi się z prędkością 5 m/s. Temperatura spada z wysokością o 6,5 °C/km, a w ustalonym miejscu rośnie o 1 °C/h. Jak zmienia się temperatura mierzona przez balon (w °C/h)?

- 6 Wysokość terenu to $z = f(x, y)$. Turysta idzie po trasie $\vec{r}(t)$. Kiedy idzie po płaskim, kiedy pod górę? Zapisz warunek przez ∇f i $\dot{\vec{r}}$.

- 7 Funkcja f jest jednorodna stopnia k : $f(sx, sy) = s^k f(x, y)$ dla każdego $s > 0$.
Różniczkując po s w $s = 1$, pokaż wzór Eulera $xf_x + yf_y = kf$. Sprawdź dla $f = x^2y + y^3$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Ekstrema bez więzów

W jednej zmiennej ekstremum gładkiej funkcji wymagało $f'(x) = 0$ (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). W wielu zmiennych: jeśli f ma w punkcie wewnętrznym maksimum lub minimum, to przesunięcie w żadnym kierunku nie zmienia f w pierwszym rzędzie, czyli $\nabla f \cdot d\vec{r} = 0$ dla każdego $d\vec{r}$. To możliwe tylko wtedy, gdy

$$\nabla f = \vec{0}.$$

Taki punkt nazywamy **stacjonarnym** (u Stewarta: krytycznym). Jak w jednej zmiennej, warunek jest konieczny, ale nie wystarcza. W dwóch wymiarach pojawia się nowa możliwość: **punkt siodłowy**, w którym w jednym kierunku jest minimum, a w innym maksimum, jak na przełęczy górskiej.

2.1 Test drugiej pochodnej

O tym, co dzieje się w punkcie stacjonarnym, decydują drugie pochodne. Zastosujmy wzór Taylora z lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce do funkcji jednej zmiennej $\varphi(s) = f(x_0 + s dx, y_0 + s dy)$. Z reguły łańcuchowej $\varphi'(0) = \nabla f \cdot [dx; dy] = 0$ i $\varphi''(0) = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$, więc

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} (f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2).$$

Wyrazy drugiego rzędu układają się w **macierz Hessego** (hesjan) $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$, symetryczną z twierdzenia Schwarz'a. Znak nawiasu dla wszystkich kierunków rozstrzyga:

🔧 TEST DRUGIEJ POCHODNEJ (DWIE ZMIENNE)

W punkcie stacjonarnym niech $D = \det H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

- $D > 0$ i $f_{xx} > 0$: **minimum lokalne**;
- $D > 0$ i $f_{xx} < 0$: **maksimum lokalne**;
- $D < 0$: **punkt siodłowy**;
- $D = 0$: test nie rozstrzyga. (por. Stewart §14.7)

Skąd to? D to iloczyn, a $f_{xx} + f_{yy}$ to suma wartości własnych H (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne). Minimum to dno doliny: f rośnie we wszystkich kierunkach, czyli obie wartości własne są dodatnie. Wtedy $D > 0$, a suma $f_{xx} + f_{yy} > 0$. Gdy $D > 0$, mamy $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2 \geq 0$, więc f_{xx} i f_{yy} mają ten sam znak co ich suma; dlatego wystarczy sprawdzić znak f_{xx} . Maksimum: obie ujemne. Siodło: różne znaki, więc $D < 0$. Kierunki własne H to osie główne doliny lub przełęczy. W fizyce minimum energii potencjalnej to równowaga trwała, a siodło to równowaga nietrwała, z której układ ucieka wzdłuż wektora własnego o ujemnej wartości własnej.

Przykład 2.1

Minimum funkcji kwadratowej

Znajdź i sklasyfikuj punkty stacjonarne $f = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

- 1 $f_x = 2x + y - 3 = 0$, $f_y = x + 2y = 0$: $x = 2$, $y = -1$.
- 2 $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = 3 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.

Wynik: minimum w $(2; -1)$, $f = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

Sprawdzenie: wartości własne H to 3 i 1 (ta sama macierz co w lekcji 2.3), obie dodatnie ✓. Próbný punkt $(2; 0)$: $f = 4 + 0 + 0 - 6 = -2 > -3$ ✓.

Przykład 2.2

Minimum i siodło

Sklasyfikuj punkty stacjonarne $f = x^3 - 3x + y^2$.

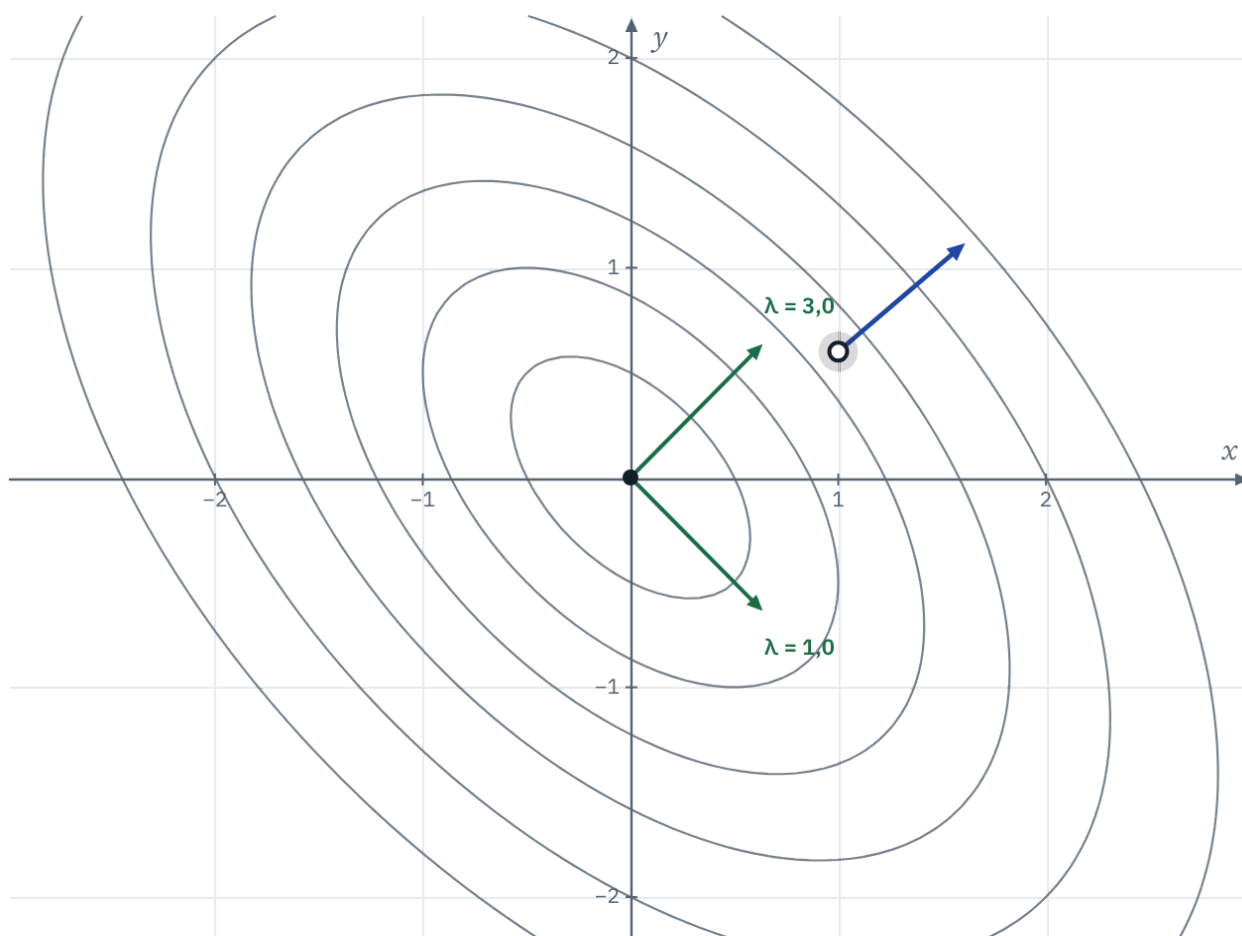
- 1 $f_x = 3x^2 - 3 = 0, f_y = 2y = 0$: punkty $(1; 0)$ i $(-1; 0)$.
- 2 $f_{xx} = 6x, f_{yy} = 2, f_{xy} = 0$. W $(1; 0)$: $D = 12 > 0, f_{xx} = 6 > 0$. W $(-1; 0)$: $D = -12 < 0$.

Wynik: minimum lokalne $f(1; 0) = -2$ i siodło w $(-1; 0), f = 2$.

Sprawdzenie: wzdłuż osi x w pobliżu $x = -1$ funkcja $x^3 - 3x$ ma maksimum, a wzdłuż y funkcja y^2 ma minimum: dokładnie siodło ✓. Minimum jest tylko lokalne, bo dla $x \rightarrow -\infty, f \rightarrow -\infty$.

SYMULACJA 2

Mapa poziomice w pobliżu punktu stacjonarnego. Wybierz funkcję: dolina (minimum), szczyt (maksimum), przełęcz (siodło) albo przypadek $D = 0$. Przeciągaj punkt i patrz na gradient: w punkcie stacjonarnym znika. Zielone strzałki to kierunki własne hesjanu.



— poziomice f ∇f kierunki własne H

f w punkcie 1,960

∇f [2,60; 2,20]

H w (0; 0) (2 1 | 1 2)

$D = \det H$ 3

w (0; 0) minimum

Dolina: obie wartości własne H dodatnie, $D > 0$, f rośnie w każdym kierunku od zera.

Stan na rysunku: $f = x^2 + xy + y^2$, punkt [1,00; 0,60], $\nabla f = [2,60; 2,20]$; w (0; 0): minimum ($D = 3$).

2.2 Najmniejsze kwadraty

Ważne zastosowanie: dopasowanie prostej do pomiarów. Dla punktów $(x_i; y_i)$ szukamy prostej $y = ax + b$, dla której suma kwadratów odchyleń

$$S(a, b) = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2$$

jest najmniejsza. S jest funkcją dwóch zmiennych a, b . Warunek $\partial S/\partial a = \partial S/\partial b = 0$ daje układ liniowy (równania normalne):

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i, \quad a \sum x_i + b n = \sum y_i.$$

Dla punktów $(0; 1), (1; 3), (2; 4), (3; 6)$: $\sum x_i = 6, \sum x_i^2 = 14, \sum y_i = 14, \sum x_i y_i = 29$, więc $14a + 6b = 29, 6a + 4b = 14$ i $a = 1,6, b = 1,1$. Hesjan S to $2 \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}$, z dodatnim wyznacznikiem, gdy nie wszystkie x_i są równe, więc to rzeczywiście minimum. Statystykę takiego dopasowania omawia lekcja 5.2 Statystyka pomiarów i dopasowania.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

7 zadań · ok. 50 min

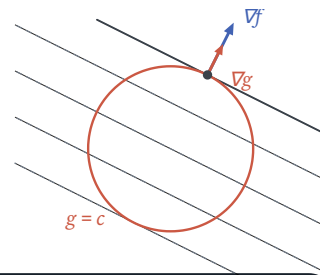
- 1 Sklasyfikuj punkt stacjonarny $(0; 0)$ funkcji $x^2 + 3y^2, -x^2 - y^2, x^2 - y^2, xy$.
■ ■ ■
- 2 Znajdź punkty stacjonarne $f = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$ i ich charakter.
■ ■ ■
- 3 Cząstka porusza się w płaszczyźnie z energią potencjalną $U = x^2 - xy + y^2 - x$ (jednostki umowne). Znajdź położenie równowagi. Czy jest trwała?
■ ■ ■
- 4 Funkcje $x^4 + y^4, -x^4 - y^4$ i $x^4 - y^4$ mają w $(0; 0)$ punkt stacjonarny z $D = 0$. Co tam mają naprawdę?
■ ■ ■
- 5 Sprawdź dopasowanie prostej z części 2.2: oblicz S dla $a = 1,6, b = 1,1$ i dla prostej przez pierwszy i ostatni punkt.
■ ■ ■
- 6 Znajdź największą i najmniejszą wartość $f = x^2 + y^2 - x$ na kwadracie $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
■ ■ ■
- 7 Pokaż, że dla punktów $(x_i; y_i)$ prosta najmniejszych kwadratów przechodzi przez punkt średni $(\bar{x}; \bar{y})$.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Ekstrema z więzami: mnożniki Lagrange'a

Szukamy ekstremum $f(x, y)$, ale tylko wśród punktów, które spełniają warunek (więź) $g(x, y) = c$. Punkty te tworzą krzywą. Idźmy wzdłuż niej i patrzmy na poziomice f . Jeśli krzywa przecina

poziomicę pod kątem, to idąc dalej, przejdziemy na wyższą poziomicę, a cofając się, na niższą: to nie jest ekstremum. Ekstremum może być tylko tam, gdzie krzywa więzów **dotyka** poziomicę f . A tam obie krzywe mają wspólną styczną, więc ich normalne ∇f i ∇g są równoległe.



🔑 METODA MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A

Jeśli f i g mają ciągłe pochodne, a f ma ekstremum lokalne na zbiorze $g(x, y, z) = c$ w punkcie, w którym $\nabla g \neq \vec{0}$, to dla pewnej liczby λ

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = c.$$

Dla n zmiennych to układ $n + 1$ równań z $n + 1$ niewiadomymi (dla trzech: x, y, z, λ). Liczba λ to **mnożnik Lagrange'a**. Przy kilku więzach: $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots$

por. Stewart §14.8

Mnożnik ma sens: $\lambda = \frac{df^*}{dc}$, gdzie $f^*(c)$ to wartość ekstremalna przy więzie $g = c$. Mówi, o ile zmieni się najlepszy wynik, gdy więz poluzujemy o jednostkę. W ekonomii to „cena ukryta”, w mechanice $\lambda \nabla g$ to siła reakcji więzów, a w fizyce statystycznej mnożniki przy więzach na energię i liczbę cząstek okazują się związane z temperaturą i potencjałem chemicznym (Dział 9: Termodynamika i entropia).

Przykład 3.1

Puszka z prologu

Zminimalizuj $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ przy $V = \pi r^2 h = 330 \text{ cm}^3$. Potem uwzględnij, że denka są c razy grubsze niż ścianka: $A_c = 2c\pi r^2 + 2\pi rh$.

- 1 $\nabla A = [4\pi r + 2\pi h; 2\pi r]$, $\nabla V = [2\pi rh; \pi r^2]$.
- 2 Druga składowa: $2\pi r = \lambda \pi r^2$, więc $\lambda = 2/r$. Pierwsza: $4\pi r + 2\pi h = \frac{2}{r} \cdot 2\pi rh = 4\pi h$, więc $h = 2r$.
- 3 Z więzu: $2\pi r^3 = 330$, $r = \sqrt[3]{330/(2\pi)} \approx 3,74 \text{ cm}$, $h \approx 7,49 \text{ cm}$, $A = 6\pi r^2 \approx 264 \text{ cm}^2$.
- 4 Z grubszymi denkami ten sam rachunek daje $h = 2cr$. Dla $c = 2$: $r \approx 2,97 \text{ cm}$, $h \approx 11,9 \text{ cm}$.

Wynik: przy jednakowej blasze $h = 2r$ (wysokość równa średnicy). Grubsze denka (muszą wytrzymać ciśnienie i otwieranie) wydłużają optymalną puszkę: $h = 2cr$. Model z $c \approx 2$ daje kształt bliski prawdziwej puszcze, choć w praktyce liczą się też ergonomia, transport i tradycja.

Sprawdzenie: $\lambda = 2/r \approx 0,534 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$. Wprost: najmniejsze pole w funkcji objętości to $A^*(V) = 3(2\pi)^{1/3}V^{2/3}$, a jego pochodna w $V = 330$ wynosi $0,534 \checkmark$. Każdy dodatkowy mililitr kosztuje około pół centymetra kwadratowego blachy.

Przykład 3.2

Najbliższy punkt płaszczyzny

Znajdź punkt płaszczyzny $x + 2y + 2z = 9$ najbliższy początkowi układu.

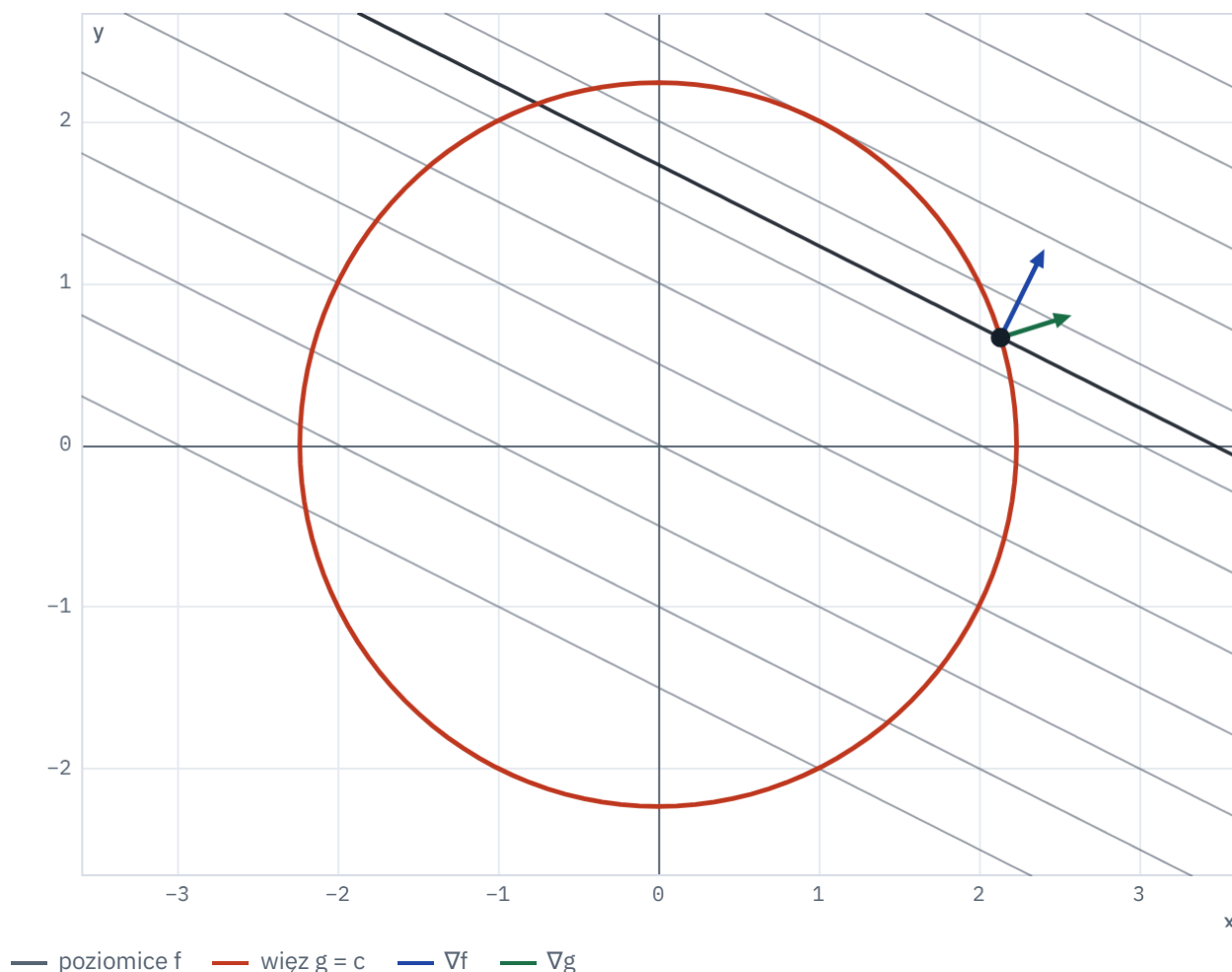
- 1 Minimalizujemy kwadrat odległości $f = x^2 + y^2 + z^2$ (prostszy niż pierwiastek, to samo minimum) przy $g = x + 2y + 2z = 9$.
- 2 $\nabla f = 2[x; y; z] = \lambda[1; 2; 2]$: punkt leży na prostej $[x; y; z] = s[1; 2; 2]$.
- 3 Więź: $s + 4s + 4s = 9$, $s = 1$: punkt $(1; 2; 2)$.

Wynik: $(1; 2; 2)$, odległość 3.

Sprawdzenie: $(1; 2; 2)$ spełnia równanie płaszczyzny ($1 + 4 + 4 = 9$), a wektor do niego jest równoległy do normalnej $[1; 2; 2]$. Odległość to rzut dowolnego punktu płaszczyzny, np. $(9; 0; 0)$, na normalną jednostkową: $9/\sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \checkmark$ (uogólnienie wzoru na odległość punktu od prostej z lekcji 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe). Geometrycznie: najkrótsza droga do płaszczyzny biegnie wzdłuż jej normalnej, czyli ∇g .

SYMULACJA 3

Poziomice funkcji f i krzywa więzów $g = c$. Przesuwaj punkt wzdłuż krzywej. Strzałki to ∇f i ∇g ; mają stałą długość i pokazują tylko kierunek. W ekstremum są równoległe, a krzywa więzów dotyka poziomicy. Odczyt pokazuje wtedy λ , czyli ile razy ∇f jest dłuższy od ∇g (ze znakiem).



punkt $[2,14; 0,66]$

f 3,458

kąt między ∇f a ∇g 46,2°

λ (gdy równoległe) –

Krzywa więzów przecina poziomice f pod kątem: przesuwając się wzdłuż niej, w jedną stronę zwiększasz f , w drugą zmniejszasz.

Stan na rysunku: $f = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$; punkt $[2,14; 0,66]$, $f = 3,458$, kąt między ∇f a ∇g 46,2°.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

7 zadań · ok. 55 min

1 Znajdź największą wartość xy przy $x + y = 10$ metodą Lagrange'a i podstawianiem.

2 Znajdź największą i najmniejszą wartość $f = x + 2y$ na okręgu $x^2 + y^2 = 5$.

- 3 Prostokątne pudełko bez wieczka ma objętość 32. Jakie wymiary minimalizują zużycie materiału?
- 4 Wpisz w elipsę $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ prostokąt o bokach równoległych do osi i największym polu.
- 5 Sprawdź interpretację λ w zadaniu 3.1: zastąp warunek przez $x + y = c$, znajdź $f^*(c)$ i porównaj df^*/dc z λ .
- 6 Gdzie na hiperboli $xy = 1$ (dla $x > 0$) leży punkt najbliższy początkowi układu?
- 7 Zdarzenie ma n możliwych wyników z prawdopodobieństwami $p_1, \dots, p_n$. Znajdź rozkład o największej entropii $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ przy $\sum_i p_i = 1$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Błędne intuicje

✗ „ $\nabla f = \vec{0}$, więc mamy ekstremum.”

Albo siodło. W wielu wymiarach siodła są typowe: $x^2 - y^2$ ma $\nabla f = \vec{0}$ w zerze i nie ma tam ani minimum, ani maksimum.

✗ „Wystarczy sprawdzić f_{xx} i f_{yy} .”

Nie: $f = x^2 + 3xy + y^2$ ma $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$, a $D = 4 - 9 < 0$, więc w zerze jest siodło. Wzdłuż prostej $y = -x$ funkcja to $-x^2$.

✗ „ $D = 0$ znaczy, że nie ma ekstremum.”

Znaczy tylko, że test nie rozstrzyga. $x^4 + y^4$ ma $D = 0$ i ewidentne minimum.

✗ „Ekstremum na zbiorze to zawsze punkt stacjonarny.”

Na zbiorze domkniętym i ograniczonym (np. kwadracie) ekstremum może leżeć na brzegu, gdzie gradient wcale nie znika (maksimum w zadaniu 2.6). Trzeba osobno zbadać brzeg.

× „Równania Lagrange'a dają od razu maksimum.”

Dają kandydatów: maksima, minima i punkty, w których krzywa więzów dotyka poziomicy, ale nie jest ekstremum. Trzeba porównać wartości (zadanie 3.2: $+5$ i -5).

× „Pochodne cząstkowe można skracać jak ułamki.”

Nie można: w zadaniu 1.4 iloczyn trzech „ułamków”, które pozornie się skracają, daje -1 . Zawsze pamiętaj, która zmienna jest trzymana jako stała.

5 Sprawdź się

1 Jak zapisać df/dt dla $f(x(t), y(t))$ przez gradient?

$$\nabla f \cdot \dot{\vec{r}}.$$

2 Co mierzy pochodna substancjalna?

Zmianę wielkości odczuwaną przez obiekt poruszający się w polu: $\partial T/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla T$.

3 Jaki warunek spełnia punkt stacjonarny?

$$\nabla f = \vec{0}.$$

4 Co oznacza $D < 0$ w teście drugiej pochodnej?

Punkt siodłowy.

5 Jaki jest geometryczny sens warunku $\nabla f = \lambda \nabla g$?

Krzywa (powierzchnia) więzów jest styczna do poziomicy f .

6 Co mówi wartość mnożnika λ ?

O ile zmienia się wartość ekstremalna przy zmianie więzu o jednostkę: $\lambda = df^*/dc$.

7 Gdzie jeszcze trzeba szukać ekstremum funkcji na zbiorze domkniętym?

Na brzegu zbioru.

REGUŁA ŁAŃCUCHOWA

$$\frac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \nabla f \cdot \dot{\vec{r}} = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z}$$

$$\text{substancjalna: } \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T$$

$$\text{biegunowe: } f_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$\text{uwikłana } F(x, y) = 0: \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\partial \text{ się nie skraca: } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -1$$

EKSTREMA

punkt stacjonarny: $\nabla f = \vec{0}$

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2: D > 0, f_{xx} > 0 \text{ min;}$$

$$D > 0, f_{xx} < 0 \text{ max; } D < 0 \text{ siodło; } D = 0 \text{ ?}$$

zbiór domknięty i ograniczony: wewnątrz + brzeg + wierzchołki

$$\text{więzy: } \nabla f = \lambda \nabla g, g = c; \lambda = df^*/dc$$

$$\text{najmniejsze kwadraty: } \partial S / \partial a = \partial S / \partial b = 0$$

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- J. Stewart, *Multivariable Calculus*: §14.5 (reguła łańcuchowa, funkcje uwikłane), §14.7 (ekstrema, test drugiej pochodnej, ekstrema na zbiorach domkniętych), §14.8 (mnożniki Lagrange'a, także z dwoma więzami).
- K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*: rozdziały o pochodnych cząstkowych i ekstremach funkcji dwóch zmiennych.

Reguła łańcuchowa da w lekcji 3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne gradient we współrzędnych biegunowych i sferycznych, a w 3.3 Całki podwójne i potrójne jacobian. Szukanie ekstremum funkcji wielu zmiennych przejdzie w rachunku wariacyjnym (6.1 Rachunek wariacyjny) w szukanie ekstremum funkcjonatu, czyli całej krzywej, a mnożniki Lagrange'a wrócą tam przy więzach. Test drugiej pochodnej to w fizyce stabilność równowagi, a przy układach dynamicznych stabilność punktów stałych (4.6 Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $2xy \cdot 2t + x^2 \cos t = 4t^3 \sin t + t^4 \cos t$. Wprost: $\frac{d}{dt}(t^4 \sin t)$ daje to samo.
- $-\frac{3x^2}{3y^2} = -\frac{1}{4}$.
- $2x \cos \theta + 2y \sin \theta = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r \checkmark$ (bo $f = r^2$). $\partial f / \partial \theta = -2xr \sin \theta + 2yr \cos \theta = 0$: f jest stała na okręgach.
- $\frac{nR}{p} \cdot \frac{V}{nR} \cdot \left(-\frac{nRT}{V^2}\right) = -\frac{nRT}{pV} = -1$.
- $v = 18 \text{ km/h}$, więc $1 + 18 \cdot (-6,5) = -116 \text{ °C/h}$, czyli około $-1,9 \text{ °C/min}$. Efekt ruchu całkowicie dominuje.
- $\dot{z} = \nabla f \cdot \vec{r}$: płasko, gdy $\vec{r} \perp \nabla f$ (idzie po poziomicy); pod górę, gdy $\nabla f \cdot \vec{r} > 0$ (kąt z gradientem mniejszy niż 90°).
- Lewa strona po s : $xf_x(sx, sy) + yf_y(sx, sy)$; prawa: $ks^{k-1}f$. W $s = 1$: $xf_x + yf_y = kf$. Dla $f = x^2y + y^3$ ($k = 3$): $x \cdot 2xy + y(x^2 + 3y^2) = 3x^2y + 3y^3 = 3f \checkmark$.

Zadania • część 2

- Minimum ($D = 12$), maksimum ($D = 4, f_{xx} < 0$), siodło ($D = -4$), siodło ($D = -1$; to $x^2 - y^2$ obrócone o 45° i pomnożone przez $\frac{1}{2}$).
- $(1; -2)$, minimum, $f = 1 + 4 - 2 - 8 + 1 = -4$. (Uzupełnienie do kwadratu: $f = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 4$.)
- $2x - y - 1 = 0, -x + 2y = 0$: $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$. $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = 3 > 0, U_{xx} > 0$: minimum, równowaga trwała.
- Minimum, maksimum, siodło. Test drugiej pochodnej nic nie mówi, trzeba patrzeć na wyrazy wyższego rzędu (albo na samą funkcję).
- Reszty $-0,1; 0,3; -0,3; 0,1$, $S = 0,2$. Prosta przez $(0; 1)$ i $(3; 6)$: $y = \frac{5}{3}x + 1$, reszty $0; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0$, $S = \frac{2}{9} \approx 0,22 > 0,2 \checkmark$.
- Wnętrze: $\nabla f = [2x - 1; 2y] = \vec{0}$ tylko w $(\frac{1}{2}; 0)$, który leży na brzegu, więc we wnętrzu nie ma punktów stacjonarnych. Boki: $y = 0$: $x^2 - x$, minimum $-\frac{1}{4}$ w $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$: $x^2 - x + 1 \in [\frac{3}{4}; 1]$; $x = 0$ i $x = 1$: $y^2 \in [0; 1]$. Wierzchołki: $f(0; 0) = 0, f(1; 0) = 0, f(0; 1) = 1, f(1; 1) = 1$. Minimum $-\frac{1}{4}$ w $(\frac{1}{2}; 0)$, maksimum 1 w $(0; 1)$ i $(1; 1)$.
- Drugie równanie normalne podzielone przez n : $a\bar{x} + b = \bar{y}$.

Zadania • część 3

- $[y; x] = \lambda[1; 1]$, więc $x = y = 5, xy = 25$. Podstawiając $y = 10 - x$: $10x - x^2$, maksimum w $x = 5 \checkmark$.
- $[1; 2] = \lambda[2x; 2y]$: wektor położenia równoległy do $[1; 2]$, czyli $\pm(1; 2)$. Maksimum 5, minimum -5 . (Też z iloczynu skalarnego: $f = [1; 2] \cdot \vec{r} \leq \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$.)

3. Pole $ab + 2ac + 2bc$, więc $abc = 32$. Z symetrii i równań Lagrange'a $a = b = 2c$: $a = b = 4, c = 2$, pole $16 + 16 + 16 = 48$.
4. Pole $4xy$. $[4y; 4x] = \lambda \left[\frac{2x}{9}; \frac{y}{2} \right]$ daje $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2}$: $x = \frac{3}{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$, pole 12 (połowa pola prostokąta opisanego $6 \cdot 4$).
5. $f^* = c^2/4$, $df^*/dc = c/2 = 5$ dla $c = 10$. Z równań: $\lambda = y = 5 \checkmark$.
6. $[2x; 2y] = \lambda[y; x]$, więc $x^2 = y^2$, a przy $xy = 1, x > 0$: $(1; 1)$, odległość $\sqrt{2}$.
7. $-\ln p_i - 1 = \lambda$ dla każdego i , więc wszystkie p_i są równe: $p_i = 1/n, S = \ln n$. Rozkład jednostajny odpowiada największej niewiedzy. Gdy dołożyć więz na średnią energię $\sum p_i E_i = \bar{E}$, wychodzi $p_i \propto e^{-\beta E_i}$: rozkład Boltzmanna, gdzie β to drugi mnożnik (Dział 8: Ciepło i teoria kinetyczna).

Matematyka · Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych. Źródła: J. Stewart, *Multivariable Calculus*, wyd. 7, §14.5, §14.7, §14.8; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.