

Wartości i wektory własne

Większość wektorów macierz obraca i rozciąga naraz. Niektóre tylko rozciąga, bez zmiany kierunku. To są wektory własne, a współczynnik rozciągnięcia to wartość własna. Brzmi jak ciekawostka, a jest jednym z najważniejszych narzędzi fizyki. Dwa sprzężone wahadła, struna, cząsteczka, most i atom mają swoje „ruchy własne” o określonych częstościach, i każdy inny ruch jest ich sumą. Ta lekcja pokazuje, jak takie kierunki znaleźć, co dają w rachunkach i dlaczego w fizyce stoją za każdym widmem częstości.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

22 zadania w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

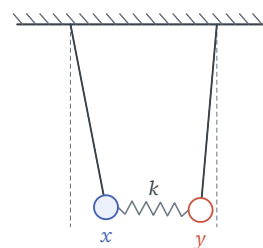
Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 49-4, 49-5, t. II, 31-3; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*; G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dwa wahadła i sprężyna
- 1 Kierunki, które macierz tylko rozciąga
- 2 Równanie charakterystyczne
- 3 Diagonalizacja i potęgi macierzy
- 4 Mody normalne
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwa wahadła i sprężyna

Dwa jednakowe wahadła wiszą obok siebie, a ich ciężarki łączy słaba sprężyna. Odchyl jedno i puść, drugie zostaw w spokoju. Pierwsze zaczyna się wahać, ale jego wahania powoli słabną, a drugie się rozkołysze. Po chwili pierwsze prawie stoi, a całą energię ma drugie. Potem energia wraca. Ruch wygląda skomplikowanie: żadne z wahadeł nie drga ze stałą amplitudą.



Feynman (49-4) stawia inne pytanie: czy istnieją takie ruchy, w których *oba* wahadła drgają harmonicznym z *tą samą* częstością? FLP I-49-4 Są dwa. Gdy wahadła odchyłimy jednakowo w tę samą stronę, sprężyna się nie rozciąga i każde wahadło drga jak swobodne, z częstością ω_0 . Gdy odchyłimy je jednakowo w przeciwne strony, sprężyna (raz rozciągnięta, raz ściśnięta) pcha albo ciągnie każde z nich ku jego położeniu równowagi, czyli dokłada się do siły powrotnej, więc drgają szybciej. Te dwa ruchy to **mody normalne** (inaczej: drgania własne). Feynman nie omawia tu dudnień, ale łatwo je teraz zrozumieć: dziwny ruch z początku to po prostu suma modów, a dwa drgania o bliskich częstościach dają dudnienia (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne).

Pytanie na start. Jak znaleźć takie „dobre” ruchy dla trzech wahadeł, dla dziesięciu, dla cząsteczki z kilkunastoma atomami? Zgadywanie przestaje działać. W części 4 zobaczysz, że to zawsze ten sam problem: znaleźć kierunki, które pewna macierz tylko rozciąga.

Kierunki, które macierz tylko rozciąga

DEFINICJA · WARTOŚĆ I WEKTOR WŁASNY

Niezerowy wektor $\vec{v}$ jest **wektorem własnym** macierzy kwadratowej A , a liczba λ jej **wartością własną**, jeśli

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}.$$

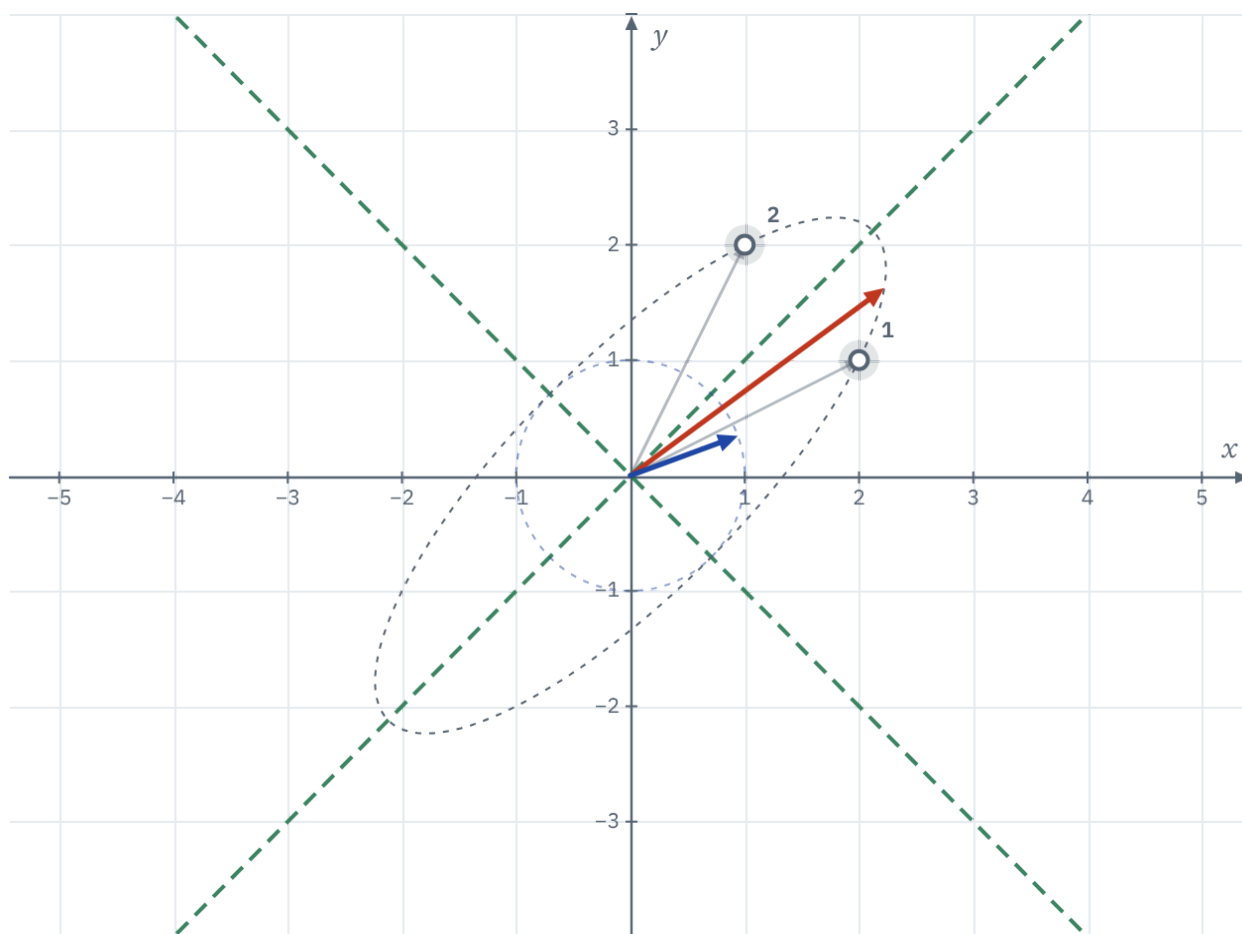
Przekształcenie A nie zmienia kierunku $\vec{v}$, tylko mnoży go przez λ : wydłuża ($\lambda > 1$), skraca ($0 < \lambda < 1$), odwraca zwrot ($\lambda < 0$) albo zeruje ($\lambda = 0$). Jeśli $\vec{v}$ jest wektorem własnym, to $2\vec{v}$ i $-\vec{v}$ też (z tą samą λ), więc właściwie chodzi o **kierunki** własne. Wektor zerowy wykluczamy, bo $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ dla każdej λ i nic by to nie mówiło.

Przypomnij sobie przykład 3.1 z lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza. Macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ma $A[1; 1] = [3; 3] = 3[1; 1]$ i $A[-1; 1] = [-1; 1]$. Wektory $[1; 1]$ i $[-1; 1]$ są własne, z wartościami 3 i 1. W bazie z tych wektorów macierz stała się przekątniowa. To nie przypadek, tylko główny powód, dla którego wartości własne są ważne (część 3).

Kilka przekształceń z lekcji 2.2 ma kierunki własne widoczne gołym okiem:

- **Odbicie** względem prostej: wektory na prostej się nie zmieniają ($\lambda = 1$), prostopadłe zmieniają zwrot ($\lambda = -1$).
- **Rzut na prostą**: wektory na prostej zostają ($\lambda = 1$), prostopadłe giną ($\lambda = 0$).
- **Ścinanie** $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: tylko oś x zostaje na miejscu ($\lambda = 1$). Drugiego kierunku własnego nie ma.
- **Obrót** o kąt różny od 0° i 180° : żaden niezerowy wektor płaszczyzny nie zachowuje kierunku. Rzeczywistych wektorów własnych nie ma (ale zespolone są, część 2).

SYMULACJA 1 Wektor $\vec{v}$ obiega okrąg jednostkowy, a obok rysujemy jego obraz $A\vec{v}$. Na ogół wskazują w różne strony. Tam, gdzie są równoległe, $\vec{v}$ jest wektorem własnym (zielone proste). Zmieniaj macierz, przeciągając jej kolumny, i szukaj kierunków własnych. Przy obrocie ich nie znajdziesz.



— $\vec{v}$ — $A\vec{v}$ — kierunki własne — obraz okręgu

A (2,0 1,0 | 1,0 2,0)

ślad 4,00

det 3,00

wartości własne λ 3,000; 1,000

kąt między $\vec{v}$ a $A\vec{v}$ 16,2°

Obracaj $\vec{v}$ i patrz, kiedy $A\vec{v}$ wskaże ten sam (albo przeciwny) kierunek. To zdarza się dokładnie na zielonych prostych.

Stan na rysunku: $A = (2,0 \ 1,0 \mid 1,0 \ 2,0)$, wartości własne 3,000; 1,000; $\vec{v}$ pod kątem 20°.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 25 min

- 1 Które z wektorów $[1; 0]$, $[1; 1]$, $[1; -1]$ są wektorami własnymi macierzy $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? Z jakimi wartościami własnymi?
- 2 Podaj wartości i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, macierzy jednostkowej I i macierzy zerowej.
- 3 Bez rachunków podaj wartości i wektory własne rzutu na prostą $y = x$ i odbicia względem tej prostej. Sprawdź na macierzach $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (rzut) i $O(45^\circ)$ (odbicie) z lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza.
- 4 Pokaż, że jeśli $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, to $A^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$, a dla odwracalnej A także $A^{-1}\vec{v} = \lambda^{-1}\vec{v}$.
- 5 Pokaż, że 0 jest wartością własną A wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A = 0$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Równanie charakterystyczne

Jak znaleźć λ , nie zgadując? Przepiszmy definicję jako $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$, czyli $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$. To układ jednorodny. Ma zawsze rozwiązanie $\vec{v} = \vec{0}$, a nas interesuje niezerowe. Z lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań wiemy, kiedy takie istnieje: gdy wyznacznik macierzy układu jest zerem.

🔑 RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Lewa strona to wielomian stopnia n zmiennej λ (**wielomian charakterystyczny**). Jego pierwiastki to wartości własne. Dla każdej z nich wektory własne to niezerowe rozwiązania układu $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Dla 2×2 : $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0$, więc $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$, $\lambda_1\lambda_2 = \det A$.

Wzory na sumę i iloczyn to wzory Viète'a z lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste. Dają szybkie sprawdzenie każdego rachunku. W zadaniu 3.6 lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza pokazaliśmy, że ślad i wyznacznik nie

zależą od bazy. Teraz widać dlaczego: są zbudowane z wartości własnych, a te opisują samo przekształcenie, nie jego zapis.

Przykład 2.1

Krok po kroku dla 2×2

Znajdź wartości i wektory własne $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1 $\text{tr } A = 7, \det A = 10$, więc $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ i $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$.
- 2 $\lambda_1 = 5: A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Oba wiersze mówią $x = y$ (drugi to pierwszy razy -2), więc $\vec{v}_1 = [1; 1]$.
- 3 $\lambda_2 = 2: A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, równanie $2x + y = 0$, więc $\vec{v}_2 = [1; -2]$.

Wynik: $\lambda_1 = 5$ z $[1; 1]$, $\lambda_2 = 2$ z $[1; -2]$.

Sprawdzenie: $A[1; 1] = [5; 5] \checkmark$, $A[1; -2] = [2; -4] = 2[1; -2] \checkmark$; $5 + 2 = 7 = \text{tr } A$, $5 \cdot 2 = 10 = \det A \checkmark$. Wiersze $A - \lambda I$ zawsze muszą wyjść proporcjonalne. Jeśli nie wychodzą, λ jest źle policzona.

2.1 Wartości zespolone: obrót

Dla obrotu $R(\theta)$ mamy $\text{tr } R = 2 \cos \theta$, $\det R = 1$, więc $\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$ i

$$\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}.$$

Wartości własne obrotu to liczby zespolone z lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory, leżące na okręgu jednostkowym pod kątem $\pm\theta$. Wektory własne też są zespolone: dla $R(90^\circ)$ i $\lambda = i$ jest to $[1; -i]$, bo $R(90^\circ)[1; -i] = [i; 1] = i[1; -i]$. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych ma pierwiastki nierzeczywiste w parach sprzężonych, więc wartości własne macierzy rzeczywistej też występują parami: λ i $\bar{\lambda}$. Dla rzeczywistej macierzy 2×2 zespolone wartości własne oznaczają, że żaden kierunek nie jest zachowany: w odpowiednio dobranej (na ogół nieprostopadłej) bazie macierz to obrót o $\arg \lambda$ połączony ze skalowaniem $|\lambda|$. W równaniach ruchu oznaczają drgania (lekcja 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów).

2.2 Wartości wielokrotne i 3×3

Ścinanie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ma wielomian $(\lambda - 1)^2$: wartość własna 1 jest podwójna, a kierunek własny tylko jeden (oś x). Takiej macierzy brakuje wektorów własnych. Za to I też ma podwójną wartość 1, a

wektorem własnym jest każdy wektor. Krotność pierwiastka nie mówi więc, ile jest niezależnych wektorów własnych.

Przykład 2.2

Macierz 3×3

Znajdź wartości i wektory własne $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

- 1 Rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza: $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(-3 - \lambda) - 16] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 25)$.
- 2 Wartości własne: 2, 5, -5.
- 3 $\lambda = 2$: $\vec{v} = [1; 0; 0]$ (pierwsza kolumna A to $2\vec{v}$). $\lambda = 5$: z drugiego wiersza $A - 5I$: $-2y + 4z = 0$, więc $[0; 2; 1]$. $\lambda = -5$: $8y + 4z = 0$, więc $[0; 1; -2]$.

Wynik: 2 z $[1; 0; 0]$, 5 z $[0; 2; 1]$, -5 z $[0; 1; -2]$.

Sprawdzenie: suma $2 + 5 - 5 = 2 = \text{tr } A$ ✓, iloczyn $2 \cdot 5 \cdot (-5) = -50 = \det A$ ✓. Trzy wektory własne są do siebie prostopadłe. To nie przypadek: A jest symetryczna (część 3).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Znajdź wartości i wektory własne $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 2 Znajdź wartości i wektory własne macierzy trójkątnej $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Co zauważasz?

- 3 Znajdź wartości własne $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zapisz je w postaci wykładniczej i zinterpretuj przekształcenie.

- 4 Pokaż, że ścinanie $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$, ma tylko jeden kierunek własny.

5

Znajdź wartości i wektory własne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ile niezależnych wektorów własnych ma wartość własna 3?

6

Pokaż, że dla macierzy 2×2 wielomian charakterystyczny to $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$. Kiedy wartości własne są zespolone?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

3

Diagonalizacja i potęgi macierzy

Jeśli macierz $n \times n$ ma n niezależnych wektorów własnych, użyjmy ich jako bazy. W tej bazie przekształcenie tylko rozciąga każdą oś, więc jego macierz jest przekątniowa (diagonalna), a na przekątnej stoją wartości własne. Z zamiany bazy z lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza:

DIAGONALIZACJA

$$A = PDP^{-1}, \quad P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n], \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Kolumny P to wektory własne, w tej samej kolejności co wartości własne w D . Wystarczy (ale nie jest konieczne), żeby macierz miała n różnych wartości własnych (w razie potrzeby zespolonych).

Do czego to służy? Potęgi macierzy przekątniowej liczy się trywialnie, a w iloczynie $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots$ środkowe $P^{-1}P$ się skracają:

$$A^n = PD^nP^{-1}, \quad D^n = \text{diag}(\lambda_1^n; \dots; \lambda_n^n).$$

Dla dużego n wygrywa wartość własna o największym module: $A^n \vec{v}$ ustawia się wzdłuż jej wektora własnego, a długość mnoży się mniej więcej przez $|\lambda_{\max}|$ w każdym kroku. Warunki: jedna wartość własna ma moduł ściśle największy, a $\vec{v}$ ma składową wzdłuż jej wektora własnego. Gdy największy moduł mają dwie wartości (np. para zespolona albo $\pm \lambda$), kierunek się nie ustala. Na tym działa **metoda potęgowa**, którą komputery szukają największej wartości własnej. Ta sama zasada decyduje o stabilności: jeśli wszystkie $|\lambda| < 1$, to $A^n \rightarrow 0$.

Przykład 3.1

Ciąg Fibonacciego bez rekurencji

Ciąg $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Znajdź wzór na F_n .

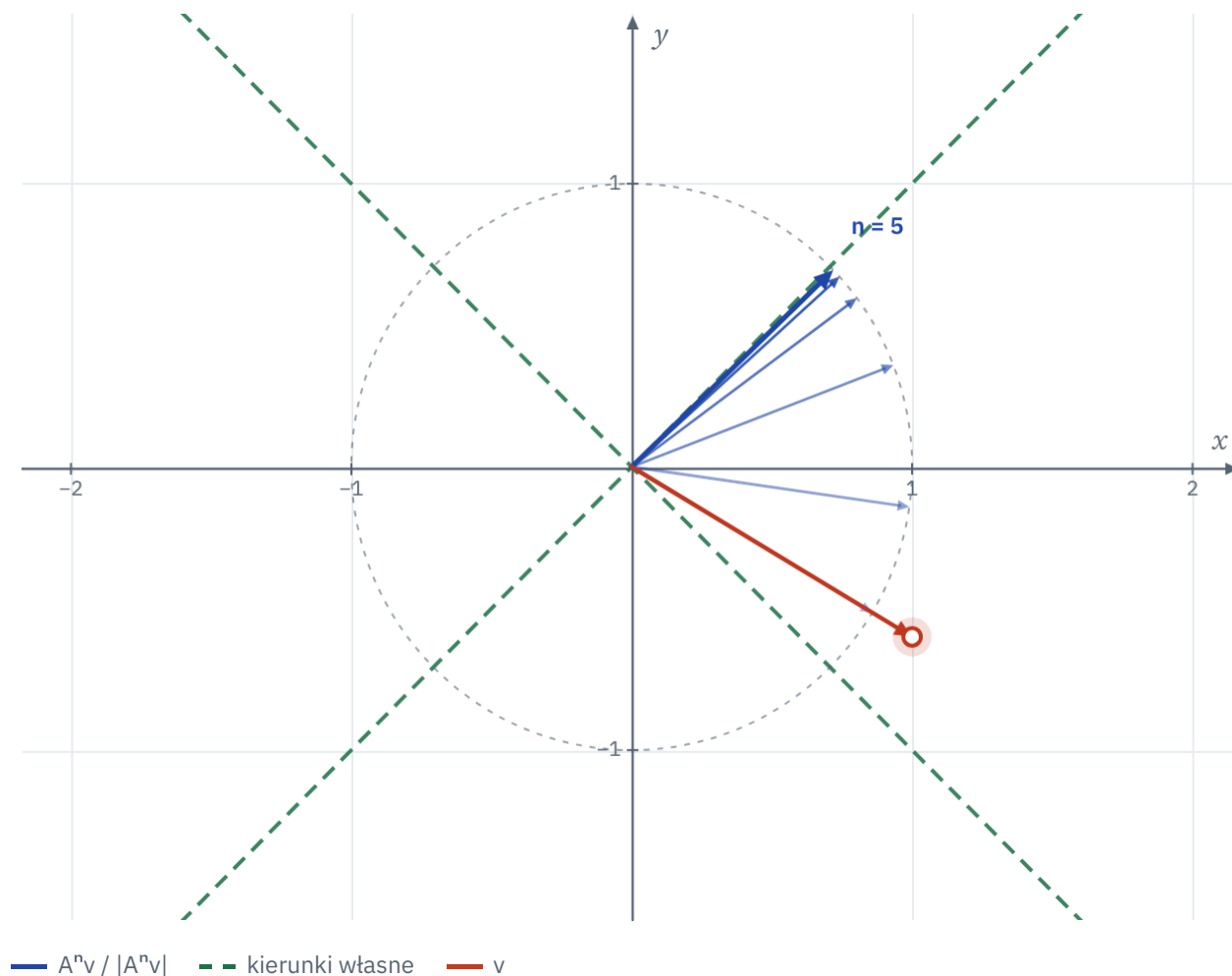
- 1 Zapis macierzowy: $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$, więc $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, bo $[F_1; F_0] = [1; 0]$.
- 2 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (złota liczba), $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618$. Wektory własne $[\lambda_1; 1]$ i $[\lambda_2; 1]$.
- 3 Rozkładamy $[1; 0]$ w tej bazie: $[1; 0] = \frac{1}{\sqrt{5}}([\lambda_1; 1] - [\lambda_2; 1])$, bo $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$. Każda składowa mnoży się przy kolejnym kroku przez swoją λ , więc $A^n[1; 0] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n[\lambda_1; 1] - \lambda_2^n[\lambda_2; 1])$, a F_n to druga współrzędna.

Wynik: $F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$ (wzór Bineta). Ponieważ $|\lambda_2| < 1$, dla dużych n wystarczy $F_n \approx \lambda_1^n / \sqrt{5}$.

Sprawdzenie: $n = 1$: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \checkmark$. $n = 10$: $\lambda_1^{10} / \sqrt{5} \approx 55,004$, a $F_{10} = 55 \checkmark$.

SYMULACJA 2

Metoda potęgowa. Kolejne wektory $A^n \vec{v}$ (po sprowadzeniu do długości 1) szybko ustawiają się wzdłuż wektora własnego o największej $|\lambda|$, a stosunek długości kolejnych wektorów dąży do $|\lambda_{\max}|$. Gdy obie wartości własne mają podobny moduł, zbieżność jest wolna, a dla wartości zespolonych kierunek nigdy się nie ustala.



wartości własne λ 3,000; 1,000

$|A^n v| / |A^{n-1} v|$ 2,9968

odchylenie od kierunku dominującego $0,94^\circ$

Stan na rysunku: $n = 5$, wartości własne 3,000; 1,000; $|A^n v| / |A^{n-1} v| = 2,9968$, odchylenie od kierunku dominującego $0,94^\circ$.

3.1 Macierze symetryczne: osie główne

🔧 TWIERDZENIE SPEKTRALNE (DLA MACIERZY RZECZYWISTYCH SYMETRYCZNYCH)

Jeśli $A^T = A$, to wszystkie wartości własne są rzeczywiste, a wektory własne można wybrać tak, żeby były wzajemnie prostopadłe i miały długość 1. Wtedy $A = QDQ^T$, gdzie Q jest ortogonalna (obróć, ewentualnie z odbiciem).

Geometrycznie: każda macierz symetryczna to rozciągnięcie wzdłuż n wzajemnie prostopadłych osi (w przestrzeni: trzech) ze współczynnikami λ_i , widziane w obróconym układzie. Ujemny współczynnik oznacza też odbicie. Te osie nazywa się **osiąmi głównymi**. W fizyce macierze symetryczne są wszędzie: polaryzowalność kryształu (lekcja 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań, zadanie 2.6), moment bezwładności (Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna), naprężenia, macierz sztywności. Feynman szkicuje argument energetyczny (cykl włączania i wyłączania pól E_x, E_y), z którego wynika symetria tensora polaryzowalności, a więc istnienie trzech prostopadłych osi głównych, wzdłuż których $\vec{P} \parallel \vec{E}$. FLP II-31-3

Dla polaryzowalności $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ z lekcji 2.1 wartości własne to 1 (oś z) i pierwiastki $\lambda^2 - 5\lambda + 5$: $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 3,618$ i $1,382$. Oś główna o największej polaryzowalności leży w płaszczyźnie xy , pod kątem $\arctan \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 31,7^\circ$ do osi x . Pole wzdłuż tej osi wywołuje polaryzację dokładnie równoległą.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 45 min

- 1  Zapisz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ jako PDP^{-1} (wektory własne z zadania 2.1). Sprawdź mnożeniem.
- 2  Korzystając z przykładu 2.1, wyprowadź wzór na A^n dla $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i oblicz lewy górny element A^{10} .
- 3  Oblicz F_{20} ze wzoru przybliżonego $\lambda_1^{20} / \sqrt{5}$. Jak duży jest błąd i dlaczego tak mały?
- 4  Sprawdź, że wektory własne z zadania 2.1 są prostopadłe. Dlaczego trzeba się było tego spodziewać? A w przykładzie 2.1?
- 5  Macierz $\begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ działa na wektor $[1; 1]$ wiele razy. Co się dzieje z kierunkiem i długością wyniku? Po ilu krokach druga składowa spadnie poniżej 10^{-3} ?
- 6  Pokaż, że dla diagonalizowalnej A wyznacznik to iloczyn, a ślad to suma wartości własnych (dowolne n).

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Wróćmy do wahadeł z prologu. Przy małych wychyleniach wahadło o długości l ma równanie $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, gdzie $\omega_0^2 = g/l$; jego rozwiązaniem jest $\cos \omega_0 t$ (dokładniej w lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne). Sprężyna o współczynniku k łączy ciężarki o masie m (wahadło 1 po lewej, wychylenia w prawo dodatnie). Wydłuża się o $y - x$ i działa na pierwszy ciężarek siłą $-k(x - y)$, a na drugi siłą $+k(x - y)$. Oznaczmy $\kappa = k/m$. Równania ruchu:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \kappa(x - y), \quad \ddot{y} = -\omega_0^2 y - \kappa(y - x), \quad \text{czyli} \quad \ddot{\vec{q}} = -K\vec{q}, \quad K = \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \omega_0^2 + \kappa \end{pmatrix},$$

gdzie $\vec{q} = [x; y]$. Szukamy ruchu, w którym oba wahadła drgają z tą samą częstością i stałym kształtem: $\vec{q}(t) = \vec{v} \cos \omega t$. Wstawiamy: $-\omega^2 \vec{v} \cos \omega t = -K\vec{v} \cos \omega t$, czyli

$$K\vec{v} = \omega^2 \vec{v}.$$

To jest zagadnienie własne. Kwadraty częstości modów to wartości własne K , a kształty modów to wektory własne. K jest symetryczna, więc ω^2 są rzeczywiste, a mody prostopadłe; ponieważ tu $\omega^2 > 0$, rzeczywiste są także same częstości. Tu: $\text{tr } K = 2\omega_0^2 + 2\kappa$, $\det K = (\omega_0^2 + \kappa)^2 - \kappa^2$, więc

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \vec{v}_1 = [1; 1]; \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\kappa, \quad \vec{v}_2 = [1; -1].$$

Dokładnie to samo dostaje Feynman w 49-4: podstawia drgania o wspólnej częstości i z warunku zgodności dwóch równań otrzymuje te same dwie częstości. Mod zgodny ma częstość swobodną, bo sprężyna się nie odkształca. W modzie przeciwnym sprężyna dokłada się do siły powrotnej.

MODY NORMALNE UKŁADU LINIOWEGO

Dla $\ddot{\vec{q}} = -K\vec{q}$ z symetryczną K o dodatnich wartościach własnych (taką macierz nazywamy **dodatnio określoną**; wtedy każde $\omega_j^2 > 0$) każdy ruch jest sumą modów:

$$\vec{q}(t) = \sum_j \vec{v}_j (a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t), \quad K\vec{v}_j = \omega_j^2 \vec{v}_j.$$

Stałe a_j, b_j wynikają z warunków początkowych. W bazie modów układ rozpada się na niezależne oscylatory harmoniczne.

Feynman podkreśla, że to ogólna własność każdego układu liniowego: dowolnie skomplikowany ruch jest sumą modów, z których każdy drga z jedną częstością. FLP I-49-5 Ta sama myśl prowadzi do mechaniki kwantowej, gdzie częstości modów zamieniają się w poziomy energii (Dział 18: Stany kwantowe, układy dwustanowe i spin).

Przykład 4.1

Skąd dudnienia

Wahadła mają $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ (długość $l = g/\omega_0^2 \approx 2,45 \text{ m}$), sprężyna daje $\kappa = 0,2 \text{ s}^{-2}$. W chwili 0 pierwsze wahadło odchyłono o x_0 , drugie stoi, oba w spoczynku. Opisz ruch. Po jakim czasie cała energia przejdzie do drugiego wahadła?

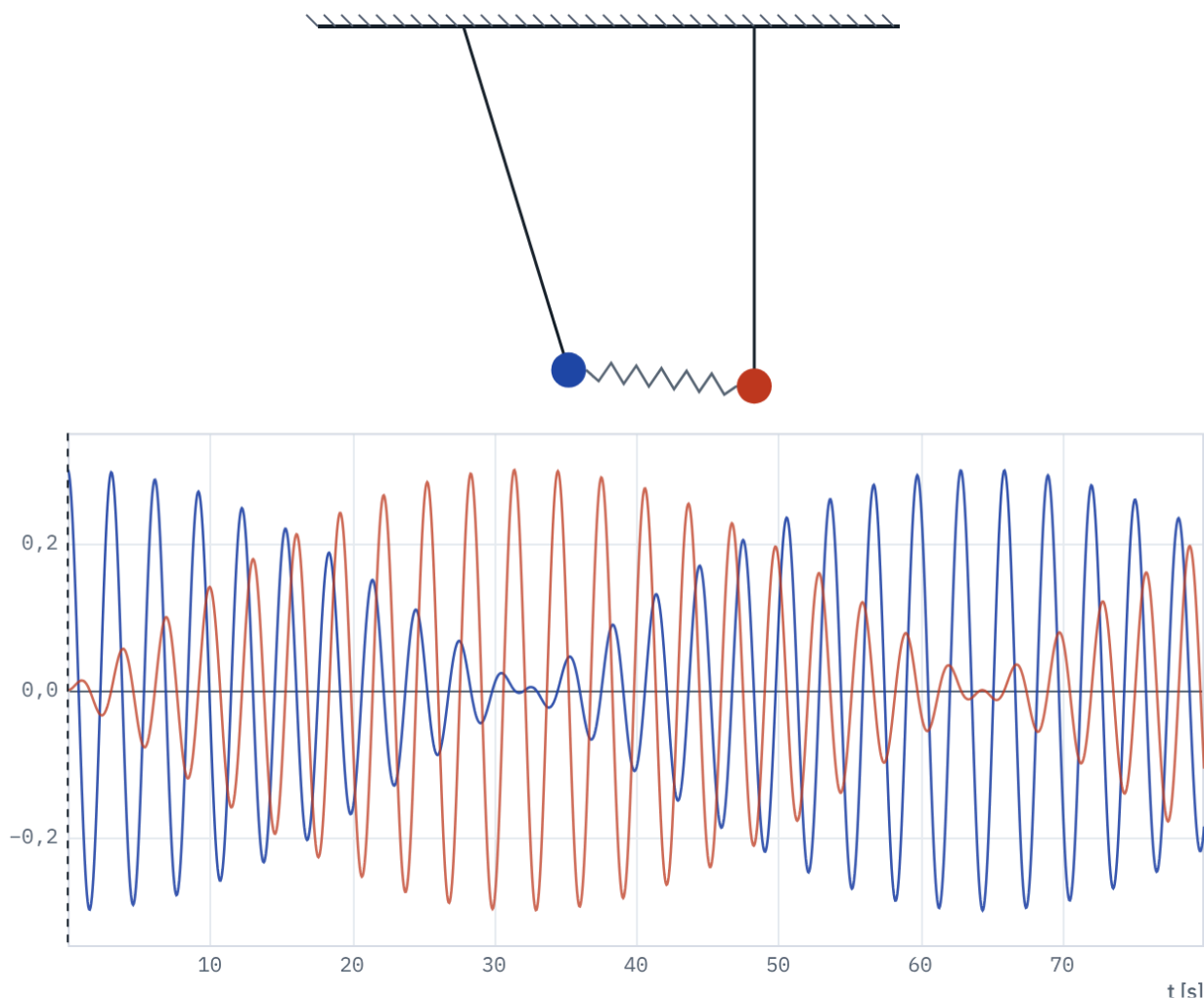
- 1 $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \sqrt{4 + 0,4} \approx 2,0976 \text{ rad/s}$.
- 2 Warunek początkowy w bazie modów: $[x_0; 0] = \frac{x_0}{2} [1; 1] + \frac{x_0}{2} [1; -1]$. Prędkości zerowe, więc same cosinusy: $\vec{q}(t) = \frac{x_0}{2} [1; 1] \cos \omega_1 t + \frac{x_0}{2} [1; -1] \cos \omega_2 t$.
- 3 Ze wzorów na sumę i różnicę cosinusów (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne): $x = x_0 \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$, $y = x_0 \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$.
- 4 Amplituda x spada do zera, gdy $\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} = \frac{\pi}{2}$, czyli $t = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{\pi}{0,0976} \approx 32 \text{ s}$.

Wynik: wahadła drgają z częstością średnią, a amplitudy „przelewają się” z jednego do drugiego. Pełne przekazanie energii trwa około 32 s, cały cykl tam i z powrotem około 64 s.

Sprawdzenie: $t = 0$: $x = x_0$, $y = 0$ ✓. Przypadek graniczny: bez sprężyny ($\kappa \rightarrow 0$) $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ i czas przekazania rośnie do nieskończoności, czyli energia zostaje w pierwszym wahadle ✓. Dla słabego sprzężenia $\omega_2 - \omega_1 \approx \kappa/\omega_0$, co daje $\pi\omega_0/\kappa \approx 31,4 \text{ s}$, blisko dokładnego wyniku.

SYMULACJA 3

Sprężone wahadła. Wybierz warunek początkowy: sam mod 1, sam mod 2 albo „jedno wahadło odchylone”. W modach normalnych oba wahadła drgają z jedną częstotliwością i stałą amplitudą. W trzecim przypadku widać dudnienia, a ich okres rośnie, gdy osłabiasz sprężynę.



— x (wahadło 1) — y (wahadło 2)

$$\omega_1 = \omega_0 \ 2,000 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{(\omega_0^2 + 2\kappa)} \ 2,0976 \text{ rad/s}$$

$$\text{czas przekazania energii } \pi/(\omega_2 - \omega_1) \ 32,2 \text{ s}$$

Stan na rysunku: $\kappa = 0,20 \text{ s}^{-2}$, $t = 0,0 \text{ s}$; $\omega_1 = 2,000$, $\omega_2 = 2,0976 \text{ rad/s}$; czas przekazania energii 32,2 s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Dla $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ oblicz ω_2 i czas przekazania energii $\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ przy $\kappa = 0,05$ i $\kappa = 1 \text{ s}^{-2}$

2 Dwie masy m połączone trzema sprężynami k (ściana–masa–masa–ściana) ślizgają się bez tarcia. Ułóż równania ruchu, macierz K i znajdź mody.

3 Jakie warunki początkowe wahadeł z przykładu 4.1 wzbudzą tylko mod 2? Co wtedy widać?

4 Pokaż, że dla słabego sprzężenia ($\kappa \ll \omega_0^2$) $\omega_2 - \omega_1 \approx \kappa/\omega_0$.

5 Trzy jednakowe masy w łańcuchu (ściana– k – m – k – m – k – m – k –ściana) mają $K = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Znajdź częstości i kształty modów. Narysuj kształty.

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

5 Błędne intuicje

× „Wektor zerowy też jest wektorem własnym.”

Nie, z definicji. Zero spełniałoby $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ dla każdej λ . Za to wartość własna $\lambda = 0$ jest dozwolona i oznacza, że $\det A = 0$.

× „Każda macierz ma rzeczywiste wartości własne.”

Obrót płaszczyzny ich nie ma: wartości własne $e^{\pm i\theta}$ są zespolone. Rzeczywiste gwarantuje symetria $A^T = A$.

× „Każdą macierz da się zdiagonalizować.”

Ścinanie się nie da: ma jedną wartość własną i tylko jeden kierunek własny. Diagonalizacja wymaga n niezależnych wektorów własnych.

× „Wartości własne $A + B$ to sumy wartości własnych A i B .”

Na ogół nie, bo A i B mają zwykle różne wektory własne. Prawdziwe jest tylko to, że suma wszystkich wartości własnych $A + B$ równa się sumie wartości własnych A i B , bo ślad jest addytywny.

× „Operacje na wierszach z eliminacji Gaussa nie zmieniają wartości własnych.”

Zmieniają. Eliminacja zachowuje rozwiązania układu równań, a nie przekształcenie. Wartości własne zachowuje zmiana bazy (podobieństwo) $P^{-1}AP$.

× „Mody normalne to szczególne, rzadkie ruchy.”

Każdy ruch układu liniowego jest ich sumą. Mody to „alfabet”, z którego składa się każdy ruch, jak nuty w akordzie.

6 Sprawdź się

1 Co znaczy, że $\vec{v}$ jest wektorem własnym A ?

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dla pewnej liczby λ i $\vec{v} \neq \vec{0}$: A nie zmienia kierunku $\vec{v}$.

2 Jakie równanie spełniają wartości własne?

$\det(A - \lambda I) = 0$.

3 Ile wynosi suma i iloczyn wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

Suma 7 (śląd), iloczyn 10 (wyznacznik).

4 Jakie wartości własne ma obrót o kąt θ ?

$e^{\pm i\theta}$.

5 Co stoi w kolumnach P i na przekątnej D w rozkładzie $A = PDP^{-1}$?

Wektory własne i odpowiadające im wartości własne.

6 Co gwarantuje macierz symetryczna?

Rzeczywiste wartości własne i prostopadłe wektory własne (osie główne).

7 Jak znaleźć częstości modów normalnych układu $\ddot{\vec{q}} = -K\vec{q}$?

Jako pierwiastki z wartości własnych macierzy K .

WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0; \text{ potem } (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$2 \times 2: \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0$$

$$\sum \lambda_i = \text{tr } A, \prod \lambda_i = \det A$$

$$\text{trójkątna: } \lambda \text{ na przekątnej; } \lambda = 0 \iff$$

$$\det A = 0$$

$$\text{obróć: } \lambda = e^{\pm i\theta}; \text{ macierz rzeczywista: pary}$$

$$\lambda, \bar{\lambda}$$

DIAGONALIZACJA I MODY

$$A = PDP^{-1}: \text{ kolumny } P = \text{ wektory własne}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}; \text{ dominuje największe } |\lambda|$$

$$\text{symetryczna: } \lambda \in \mathbb{R}, A = QDQ^T, \text{ osie}$$

$$\text{główne prostopadłe}$$

$$\ddot{\vec{q}} = -K\vec{q}; K\vec{v} = \omega^2\vec{v}$$

$$\text{ruch} = \text{suma modów } \vec{v}_j(a_j \cos \omega_j t + b_j \sin \omega_j t)$$

$$\text{wahadła sprzężone: } \omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 49-4 i 49-5 (sprężone wahadła i ogólna zasada: ruch układu liniowego to suma modów).
- **Dla chętnych:** 49-2 i 49-3 (mody struny i membrany, ciągła wersja tej samej idei) oraz t. II, 31-3 (symetria tensora polaryzowalności i osie główne).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: rozdziały o wartościach i wektorach własnych.
- **G. Strang**, *Introduction to Linear Algebra*: rozdział 6 (eigenvalues and eigenvectors), z diagonalizacją, ciągiem Fibonacciego i macierzami symetrycznymi.

Wartości własne wrócą wiele razy. W układach równań różniczkowych $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ (4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów) ich znak decyduje o stabilności, a część urojona o drganiach. Mody struny i membrany to nieskończenie wymiarowa wersja tej lekcji (4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a), a w mechanice kwantowej mieralne wartości to wartości własne macierzy (Dział 18: Stany kwantowe, układy dwustanowe i spin). Osie główne bryły sztywnej opisuje lekcja Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $A[1; 0] = [3; 0]$: tak, $\lambda = 3$. $A[1; 1] = [4; 2]$: nie. $A[1; -1] = [2; -2]$: tak, $\lambda = 2$.
2. $2z\vec{i} - 3z\vec{j}$. I : każdy niezerowy wektor jest własny, $\lambda = 1$. Macierz zerowa: każdy niezerowy wektor, $\lambda = 0$.
3. Rzut: $[1; 1]z\lambda = 1$, $[1; -1]z\lambda = 0$. Odbicie: $[1; 1]z\lambda = 1$, $[1; -1]z\lambda = -1$. Macierze: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A^2\vec{v} = A(\lambda\vec{v}) = \lambda A\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$. Mnożąc $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ z lewej przez A^{-1} : $\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v}$. Przy tym $\lambda \neq 0$ (zadanie 1.5), więc $A^{-1}\vec{v} = \lambda^{-1}\vec{v}$.
5. $\lambda = 0$ znaczy, że $A\vec{v} = \vec{0}$ dla pewnego $\vec{v} \neq \vec{0}$. Układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy $\det A = 0$ (lekcja 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań): macierz zgniata jakiś kierunek do zera.

Zadania • część 2

1. $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$: 6 z $[2; 1]$, 1 z $[1; -2]$.
2. 2 z $[1; 0]$, 3 z $[5; 1]$. Wartości własne macierzy trójkątnej stoją na jej przekątnej, bo $\det(A - \lambda I)$ to iloczyn elementów przekątnej $A - \lambda I$.
3. $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$. Macierz to $\sqrt{2}R(45^\circ)$: obrót o 45° połączony z wydłużeniem $\sqrt{2}$ razy.
4. Jedyna wartość własna to 1 (podwójna). $A - I = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, równanie $ky = 0$, więc $y = 0$: tylko kierunek $[1; 0]$.
5. $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 4] = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$. -1 z $[1; -1; 0]$; 3 (podwójna) z dwoma niezależnymi wektorami $[1; 1; 0]$ i $[0; 0; 1]$: cała płaszczyzna własna. Inaczej niż przy ścinaniu.
6. $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$. Zespolone, gdy wyróżnik jest ujemny: $(\text{tr } A)^2 < 4 \det A$.

Zadania • część 3

1. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(6; 1)$, $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Iloczyn daje A .
2. $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$. Dla $n = 1$ daje A ✓. $(A^{10})_{11} = \frac{2 \cdot 9765625 + 1024}{3} = 6510758$.
3. $\lambda_1^{20}/\sqrt{5} \approx 6765,00003$, więc $F_{20} = 6765$. Błąd to $|\lambda_2|^{20}/\sqrt{5} \approx 3 \cdot 10^{-5}$, bo $|\lambda_2| \approx 0,618 < 1$.
4. $[2; 1] \cdot [1; -2] = 0$ ✓: macierz jest symetryczna. W przykładzie 2.1 macierz nie jest symetryczna i $[1; 1] \cdot [1; -2] = -1 \neq 0$.

5. Obie składowe maleją do zera (wszystkie $|\lambda| < 1$), ale druga szybciej, więc kierunek dąży do osi x .
 $0,5^n < 10^{-3}$ dla $n \geq 10$ ($0,5^{10} \approx 0,00098$).
6. $A = PDP^{-1}$ jest podobna do D , a ślad i wyznacznik są niezmiennicze przy podobieństwie (lekcja 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza, zadanie 3.6). Dla D są to suma i iloczyn elementów przekątnej. (Zdanie jest prawdziwe także dla macierzy niediagonalizowalnych, jeśli liczyć wartości własne z krotnościami.)

Zadania · część 4

1. $\kappa = 0,05$: $\omega_2 = \sqrt{4,1} \approx 2,0248$ rad/s, czas ≈ 126 s. $\kappa = 1$: $\omega_2 = \sqrt{6} \approx 2,449$ rad/s, czas $\approx 7,0$ s.
2. $\ddot{x} = -\frac{k}{m}(2x - y)$, $\ddot{y} = -\frac{k}{m}(2y - x)$, $K = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Mody: $[1; 1]$ z $\omega^2 = k/m$ (środkowa sprężyna nie pracuje), $[1; -1]$ z $\omega^2 = 3k/m$.
3. Wychylenia (i prędkości) proporcjonalne do $[1; -1]$: równe i przeciwne. Oba wahadła drgają ze stałą amplitudą, z częstością ω_2 , w przeciwfazie. Żadnych dudnień.
4. $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\kappa/\omega_0^2} \approx \omega_0(1 + \kappa/\omega_0^2) = \omega_0 + \kappa/\omega_0$.
5. Niech $K' = \frac{m}{k}K$. $\det(K' - \lambda I) = (2 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 2]$, więc $\lambda = 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}$ (w jednostkach k/m). Mody: $[1; \sqrt{2}; 1]$ (wszystkie w tę samą stronę, środkowa najbardziej), $[1; 0; -1]$ (środkowa stoi), $[1; -\sqrt{2}; 1]$ (środkowa przeciwnie). To trzy pierwsze kształty drgań struny, próbkowane w trzech punktach (4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a).

Matematyka · Wartości i wektory własne. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 49-4, 49-5, oraz t. II, 31-3; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*; G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.