

Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza

W lekcji 2.1 macierz była tabelą współczynników układu równań. Tu zmieniamy punkt widzenia: macierz to przepis, który każdy wektor zamienia na inny. Obraca go, rozciąga, odbija albo rzutuje. Ten punkt widzenia odpowiada na pytanie, które fizyk zadaje stale: co się zmieni, gdy inny obserwator opíše to samo zjawisko w swoich osiach? Dla obrotu osi odpowiedź zna każdy. Dla obserwatora w ruchu odpowiedzią jest transformacja Lorentza, czyli „obrót” w czasoprzestrzeni, który zamiast okręgów zachowuje hiperbole.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

24 zadania w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 11-2, 11-3, 15-2, 17-1, 17-2; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*

W TEJ LEKCJI

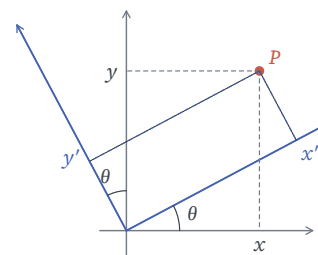
- 0 Prolog: Joe i Moe patrzą na ten sam punkt
- 1 Przekształcenia liniowe i ich macierze
- 2 Obroty i odbicia
- 3 Obracamy wektor czy osie? Zmiana bazy
- 4 Transformacja Lorentza: obrót hiperboliczny
- 5 Błędne intuicje
- 6 Sprawdź się
- 7 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Joe i Moe patrzą na ten sam punkt

W rozdziale o wektorach Feynman wprowadza dwóch fizyków, Joego i Moe. Moe ustawił swoje osie obrócone o kąt θ względem osi Joego. Ten sam punkt P ma u Joego współrzędne $(x; y)$, a u Moe $(x'; y')$. Z rysunku (prostokąty i trójkąty z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne) Feynman odczytuje

FLP I-11-3

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta.$$



Obaj wykonują to samo doświadczenie, każdy w swoich osiach, i dostają te same prawa fizyki. Na tym Feynman buduje całą ideę wektora: wielkość, której trzy składowe zmieniają się przy obrocie osi dokładnie tak jak x, y, z . Są też liczby, które się nie zmieniają. Długość: $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ (sprawdź, wymnażając). Iloczyn skalarny dwóch wektorów. Pole i objętość.

Te wzory są liniowe: x' i y' to kombinacje x i y bez wyrazów wolnych i bez kwadratów. Można je więc zapisać jako mnożenie przez macierz, tak jak układ równań w lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań.

Pytanie na start. Obrót zachowuje $x^2 + y^2$. Czy istnieje liniowe przekształcenie, które miesza współrzędną x z czasem ct i zachowuje $(ct)^2 - x^2$, z minusem? Jak wyglądałaby jego macierz? Odpowiedź w części 4.

Przekształcenia liniowe i ich macierze

DEFINICJA · PRZEKSZTAŁCENIE LINIOWE

Funkcja T , która wektorom przypisuje wektory, jest **liniowa**, jeśli dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ i liczb a, b

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v}).$$

Słownie: obraz sumy to suma obrazów, a obraz wektora k razy dłuższego jest k razy dłuższy.

Geometrycznie: proste przechodzą w proste (albo w punkty), równoległe w równoległe, równe odcinki na jednej prostej w równe odcinki, a zero zostaje w miejscu, bo $T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot T(\vec{0}) = \vec{0}$. Przesunięcie o stały wektor nie jest więc liniowe, mimo że prostych nie wygina.

Najważniejszy fakt tej części: przekształcenie liniowe jest w całości wyznaczone przez to, co robi z wektorami bazy. Każdy wektor płaszczyzny to $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, więc z liniowości

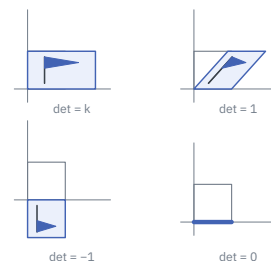
$$T(\vec{v}) = xT(\vec{i}) + yT(\vec{j}).$$

To jest dokładnie obraz kolumnowy iloczynu macierzy przez wektor z lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań. Wystarczy wpisać $T(\vec{i})$ i $T(\vec{j})$ jako kolumny macierzy:

PRZEPIS · MACIERZ PRZEKSZTAŁCENIA

Kolumny macierzy to obrazy wektorów bazy. Pierwsza kolumna to $T(\vec{i})$, druga $T(\vec{j})$ (w 3D trzecia $T(\vec{k})$). Wtedy $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ dla każdego $\vec{v}$.

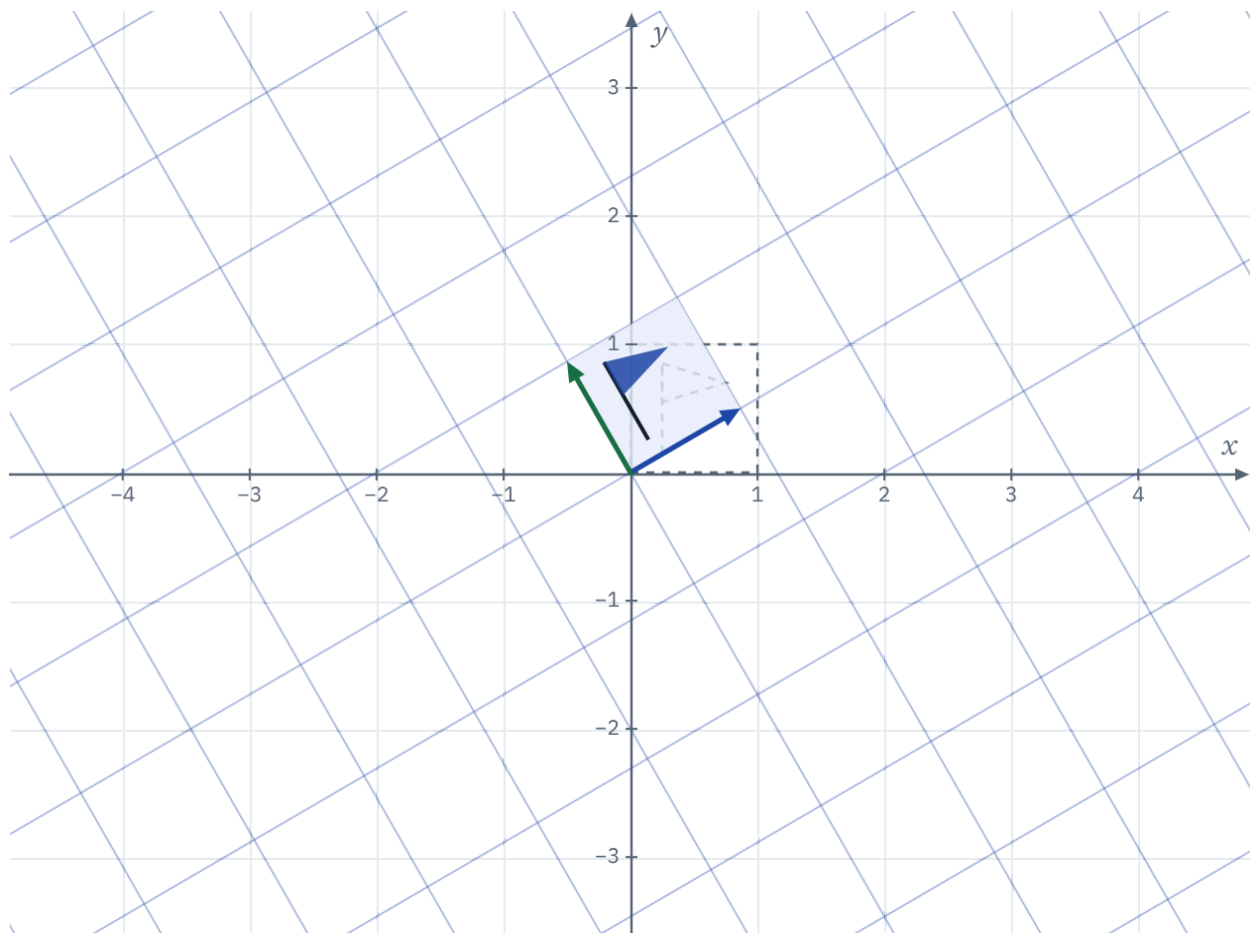
Ten przepis od razu daje macierze najważniejszych przekształceń płaszczyzny. Rozciągnięcie k razy wzdłuż osi x : $\vec{i} \rightarrow k\vec{i}$, $\vec{j} \rightarrow \vec{j}$, więc $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ścinanie (talia kart przesunięta warstwami): $\vec{i} \rightarrow \vec{i}$, $\vec{j} \rightarrow \vec{j} + k\vec{i}$, więc $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Odbicie względem osi x : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Rzut na oś x : $\vec{j} \rightarrow \vec{0}$, więc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Złożenie przekształceń (najpierw S , potem T) to iloczyn macierzy TS . Kolejność czytamy od prawej, jak przy funkcjach: $(TS)\vec{v} = T(S\vec{v})$. Wartość bezwzględna wyznacznika z lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań mówi, ile razy przekształcenie zmienia pola, a znak minus oznacza zmianę orientacji: ścinanie ma wyznacznik 1 (talia kart ma tę samą objętość), odbicie -1 , rzut 0. Rzutu nie da się odwrócić, bo różne wektory (np. $[2; 1]$ i $[2; 5]$) mają ten sam obraz $[2; 0]$: informacja o y zginęła.

SYMULACJA 1

Galeria przekształceń liniowych. Szara siatka i przerywana chorągiewka to stan wyjściowy, kolorowe to obraz. Kolumny macierzy to obrazy wektorów bazy (strzałki). Zwróć uwagę, że w każdym przypadku proste pozostają prostymi, równoległe równoległymi, a początek układu stoi w miejscu.



— $T(i)$ — $T(j)$ — obraz siatki — — stan wyjściowy

$T(i)$ = kolumna 1 $[0,87; 0,50]$

$T(j)$ = kolumna 2 $[-0,50; 0,87]$

det **1,00**

Obrót: kolumny to $[\cos \theta; \sin \theta]$ i $[-\sin \theta; \cos \theta]$. Wyznacznik zawsze 1: pola i orientacja bez zmian.

Stan na rysunku: macierz $(0,87 \ -0,50 \mid 0,50 \ 0,87)$, wyznacznik 1,00.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

6 zadań · ok. 35 min

1 Które z odwzorowań płaszczyzny są liniowe: $(x; y) \mapsto (2x; x + y)$, $(x; y) \mapsto (x + 1; y)$, $(x; y) \mapsto (xy; y)$, $(x; y) \mapsto (y; -x)$?

2 Zapisz macierze: rozciągnięcia 2 razy wzdłuż x i 3 razy wzdłuż y ; odbicia względem osi y ; rzutu na oś y . Podaj ich wyznaczniki.

3 Na co ścinanie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ przeprowadza wierzchołki kwadratu jednostkowego? Jakie pole ma obraz?

4 Przekształcenie liniowe przeprowadza $\vec{i}$ na $[2; 1]$, a $\vec{j}$ na $[-1; 3]$. Zapisz jego macierz i znajdź obraz wektora $[2; -1]$.

5 S rozciąga 2 razy wzdłuż x , R to obrót o 90° . Oblicz RS i SR . Gdzie każde z tych złożań przenosi $\vec{i}$? Opisz słowami różnicę.

6 Niech $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (rzut na oś x). Pokaż, że $P^2 = P$, i wyjaśnij to geometrycznie. Dlaczego P nie ma odwrotności? Jakie wektory przechodzą na zero?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

2 Obroty i odbicia

Obrót płaszczyzny o kąt θ (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) przenosi $\vec{i}$ na $[\cos \theta; \sin \theta]$ (punkt okręgu jednostkowego, lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne), a $\vec{j}$ na wektor obrócony o 90° dalej, $[-\sin \theta; \cos \theta]$. To są kolumny macierzy:

🔧 MACIERZ OBROTU

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta), \quad R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = R(\theta)^\top.$$

$\det R = 1$. Obrót zachowuje długości, kąty i iloczyny skalarne: $(R\vec{u}) \cdot (R\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Wzór na złożenie to wzory na sinus i cosinus sumy (zadanie 2.7 w lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań). W lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory to samo zapisaliśmy krócej: obrót o θ to mnożenie przez $e^{i\theta}$. Macierz $R(\theta)$ i liczba $e^{i\theta}$ opisują to samo przekształcenie płaszczyzny.

Skąd $R^{-1} = R^\top$? Kolumny R mają długość 1 i są do siebie prostopadłe. Element (i, j) iloczynu $R^\top R$ to iloczyn skalarny i -tej kolumny z j -tą, więc $R^\top R = I$. Macierz o tej własności nazywamy **ortogonalną**. Zachowuje iloczyn skalarny, bo $(R\vec{u}) \cdot (R\vec{v}) = \vec{u}^\top R^\top R \vec{v} = \vec{u}^\top \vec{v}$. Macierze ortogonalne to dokładnie obroty (wyznacznik 1) i obroty złożone z odbiciem (wyznacznik -1 ; na płaszczyźnie to po prostu odbicia względem prostych). Innych wyznaczników mieć nie mogą, bo $(\det Q)^2 = \det(Q^\top Q) = 1$. Odwracanie obrotu nie wymaga eliminacji: wystarczy transpozycja.

Przykład 2.1

Obrót punktu

Obróć punkt $(3; 1)$ wokół początku układu o 90° i o 30° .

- 1 $R(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, więc $(3; 1) \rightarrow (-1; 3)$.
- 2 $R(30^\circ): x' = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} \approx 2,10$, $y' = 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,37$.

Wynik: $(-1; 3)$ i $(2,10; 2,37)$.

Sprawdzenie: długość się nie zmienia: $\sqrt{10} \approx 3,162$, a $\sqrt{2,098^2 + 2,366^2} \approx 3,162 \checkmark$.
To samo daje $e^{i\pi/6}(3 + i)$ z lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory.

2.1 Odbicie względem dowolnej prostej

Odbicie względem prostej przez początek układu, nachylonej pod kątem φ , ma macierz

$$O(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad \det O = -1, \quad O^2 = I.$$

Skąd ten wzór, zobaczysz w części 3.2: tam wyprowadzimy go w trzech liniijkach. Na razie sprawdź przypadki szczególne: $\varphi = 0$ daje odbicie względem osi x , a $\varphi = 45^\circ$ daje $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, czyli zamianę x z y (odbicie względem prostej $y = x$).

2.2 Obroty w przestrzeni nie są przemienne

W trzech wymiarach obrót o kąt θ wokół osi z zostawia oś z w spokoju i obraca płaszczyznę xy :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Obroty płaszczyzny są przemienne, bo kąty się po prostu dodają: $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta) = R(\beta)R(\alpha)$ (wszystkie obroty płaszczyzny mają tę samą oś, prostopadłą do płaszczyzny). W przestrzeni już nie. Weź książkę i obróć ją o 90° wokół osi x , a potem wokół z (osie nieruchome, związane z pokojem, a nie z książką). Drugą książkę obróć w odwrotnej kolejności. Leżą inaczej. Macierze mówią to samo:

$$R_z(90^\circ)R_x(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq R_x(90^\circ)R_z(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pierwsza kolumna pokazuje, gdzie trafia $\vec{v}$: w pierwszym przypadku na $\vec{j}$, w drugim na $\vec{k}$. Dlatego trzech kątów obrotu nie można dodawać jak składowych wektora. Orientację samolotu czy satelity opisuje się kątami Eulera (trzy obroty w ustalonej kolejności) albo kwaternionami, a obroty składa się mnożeniem macierzy lub kwaternionów (lekcja 1 Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i kąt, kwaterniony).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Obróć wektor $[2; 0]$ o 60° i o -90° . Sprawdź długość wyników.
- 2 Sprawdź mnożeniem, że $R(60^\circ)^T R(60^\circ) = I$.
- 3 Oblicz $R(120^\circ)^3$ bez mnożenia macierzy. Jakie liczby zespolone odpowiadają temu wynikowi?
- 4 Zapisz macierz odbicia względem prostej $y = 2x$ i znajdź obraz wektora $\vec{v}$.
- 5 Sprawdź na macierzach $R_x(90^\circ)$ i $R_z(90^\circ)$ z części 2.2, gdzie trafia wektor $\vec{k}$ przy obu kolejnościach obrotów.
- 6 Pokaż, że złożenie dwóch odbić, $O(\varphi_2)O(\varphi_1)$, to obrót. O jaki kąt?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Obracamy wektor czy osie? Zmiana bazy

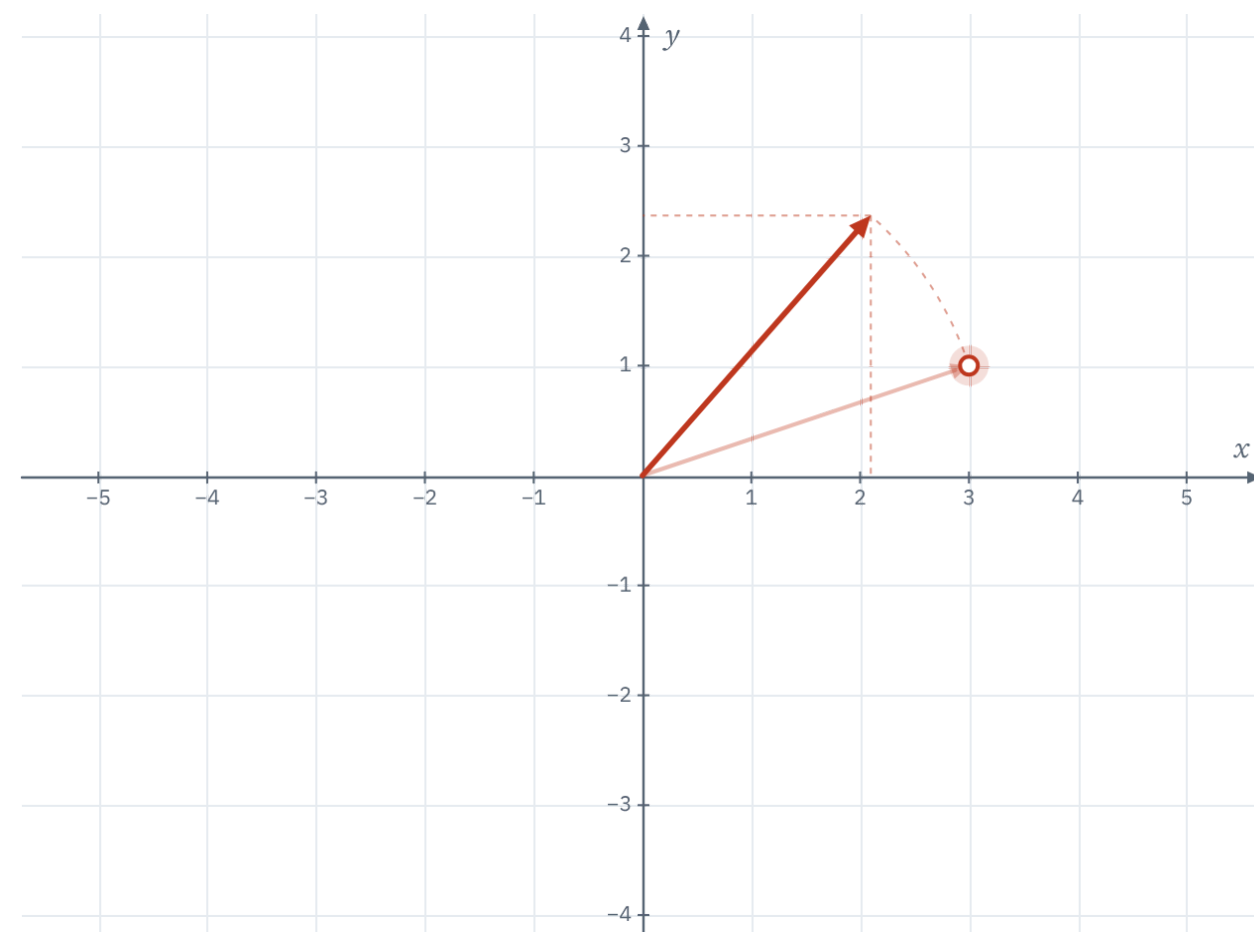
Porównaj wzory Feynmana z prologu z macierzą $R(\theta)$. Feynman ma $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$, czyli *plus* przy sinusie w pierwszym wierszu, a $R(\theta)$ ma tam minus. To nie błąd. Są dwa różne pytania:

- **Obrót wektora** (punkt widzenia aktywny): osie stoją, wektor obraca się o θ . Nowe współrzędne: $R(\theta)\vec{v}$.
- **Obrót osi** (punkt widzenia pasywny): wektor stoi, osie obracają się o θ . Względem nowych osi wektor wygląda tak, jakby obrócił się o $-\theta$. Nowe współrzędne: $R(-\theta)\vec{v} = R(\theta)^T \vec{v}$.

Przy zmianie obserwatora chodzi o drugie: zjawisko jest jedno, a zmienia się tylko jego opis. Pomylenie tych dwóch punktów widzenia to częste źródło błędów znaku w mechanice bryły sztywnej i w nawigacji.

SYMULACJA 2

Obrót aktywny i pasywny. W trybie „obracam wektor” osie stoją, a wektor się obraca. W trybie „obracam osie” wektor stoi, a nowe osie x' , y' obracają się o ten sam kąt. Porównaj współrzędne: w drugim trybie wychodzą takie, jak przy obrocie wektora o kąt przeciwny. Długość jest w obu przypadkach ta sama.



— v — osie x, y — osie x', y' (tryb „obracam osie”)

v (w osiach x, y) $[3,00; 1,00]$

$(x; y)$ obróconego wektora $= R(\theta) \cdot v$ $[2,10; 2,37]$

długość $3,162 = 3,162$

Stan na rysunku: obrót wektora o $\theta = 30^\circ$, $v = [3,00; 1,00]$; współrzędne $[2,10; 2,37]$.

3.1 Współrzędne w dowolnej bazie

Obrót osi to szczególny przypadek ogólniejszej operacji. Bazą płaszczyzny jest każda para liniowo niezależnych (niezerowych i nierównoległych) wektorów $\vec{b}_1, \vec{b}_2$: każdy wektor da się wtedy zapisać jednoznacznie jako $\vec{v} = x'_1 \vec{b}_1 + x'_2 \vec{b}_2$. Liczby x'_1, x'_2 to **współrzędne w bazie** $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Jeśli P to macierz o kolumnach $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, to $\vec{v} = P\vec{x}'$, a więc

🔧 ZMIANA BAZY

$$\vec{v} = P \vec{x}', \quad \vec{x}' = P^{-1} \vec{v}, \quad A' = P^{-1} A P.$$

P ma w kolumnach nowe wektory bazy (zapisane w starej). A' to macierz tego samego przekształcenia co A , ale zapisana w nowej bazie: przejdź do starej (P), działaj (A), wróć do nowej (P^{-1}).

Macierze A i $A' = P^{-1} A P$ nazywamy **podobnymi**. Opisują to samo przekształcenie w różnych bazach, więc mają te same własności geometryczne: ten sam wyznacznik (współczynnik zmiany pól nie zależy od opisu) i ten sam ślad, czyli sumę elementów na przekątnej (zadanie 3.6). Dla bazy ortonormalnej (wektory jednostkowe i prostopadłe, np. obrócone osie) $P^{-1} = P^T$. Przy obrocie osi $P = R(\theta)$, więc $\vec{x}' = R(\theta)^T \vec{v}$: to są wzory Feynmana z prologu.

Przykład 3.1

Macierz, która w dobrej bazie jest prosta

Przekształcenie ma macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Zapisz je w bazie $\vec{b}_1 = [1; 1]$, $\vec{b}_2 = [-1; 1]$. Co ono robi geometrycznie?

- 1 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = 2$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 2 $AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$: pierwsza kolumna to $3\vec{b}_1$, druga to $\vec{b}_2$.
- 3 $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wynik: w nowej bazie przekształcenie to rozciągnięcie 3 razy wzdłuż prostej $y = x$, a kierunek prostopadły zostaje bez zmian.

Sprawdzenie: ślad $2 + 2 = 3 + 1 \checkmark$, wyznacznik $4 - 1 = 3 \cdot 1 \checkmark$. Wprost: $A[1; 1] = [3; 3] \checkmark$, $A[-1; 1] = [-1; 1] \checkmark$.

Szukanie bazy, w której macierz staje się przekątniowa, to temat lekcji 2.3 Wartości i wektory własne: wektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ z przykładu to wektory własne A , a liczby 3 i 1 to wartości własne.

3.2 Wzór na odbicie z dobrze dobranej bazy

Teraz obiecane wyprowadzenie wzoru na odbicie. W bazie złożonej z wersora prostej $\hat{u} = [\cos \varphi; \sin \varphi]$ i wersora do niej prostopadłego $\hat{n} = [-\sin \varphi; \cos \varphi]$ odbicie jest trywialne: $\hat{u} \rightarrow \hat{u}$,

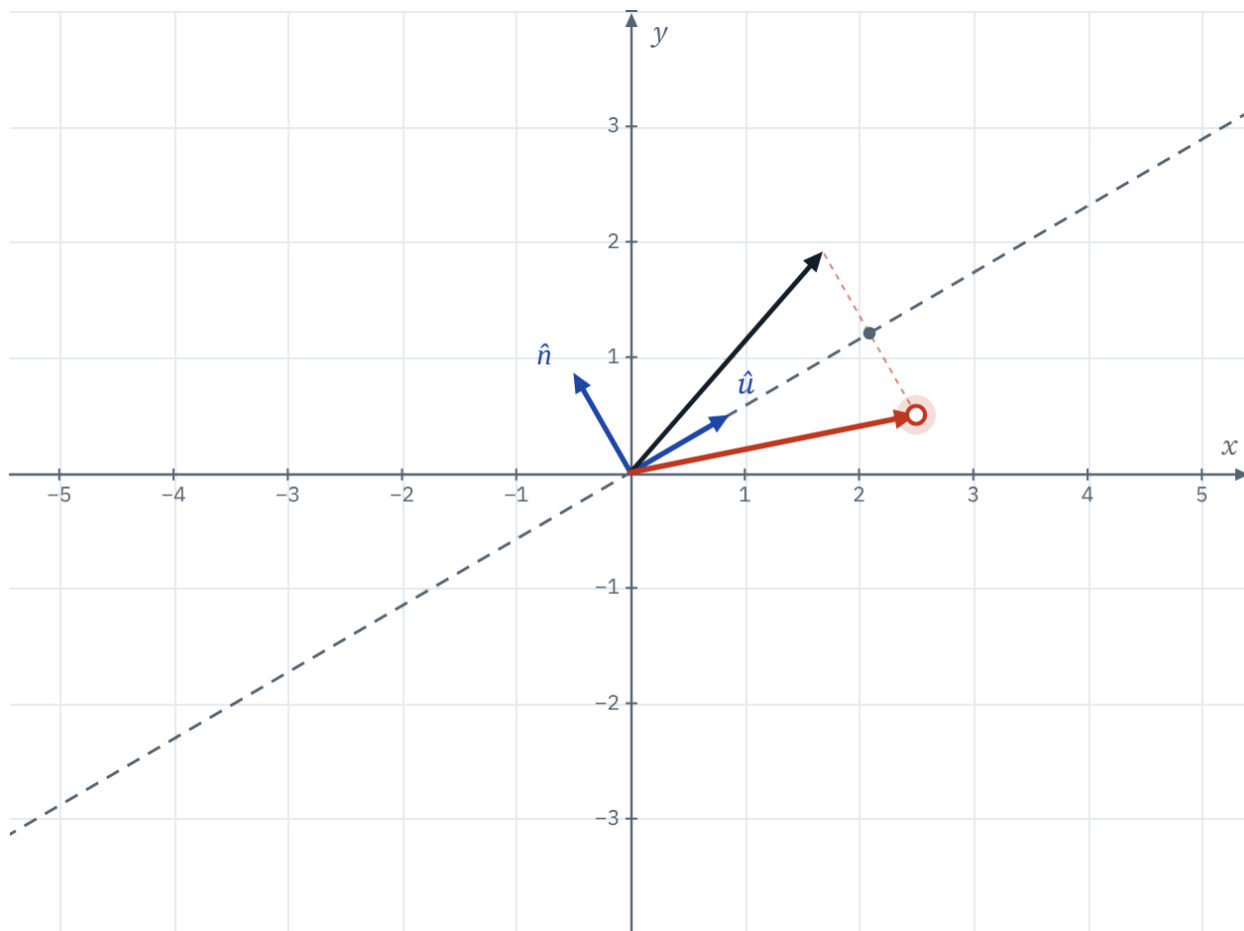
$\hat{n} \rightarrow -\hat{n}$, czyli $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Macierz P o kolumnach $\hat{u}, \hat{n}$ to $R(\varphi)$. Z $A' = P^{-1}AP$ mamy $A = PA'P^{-1}$, a tu $P^{-1} = R(\varphi)^\top$. Zatem

$$O(\varphi) = R(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\varphi)^\top = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Ta sama metoda działa dla każdego przekształcenia, które ma „naturalne” kierunki: wybierz bazę zgodną z geometrią problemu, zapisz tam prostą macierz i wróć do zwykłych osi.

SYMULACJA 3

Odbicie względem prostej w dwóch bazach. Wektory $\hat{u}$ (wzdłuż prostej) i $\hat{n}$ (prostopadle) tworzą nową bazę. Przeciągaj koniec wektora $\vec{v}$ i zmieniaj kąt prostej. W nowej bazie odbicie tylko zmienia znak drugiej współrzędnej, a w zwykłych osiach jego macierz wygląda skomplikowanie.



— v — obraz v — $\hat{u}, \hat{n}$ (nowa baza) - - prosta odbicia

v w bazie $(\hat{u}, \hat{n})$ $[2,42; -0,82]$

obraz w bazie $(\hat{u}, \hat{n})$ $[2,42; 0,82]$

macierz w bazie $(\hat{u}, \hat{n})$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

macierz w osiach x, y $\begin{pmatrix} 0,50 & 0,87 \\ 0,87 & -0,50 \end{pmatrix}$

obraz w osiach x, y $[1,68; 1,92]$

Stan na rysunku: $\phi = 30^\circ$, $v = [2,50; 0,50]$, obraz $[1,68; 1,92]$; w bazie $(\hat{u}, \hat{n})$: $[2,42; -0,82] \rightarrow [2,42; 0,82]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Joe widzi punkt $(3; 4)$. Osie Moe są obrócone o 30° . Jakie współrzędne zapisze Moe?
■ ■ Sprawdź odległość od początku.

- 2 Znajdź współrzędne wektora $[5; 3]$ w bazie $\vec{b}_1 = [2; 1]$, $\vec{b}_2 = [1; 1]$.
- 3 Zapisz przekształcenie $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ w bazie z zadania 3.2. Sprawdź, że ślad i wyznacznik się nie zmieniły.
- 4 Odbij wektor $[2; 0]$ względem prostej nachylonej pod kątem 30° . Sprawdź wynik geometrycznie.
- 5 Wyjaśnij jednym zdaniem, dlaczego wzory Feynmana na x' , y' mają przy $\sin \theta$ znaki przeciwne niż macierz $R(\theta)$. Zapisz je jako $R(-\theta)\vec{v}$.
- 6 Pokaż, że $\det(P^{-1}AP) = \det A$. Pokaż też (rachunkiem dla 2×2 albo z tożsamości $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$), że ślad się nie zmienia.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

4 Transformacja Lorentza: obrót hiperboliczny

Wróćmy do pytania z prologu. Obserwator S' porusza się względem S z prędkością v wzdłuż osi x . Szczególna teoria względności mówi (transformację wyprowadzimy w fizyce, Dział 7: Układy odniesienia i szczególna teoria względności; tutaj bierzemy gotowy wynik), że współrzędne zdarzenia przeliczamy transformacją Lorentza: FLP I-15-2

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Przyjmijmy oznaczenia $\beta = v/c$ i $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ (czynnik Lorentza; w tym kursie γ oznacza zwykle współczynnik tłumienia, a jako czynnik Lorentza pojawia się tylko tu i w fizyce, Dział 7: Układy odniesienia i szczególna teoria względności). Mierzmy czas w jednostkach długości, ct , tak jak w diagramach czasoprzestrzeni. Wtedy transformacja jest symetryczna:

🔧 TRANSFORMACJA LORENTZA W POSTACI MACIERZOWEJ

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{L(\beta)} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \det L = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1, \quad L(\beta)^{-1} = L(-\beta).$$

Zachowuje interwał: $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$.

Dla dwóch zdarzeń interwał to $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$. Też jest niezmienniczy, bo L jest liniowa: różnice współrzędnych przekształcają się tak samo jak współrzędne.

Odwrotność $L(-\beta)$ ma prosty sens: S porusza się względem S' z prędkością $-v$. Niezmienniczość interwału łatwo sprawdzić: $(ct')^2 - x'^2 = \gamma^2[(ct - \beta x)^2 - (x - \beta ct)^2] = \gamma^2(1 - \beta^2)[(ct)^2 - x^2]$. Feynman wskazuje tę analogię wprost: transformacja Lorentza jest dla czasoprzestrzeni tym, czym obrót dla przestrzeni, a interwał odgrywa rolę odległości. FLP I-17-1, 17-2 Różnica jest w jednym znaku: obrót zachowuje $x^2 + y^2$, czyli okręgi, a transformacja Lorentza zachowuje $(ct)^2 - x^2$, czyli hiperbole.

4.1 Pospieszność: kąt hiperboliczny

W lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne funkcje hiperboliczne spełniały $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$, tak jak $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Skoro $\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$, możemy napisać $\gamma = \cosh \phi$, $\beta\gamma = \sinh \phi$ dla pewnej liczby ϕ , zwanej **pospiesznością** (ang. *rapidity*, lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne). Uwaga: ϕ to co innego niż kąt φ prostej odbicia z części 2 i 3. Wtedy $\beta = \tanh \phi$ i

$$L = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}, \quad \text{porównaj:} \quad R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Wzory na sumę, $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$ i $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$ (sprawdź z definicji), różnią się od trygonometrycznych tylko znakiem w cosh. Dlatego tak jak $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$, tak **pospieszności się dodają**: macierz $\Lambda(\phi)$, czyli L wyrażona przez ϕ , spełnia $\Lambda(\phi_1)\Lambda(\phi_2) = \Lambda(\phi_1 + \phi_2)$. Prędkości się nie dodają, ale ich „kąty hiperboliczne” tak. Stąd relatywistyczne składanie prędkości:

$$\beta_{12} = \tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

Ponieważ $\tanh$ nigdy nie osiąga 1, złożenie dowolnie wielu prędkości mniejszych od c daje prędkość mniejszą od c . Dla małych prędkości $\tanh \phi \approx \phi$ i pospieszność to po prostu β : wracamy do zwykłego dodawania.

Przykład 4.1

Zdarzenie w dwóch układach

W układzie S zdarzenie zaszło w chwili $t = 5$ lat w odległości $x = 4$ lat świetlnych, czyli $(ct; x) = (5; 4)$ w latach świetlnych. Jakie współrzędne przypisze mu obserwator lecący z prędkością $0,6c$ wzdłuż osi x ? Ile wynosi pospieszność?

- 1 $\beta = 0,6$, $\gamma = 1/\sqrt{1-0,36} = 1,25$, $\beta\gamma = 0,75$.
- 2 $ct' = 1,25 \cdot 5 - 0,75 \cdot 4 = 3,25$, $x' = -0,75 \cdot 5 + 1,25 \cdot 4 = 1,25$.
- 3 Pospieszność: $\cosh \phi = 1,25$, $\sinh \phi = 0,75$, więc $e^\phi = \cosh \phi + \sinh \phi = 2$ i $\phi = \ln 2 \approx 0,693$.

Wynik: $(ct'; x') = (3,25; 1,25)$ lat świetlnych, pospieszność $\ln 2$.

Sprawdzenie: interwał $5^2 - 4^2 = 9$ i $3,25^2 - 1,25^2 = 10,5625 - 1,5625 = 9 \checkmark$.

Przypadek graniczny (sprawdzenie wzoru, nie liczb): dla $v \ll c$ (formalnie $c \rightarrow \infty$ przy stałym v) $t' = \gamma(t - vx/c^2) \rightarrow t$ i $x' \rightarrow x - vt$, czyli transformacja Galileusza.

Przykład 4.2

$0,6c$

plus

$0,6c$

Statek leci z prędkością $0,6c$ względem Ziemi i wystrzeliwuje do przodu sondę z prędkością $0,6c$ względem siebie. Jak szybko sonda leci względem Ziemi?

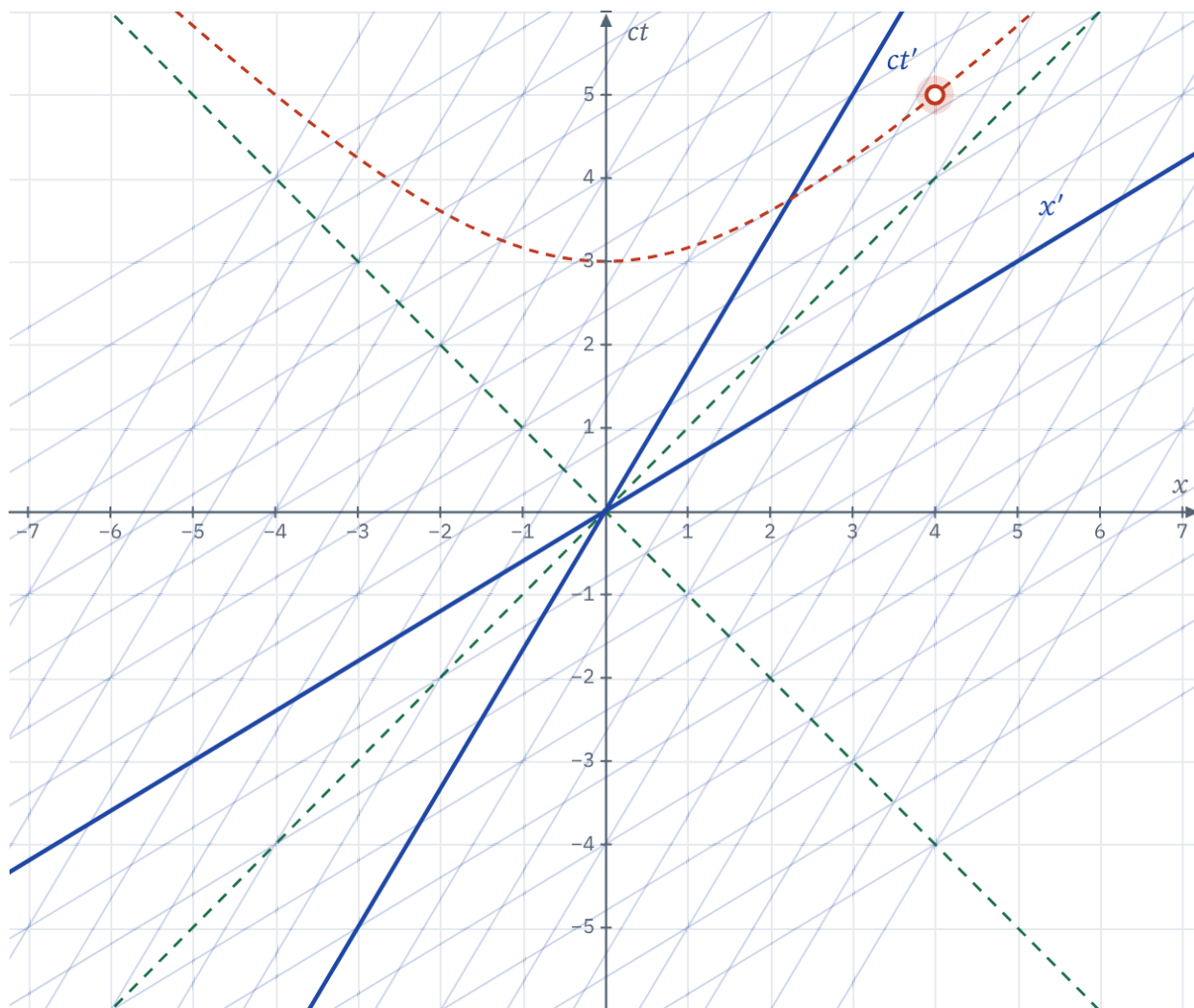
- 1 Pospieszności: $\phi_1 = \phi_2 = \ln 2$ (przykład 4.1), suma $\ln 4$.
- 2 $\beta = \tanh(\ln 4) = \frac{4 - 1/4}{4 + 1/4} = \frac{15}{17} \approx 0,882$.

Wynik: $\frac{15}{17}c \approx 0,882c$, a nie $1,2c$.

Sprawdzenie: wzór na składanie prędkości daje $\frac{1,2}{1+0,36} = \frac{1,2}{1,36} = \frac{15}{17} \checkmark$. Mnożenie dwóch macierzy L dla $\beta = 0,6$ daje $\gamma = \frac{17}{8}$ i $\beta\gamma = \frac{15}{8}$, więc $\beta = \frac{15}{17} \checkmark$.

SYMULACJA 4

Diagram czasoprzestrzeni. Oś czasu ct jest pionowa, oś x pozioma, linie przerywane pod kątem 45° to promienie światła. Zmieniaj β : osie ct' i x' układu S' zbliżają się do linii światła jak nożyce. Przy ustalonym zdarzeniu jego współrzędne $(ct'; x')$ się zmieniają, ale zdarzenie zostaje na tej samej hiperboli $(ct)^2 - x^2 = \text{const}$. Przeciągaj zdarzenie, żeby wybrać inną hiperbolę.



— osie S (ct, x) — osie S' (ct', x') - - światło - - hiperbola $(ct)^2 - x^2 = \text{const}$

γ 1,250

prędkość β 0,693

$(ct; x)$ w S [5,00; 4,00]

$(ct'; x')$ w S' [3,25; 1,25]

$(ct)^2 - x^2$ 9,00 = 9,00

interwał czasowy (> 0)

Stan na rysunku: $\beta = 0,60$, $\gamma = 1,250$; $(ct; x) = [5,00; 4,00]$ w S, $(ct'; x') = [3,25; 1,25]$ w S'; interwał 9,00.

Zestawmy oba przekształcenia. To jedna z najważniejszych tabel w fizyce, bo mówi, jak teoria względności „przerabia” geometrię Euklidesa:

	obrót osi (płaszczyzna xy)	transformacja Lorentza (płaszczyzna ct, x)
macierz	$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}$
niezmiennik	$x^2 + y^2$ (okrąg)	$(ct)^2 - x^2$ (hiperbola)
parametr	kąt θ ; $\tan \theta$ to nachylenie osi x'	pospieszność ϕ ; $\tanh \phi = \beta$ to nachylenie osi x' na diagramie
złożenie	kąty się dodają	pospieszności się dodają
wyznacznik	1	1

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

6 zadań · ok. 40 min

- Oblicz γ dla $\beta = 0,1; 0,5; 0,9; 0,99$. Od jakiej prędkości efekty relatywistyczne przekraczają 1%?
- Sprawdź mnożeniem, że $L(\beta)L(-\beta) = I$.
- W układzie S dwa zdarzenia zachodzą jednocześnie ($ct = 0$) w punktach $x = 0$ i $x = 3$. Jakie współrzędne mają w układzie S' poruszającym się z $\beta = 0,6$? Czy w S' są jednoczesne? Oblicz interwał między nimi w obu układach.
- Złóż prędkości $0,6c$ i $0,8c$, dodając pospieszności. Porównaj ze wzorem na składanie prędkości.
- Pokaż, że $e^\phi = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. (To czynnik relatywistycznego efektu Dopplera.)
- Linie świata promieni światła to $x = \pm ct$. Pokaż, że transformacja Lorentza przeprowadza każdą z tych prostych na siebie, i oblicz, przez jaką liczbę mnożony jest wektor $[1; 1]$, a przez jaką $[1; -1]$. W jakiej bazie macierz L jest przekątniowa?

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

Błędne intuicje

× „Przekształcenie liniowe to takie, które nie wygina prostych.”

To za mało. Przesunięcie nie wygina prostych, a nie jest liniowe, bo przesuwają zero. Liniowe musi zachowywać sumy i wielokrotności.

× „Wzór na obrót osi to ta sama macierz co obrót wektora.”

Nie: różnią się znakiem kąta. Obrót osi o θ działa na współrzędne jak $R(-\theta)$ (część 3). Zawsze ustal, czy obracasz obiekt, czy opis.

× „Kolejność obrotów nie ma znaczenia.”

Na płaszczyźnie nie ma. W przestrzeni ma, i to bardzo (książka w części 2.2).

× „Macierz przekształcenia jest jedna.”

Przekształcenie jest jedno, macierzy tyle, ile baz. Te same są tylko wielkości niezależne od bazy: wyznacznik, ślad (i wartości własne z lekcji 2.3 Wartości i wektory własne).

× „Transformacja Lorentza to obrót w czasoprzestrzeni, więc zachowuje $(ct)^2 + x^2$.”

Zachowuje $(ct)^2 - x^2$. To obrót hiperboliczny, a nie zwykły: jej elementy to cosh i sinh, a nie cos i sin, i osie ct' , x' zbliżają się do siebie zamiast pozostać prostopadłe na diagramie.

× „Prędkości przy transformacji Lorentza się dodają.”

Dodają się pospieszności $\phi = \operatorname{artanh} \beta$. Prędkości składa się wzorem $\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$, który dla małych β daje zwykłą sumę.

Sprawdź się

1 Jak odczytać macierz przekształcenia, wiedząc, gdzie trafiają $\vec{i}$ i $\vec{j}$?

Obrazy $\vec{i}$ i $\vec{j}$ to kolumny macierzy.

2 Jaki wyznacznik ma obrót, a jaki odbicie?

1 i -1 .

3 Jak najszybciej odwrócić macierz obrotu?

Przetransponować ją: $R^{-1} = R^T$.

4 W macierzy P do zmiany bazy co stoi w kolumnach?

Nowe wektory bazy zapisane w starych współrzędnych.

5 Co nie zmienia się przy zmianie bazy $A \rightarrow P^{-1}AP$?

Wyznacznik i ślad.

6 Co zachowuje transformacja Lorentza?

Interwał $(ct)^2 - x^2$.

7 Co się dodaje przy składaniu dwóch transformacji Lorentza wzdłuż tej samej osi?

Pospieszności ϕ (a nie prędkości).

PRZEKSZTAŁCENIA I OBROTY

liniowe: $T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$;
 $T(\vec{0}) = \vec{0}$

kolumny macierzy = obrazy wektorów bazy

złożenie „najpierw S , potem T ”: TS

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; R^{-1} = R^T =$$

$$R(-\theta)$$

$$\text{odbicie: } O(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

ortogonalna: $Q^T Q = I$, zachowuje $\vec{u} \cdot \vec{v}$;
 $\det Q = \pm 1$

w 3D obroty nie są przemienne

ZMIANA BAZY I LORENTZ

obróć osi o θ : współrzędne $\rightarrow R(-\theta)\vec{v}$

$$\vec{v} = P\vec{x}', \vec{x}' = P^{-1}\vec{v}, A' = P^{-1}AP$$

niezmienniki: $\det A$, $\text{tr } A$

$$\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}; L =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \text{ na } (ct; x)$$

$$(ct)^2 - x^2 \text{ niezmiennicze; } \det L = 1;$$

$$L^{-1} = L(-\beta)$$

$$\gamma = \cosh \phi, \beta\gamma = \sinh \phi, \beta = \tanh \phi, e^\phi = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$\text{pospieszności się dodają: } \beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 11-2 i 11-3 (Joe i Moe: przesunięcie i obrót osi, skąd się bierze pojęcie wektora).
- **Dla chętnych:** 15-2 (transformacja Lorentza) i 17-1, 17-2 (geometria czasoprzestrzeni, interwał jako odpowiednik odległości).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: rozdziały o macierzach (przekształcenia, macierze obrotu).
- **G. Strang**, *Introduction to Linear Algebra*: rozdział o przekształceniach liniowych i zmianie bazy.

Przykład 3.1 i zadanie 4.6 pokazały, że w dobrze dobranej bazie macierz staje się przekątniowa. Jak taką bazę znaleźć, mówi lekcja 2.3 Wartości i wektory własne: wartości i wektory własne. Zmiana bazy wróci przy współrzędnych krzywoliniowych (3.2 Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne), a transformacja Lorentza w lekcji o szczególnej teorii względności (Dział 7: Układy odniesienia i szczególna teoria względności), gdzie wyprowadzimy ją z dwóch postulatów Einsteina.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Pierwsze i czwarte (obrot o -90°). Drugie przesuw zero, trzecie zawiera iloczyn xy : podwojenie wektora czterokrotnie zwiększa pierwszą składową.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, wyznacznik 6; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wyznacznik -1 ; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wyznacznik 0.
3. $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 1)$, $(1; 1)$: równoległobok o polu 1, zgodnie z wyznacznikiem.
4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $2 \cdot [2; 1] - [-1; 3] = [5; -1]$.
5. $RS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $SR = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $RS\vec{i} = [0; 2]$ (najpierw rozciągnięcie, potem obrót), $SR\vec{i} = [0; 1]$ (obrot wyprowadził $\vec{i}$ na oś y , a rozciągnięcie wzdłuż x już go nie dotyczy).
6. Rzut wektora, który już leży na osi, nic nie zmienia, więc dwa rzuty to jeden rzut. $\det P = 0$: wszystkie wektory $[x; y]$ o tym samym x mają ten sam obraz, więc nie da się odtworzyć y . Na zero przechodzi cała oś y , czyli wektory $[0; t]$.

Zadania · część 2

1. $[1; \sqrt{3}] \approx [1; 1,73]$ i $[0; -2]$. Oba mają długość 2.
2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = I \checkmark$.
3. $R(360^\circ) = I$. To odpowiednik $(e^{2\pi i/3})^3 = 1$: $e^{2\pi i/3}$ jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z jedynki (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory).
4. $\cos 2\varphi = -\frac{3}{5}$, $\sin 2\varphi = \frac{4}{5}$: $\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$. Obraz $\vec{i}$: $[-0,6; 0,8]$. Sprawdzenie: środek odcinka od $[1; 0]$ do $[-0,6; 0,8]$ to $[0,2; 0,4]$, leży na prostej $y = 2x \checkmark$.
5. Trzecie kolumny iloczynów: $R_z R_x \vec{k} = \vec{i}$, $R_x R_z \vec{k} = -\vec{j}$.
6. Wymnażając i używając wzorów na cosinus i sinus różnicy: $O(\varphi_2)O(\varphi_1) = R(2(\varphi_2 - \varphi_1))$. Wyznacznik $(-1)(-1) = 1$ zgadza się z obrotem. Dwa lustra pod kątem 30° dają obrót o 60° ; tak działa kalejdoskop.

Zadania · część 3

1. $x' = 3 \cos 30^\circ + 4 \sin 30^\circ \approx 4,60$, $y' = 4 \cos 30^\circ - 3 \sin 30^\circ \approx 1,96$. $\sqrt{4,598^2 + 1,964^2} \approx 5 \checkmark$.
2. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, więc $\vec{x}' = [2; 1]$. Sprawdzenie: $2[2; 1] + [1; 1] = [5; 3] \checkmark$.
3. $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. Ślad $5 - 1 = 4 = 3 + 1 \checkmark$, wyznacznik $-5 + 8 = 3 \checkmark$. Prosta macierz w jednej bazie może wyglądać skomplikowanie w innej.

4. $O(30^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, obraz $[1; \sqrt{3}] \approx [1; 1,73]$. Wektor $[2; 0]$ leży 30° pod prostą, obraz 30° nad nią, czyli pod kątem 60° do osi x , z tą samą długością $2 \checkmark$.

5. Obrót osi o θ wygląda dla obserwatora w nowych osiach jak obrót wektora o $-\theta$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(-\theta)\vec{v}$.

6. $\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$, bo $\det P^{-1} = 1/\det P$. Ślad: $\text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr} A$. Tożsamość $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ wynika z $\sum_{i,k} x_{ik}y_{ki} = \sum_{k,i} y_{ki}x_{ik}$.

Zadania · część 4

1. 1,005; 1,155; 2,29; 7,09. $\gamma = 1,01$ dla $\beta \approx 0,14$, czyli około 42 000 km/s.

2. $\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 \\ 0 & \gamma^2(1-\beta^2) \end{pmatrix} = I \checkmark$.

3. Pierwsze: $(0; 0)$. Drugie: $ct' = -0,75 \cdot 3 = -2,25$, $x' = 1,25 \cdot 3 = 3,75$. Nie są jednoczesne: w S' drugie zaszło wcześniej. Interwał $0 - 9 = -9$ i $2,25^2 - 3,75^2 = 5,0625 - 14,0625 = -9 \checkmark$. Ujemny interwał (przy naszym znaku) oznacza, że żaden sygnał nie zdąży przebiec od jednego zdarzenia do drugiego.

4. $\phi = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$, $\tanh(\ln 6) = \frac{36-1}{36+1} = \frac{35}{37} \approx 0,946$. Wzór: $\frac{1,4}{1+0,48} = \frac{1,4}{1,48} = \frac{35}{37} \checkmark$.

5. $e^\phi = \cosh \phi + \sinh \phi = \gamma(1 + \beta) = \frac{1 + \beta}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$. Dla $\beta = 0,6$: $\sqrt{4} = 2 \checkmark$.

6. $L[1; 1] = \gamma(1 - \beta)[1; 1] = e^{-\phi}[1; 1]$ i $L[1; -1] = \gamma(1 + \beta)[1; -1] = e^\phi[1; -1]$. Linie światła są niezmienione (prędkość światła jest w obu układach ta sama). Wektor $[1; 1]$ zostaje pomnożony przez $e^{-\phi}$ (skraca się e^ϕ razy), a $[1; -1]$ przez e^ϕ . W bazie $[1; 1]$, $[1; -1]$ macierz L to $\begin{pmatrix} e^{-\phi} & 0 \\ 0 & e^\phi \end{pmatrix}$. To znów wektory i wartości własne (2.3 Wartości i wektory własne).

Matematyka · Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 11-2, 11-3, 15-2, 17-1, 17-2; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*; G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.