

Macierze, wyznaczniki i układy równań

Lampa wisi na dwóch linach. Ile wynosi naciąg każdej z nich? Prąd płynie przez trzy gałęzie obwodu. Jakie są natężenia? To pytania o układy równań liniowych, a w fizyce i technice takie układy pojawiają się na każdym kroku. Ta lekcja daje jedną metodę, która działa zawsze: eliminację Gaussa. Do tego dochodzi zapis, który porządkuje rachunki (macierze), i jedna liczba, która mówi, czy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (wyznacznik). Na końcu zobaczysz, czemu „ma rozwiązanie” to jeszcze nie „da się je wiarygodnie policzyć”.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h
zadań

ZADANIA

30 zadań w treści,
z
podpowiedziami i
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

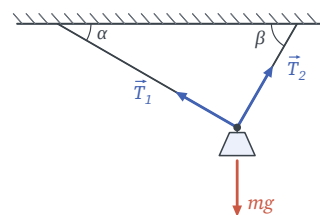
K. A. Stroud,
*Engineering
Mathematics;
Feynmana
wykłady z fizyki*, t.
II, 31-1

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: lampa na dwóch linach
- 1 Układy równań i eliminacja Gaussa
- 2 Macierze i działania na nich
- 3 Wyznacznik
- 4 Macierz odwrotna i wzory Cramera
- 5 Zastosowania i uwarunkowanie
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: lampa na dwóch linach

Lampa o masie 12 kg wisi na dwóch linach. Lewa tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$, prawa kąt $\beta = 60^\circ$. Lampa się nie porusza, więc siły się równoważą (to pierwsza zasada dynamiki, Dział 1: Ruch i jego przyczyny). Składowe poziome naciągów T_1 i T_2 muszą się znosić, a pionowe razem muszą utrzymać ciężar $mg = 117,72$ N:



$$\begin{cases} -T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0 \\ T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = mg \end{cases}$$

To układ dwóch równań liniowych z niewiadomymi T_1, T_2 . W lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste rozwiązywaliśmy takie układy wzorami Cramera. Wyznacznik układu wynosi $W = -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta = -\sin(\alpha + \beta)$, a rozwiązanie

$$T_1 = \frac{mg \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 58,9 \text{ N}, \quad T_2 = \frac{mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 101,9 \text{ N}.$$

Bardziej stroma lina niesie więcej, co zgadza się z intuicją. Ciekawsze jest co innego: wyznacznik stoi w mianowniku. Gdy liny są prawie poziome, $\alpha + \beta$ jest małe i $W \approx 0$, a naciągi rosną bez ograniczeń.

Pytanie na start. Lampę zawieszono symetrycznie na linach nachylonych pod kątem 5° do poziomu. Zgadnij, zanim policzysz: naciąg każdej liny jest mniejszy od ciężaru lampy, porównywalny z nim czy kilka razy większy? Odpowiedź w zadaniu 5.1.

W tej lekcji uogólnimy to, co znasz z układu 2×2 , na dowolną liczbę niewiadomych. Fizyka potrzebuje tego stale: trzy składowe siły, trzy prądy w obwodzie, tysiące węzłów w symulacji. Wyznacznik okaże się nie tylko „liczbą z mianownika”, ale też polem i objętością, czyli wielkością geometryczną z lekcji 1.1 Wektory.

Układy równań i eliminacja Gaussa

Równanie liniowe z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ ma postać $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$:

niewiadome występują tylko w pierwszej potędze i nie mnożą się przez siebie. **Układ** m takich równań zapisujemy krótko, wypisując same współczynniki w prostokątnej tabeli. Pionowa kreska oddziela współczynniki od prawych stron:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \end{array} \right).$$

Tabela po lewej stronie kreski to **macierz układu** A , a cała tabela to **macierz rozszerzona** $[A \mid \vec{b}]$. Wiersz odpowiada równaniu, kolumna niewiadomej (ostatnia kolumna: prawym stronom).

1.1 Trzy operacje, które nie zmieniają rozwiązań

OPERACJE ELEMENTARNE NA WIERSZACH

1. zamiana dwóch wierszy miejscami: $w_i \leftrightarrow w_j$;
2. pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera: $w_i \leftarrow c w_i, c \neq 0$;
3. dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza: $w_i \leftarrow w_i + c w_j$.

Każda z nich zamienia układ na **równoważny**, czyli o tych samych rozwiązaniach.

Dlaczego? Każdą z tych operacji da się cofnąć operacją tego samego typu: drugi raz zamienić wiersze, pomnożyć przez $1/c$, odjąć to, co się dodało. Rozwiązanie starego układu spełnia nowy, a skoro da się wrócić, to rozwiązanie nowego spełnia stary. Dlatego zakaz mnożenia przez zero jest ważny: tej operacji nie da się cofnąć. To ta sama zasada co przy jednym równaniu w lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste.

Eliminacja Gaussa to plan użycia tych operacji. Bierzemy pierwszą kolumnę i jej element w pierwszym wierszu, zwany **elementem głównym** (ang. *pivot*). Odejmując wielokrotności pierwszego wiersza, zerujemy wszystko pod nim. Jeśli element główny jest zerem, najpierw zamieniamy wiersz z którymś niższym. Jeśli w całej kolumnie od bieżącego wiersza w dół stoją zera, ta kolumna nie ma elementu głównego i przechodzimy do następnej. Potem to samo robimy z drugą kolumną i wierszami od drugiego w dół, i tak dalej. Na końcu macierz ma **postać schodkową**: każdy kolejny element główny leży bardziej na prawo niż poprzedni, a pod nimi są same zera. Ostatnie równanie ma jedną niewiadomą, przedostatnie dwie i tak dalej, więc rozwiązujemy je od dołu (**podstawianie wsteczne**).

Przykład 1.1

Układ 3×3 krok po kroku

Rozwiąż układ z początku tej części.

- 1 Zerujemy pierwszą kolumnę pod jedynką: $w_2 \leftarrow w_2 - 2w_1$ i $w_3 \leftarrow w_3 - w_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

- 2 Zerujemy drugą kolumnę pod elementem -1 : $w_3 \leftarrow w_3 + 2w_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right).$$

- 3 Od dołu: $-5z = -15$, więc $z = 3$. Potem $-y - 3 \cdot 3 = -11$, więc $y = 2$. Na końcu $x = 6 - 2 - 3 = 1$.

Wynik: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Sprawdzenie: wstawiamy do wyjściowych równań (nie do przekształconych, bo błąd w eliminacji by się nie ujawnił): $1 + 2 + 3 = 6 \checkmark$, $2 + 2 - 3 = 1 \checkmark$, $1 + 6 + 6 = 13 \checkmark$.

Można też iść dalej: zamiast podstawiać wstecz, zerujemy elementy *nad* elementami głównymi i dzielimy każdy wiersz przez jego element główny. Na końcu po lewej stoi tabela z jedynkami na przekątnej i zerami gdzie indziej, a po prawej gotowe rozwiązanie. To **metoda Gaussa-Jordana**. Przy rachunkach ręcznych jest nieco dłuższa, ale przyda się do macierzy odwrotnej w części 4.

SYMULACJA 1

Eliminacja Gaussa-Jordana krok po kroku na ułamkach zwykłych, bez zaokrągleń. Wybierz układ i przechodź przyciskami (①), (②), (③) to wiersze w_1, w_2, w_3 . Najpierw zerujemy pod elementami głównymi (eliminacja w przód), potem nad nimi (wstecz). Zobacz, co się dzieje, gdy element główny jest zerem, gdy jeden wiersz się zeruje i gdy pojawia się wiersz „ $0 = 1$ ”.

0 / 9 · macierz wyjściowa

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \end{array} \right)$$

$x \quad y \quad z$

— element główny — zmieniony wiersz — wiersz sprzeczny

krok 0 z 9

rz A (widać po eliminacji) 3

rz $[A | b]$ 3

rozwiązanie ...

Wiersze to równania, kolumny to niewiadome. Naciśnij „dalej”.

Stan na rysunku: krok 0 z 9; rozwiązanie: ...

1.2 Kiedy rozwiązań nie ma albo jest ich nieskończenie wiele

Każde równanie z trzema niewiadomymi to płaszczyzna w przestrzeni (lekcja 1.1 Wektory). Trzy płaszczyzny mogą się przeciąć w jednym punkcie, ale mogą też mieć wspólną prostą albo nie mieć żadnego punktu wspólnego wszystkim trzem. Mogą się też pokrywać: wtedy rozwiązania tworzą całą płaszczyznę. Eliminacja pokazuje, który przypadek zachodzi, bez rysowania.

Przykład 1.2

Układ nieoznaczony i sprzeczny

Rozwiąż układ $x + y + z = 6$, $2x + y - z = 1$, $3x + 2y = c$ dla $c = 7$ i dla $c = 8$.

- 1 $w_2 \leftarrow w_2 - 2w_1$, $w_3 \leftarrow w_3 - 3w_1$, potem $w_3 \leftarrow w_3 - w_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & c-7 \end{array} \right).$$

- 2 Dla $c = 8$ ostatni wiersz mówi $0 = 1$. Układ jest **sprzeczny**.
- 3 Dla $c = 7$ ostatni wiersz to $0 = 0$: trzecie równanie było sumą dwóch pierwszych i nie niosło nowej informacji. Zostają dwa równania i trzy niewiadome. Taki układ nazywamy **nieoznaczonym**. Jedną z nich, na przykład $z = t$, wybieramy dowolnie. Wtedy $y = 11 - 3t$ i $x = 6 - y - z = -5 + 2t$.

Wynik: dla $c = 8$ brak rozwiązań; dla $c = 7$ nieskończenie wiele: $(x; y; z) = (-5 + 2t; 11 - 3t; t)$, $t \in \mathbb{R}$. To prosta w przestrzeni.

Sprawdzenie: dla $t = 3$ dostajemy $(1; 2; 3)$, rozwiązanie z przykładu 1.1, które spełnia też $3x + 2y = 7 \checkmark$. Dla dowolnego t : $3(-5 + 2t) + 2(11 - 3t) = 7 \checkmark$.

Liczbę niezerowych wierszy po eliminacji nazywamy **rzędem** macierzy, rz A . To liczba równań, które naprawdę niosą informację. W przykładzie 1.2 rz $A = 2$, a rząd macierzy rozszerzonej to 2 dla $c = 7$ i 3 dla $c = 8$.

🔑 TWIERDZENIE KRONECKERA-CAPELLEGO

Układ m równań z n niewiadomymi ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid \vec{b}]$. Jeśli ten wspólny rząd r równa się n , rozwiązanie jest jedno. Jeśli $r < n$, rozwiązań jest nieskończenie wiele, a $n - r$ niewiadomych można wybrać dowolnie (parametry).

W praktyce nie trzeba pamiętać nazwy. Wystarczy przeprowadzić eliminację i spojrzeć na wiersze z samymi zerami po lewej: zero po prawej oznacza nadmiarowe równanie, liczba różna od zera oznacza sprzeczność.

- 1 Rozwiąż eliminacją, zapisując macierz rozszerzoną: $x + 2y = 5$, $3x - y = 1$.
■ ■ ■

- 2 Rozwiąż: $x + y + z = 2$, $2x - y + z = 6$, $x + 2y - z = -1$.
■ ■ ■

- 3 Rozwiąż: $x + 2y - z = 1$, $2x + 5y + z = 4$, $3x + 7y = 5$. Ile rozwiązań ma układ i jak wygląda ich zbiór?
■ ■ ■

- 4 Dla jakich a i b układ $x + y = 1$, $x + ay = b$ ma jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele albo żadnego?
■ ■ ■

- 5 Uzgodnij równanie spalania propanu $a \text{C}_3\text{H}_8 + b \text{O}_2 \rightarrow c \text{CO}_2 + d \text{H}_2\text{O}$. Zapisz bilans atomów C, H, O jako układ równań. Ile ma rozwiązań i dlaczego chemika to nie martwi?
■ ■ ■

- 6 Znajdź parabolę $y = ax^2 + bx + c$ przechodzącą przez punkty (1; 2), (2; 3), (3; 6).
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

2 Macierze i działania na nich

Macierz o wymiarach $m \times n$ to prostokątna tablica liczb o m wierszach i n kolumnach. Element w i -tym wierszu i j -tej kolumnie oznaczamy a_{ij} : najpierw wiersz, potem kolumna. Macierz $n \times n$ jest **kwadratowa**. Wektor $\vec{x}$ o n składowych zapisujemy jako macierz $n \times 1$, czyli kolumnę.

Macierze tych samych wymiarów dodajemy element po elemencie i mnożymy przez liczbę element po elemencie. Najważniejsze jest jednak **mnożenie macierzy przez wektor**. Lewa strona układu z przykładu 1.1 to

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + y - z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix},$$

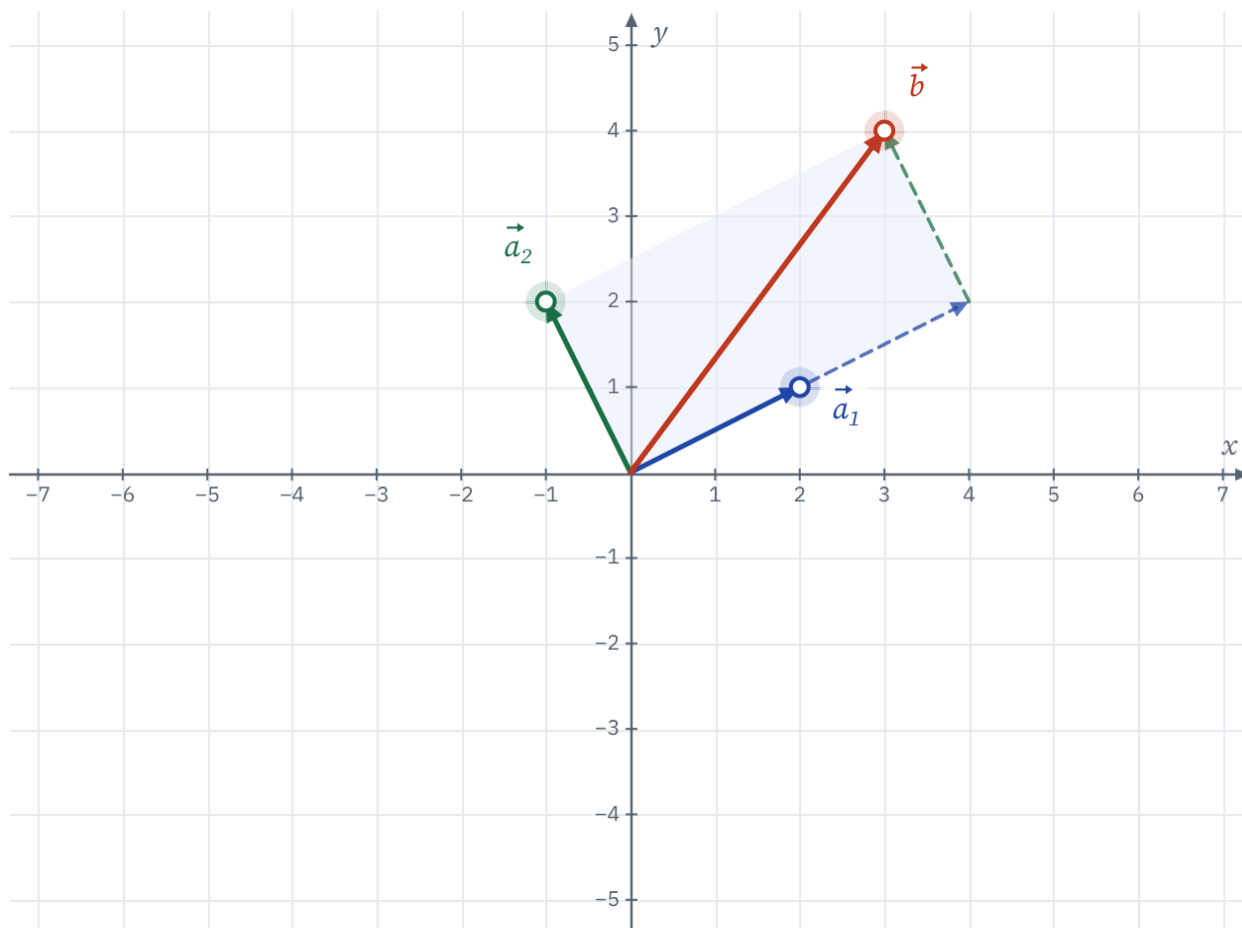
więc cały układ to jedno równanie $A\vec{x} = \vec{b}$. Każdy element wyniku to iloczyn skalarny (lekcja 1.1 Wektory) odpowiedniego wiersza A z wektorem $\vec{x}$: „wiersz razy kolumna”.

Ten sam iloczyn można przeczytać inaczej, kolumnami:

$$A\vec{x} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$A\vec{x}$ to **kombinacja liniowa kolumn** macierzy A ze współczynnikami x, y, z . Rozwiązanie układu odpowiada więc na pytanie: ile wziąć każdej kolumny, żeby po złożeniu wyszedł wektor $\vec{b}$? To drugi obraz układu równań, obok obrazu przecinających się prostych i płaszczyzn. Gdy kolumny są równoległe (albo, w trzech wymiarach, leżą w jednej płaszczyźnie), składając je, nie dojdziemy do każdego $\vec{b}$. To dokładnie przypadek zerowego wyznacznika (część 3).

SYMULACJA 2 Obraz kolumnowy układu 2×2 . Przeciągaj końce kolumn $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ i wektor $\vec{b}$. Równoległobok pokazuje, ile każdej kolumny trzeba wziąć, żeby dojść do $\vec{b}$: to właśnie x i y . Ustaw kolumny prawie równoległe i zobacz, jak bardzo rosną x i y .



— a_1 — a_2 — b — $x \cdot a_1 + y \cdot a_2$

a_1 [2,0; 1,0]

a_2 [-1,0; 2,0]

b [3,0; 4,0]

$W = \det[a_1 \ a_2]$ 5,00

x 2,00

y 1,00

Idziemy x razy wzdłuż a_1 , potem y razy wzdłuż a_2 i trafiamy w b . Tak czytamy układ $A \cdot (x; y) = b$ kolumnami.

Stan na rysunku: $a_1 = [2,0; 1,0]$, $a_2 = [-1,0; 2,0]$, $b = [3,0; 4,0]$; $W = 5,00$, $x = 2,00$, $y = 1,00$.

2.1 Iloczyn dwóch macierzy

DEFINICJA · ILOCZYN MACIERZY

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Element (i, j) iloczynu to iloczyn skalarny i -tego wiersza A z j -tą kolumną B .

Iloczyn istnieje tylko wtedy, gdy A ma tyle kolumn, ile B ma wierszy: $(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$.

Skąd taka dziwna definicja? Z wymogu, żeby $(AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$. Najpierw działamy na wektor macierzą B , potem A , a AB to jedna macierz, która robi obie rzeczy naraz. Iloczyn macierzy to **złożenie** działań, tak jak złożenie funkcji. Dlatego jest łączny, $(AB)C = A(BC)$, ale na ogół **nie** jest przemienne.

Przykład 2.1

$$AB \neq BA$$

$$\text{Oblicz } AB \text{ i } BA \text{ dla } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 AB : wiersz $(1; 2)$ razy kolumny B daje $(2; 1)$; wiersz $(3; 4)$ daje $(4; 3)$. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2 BA : wiersz $(0; 1)$ wybiera drugi wiersz A , wiersz $(1; 0)$ pierwszy. $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wynik: $AB \neq BA$. Mnożenie przez B z prawej zamienia kolumny A , a z lewej wiersze.

Sprawdzenie: $B^2 = I$ (dwie zamiany wracają do początku), więc $(AB)B$ powinno dać A : zamiana kolumn $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ daje $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \checkmark$.

Kilka macierzy ma własne nazwy. **Macierz jednostkowa** I ma jedynki na przekątnej i zera poza nią; $AI = IA = A$ (dla kwadratowej A), tak jak mnożenie przez 1. **Macierz zerowa** ma same zera. **Transpozycja** A^T zamienia wiersze na kolumny: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Macierz **symetryczna** spełnia $A^T = A$. Przydaje się reguła $(AB)^T = B^T A^T$ (kolejność się odwraca) i to, że iloczyn skalarny wektorów kolumnowych to $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$.

2.2 Macierz w fizyce: gdy skutek nie jest równoległy do przyczyny

Feynman wprowadza macierz (u niego: tensor) na przykładzie kryształu w polu elektrycznym. W materiale izotropowym (gaz, szkło) pole $\vec{E}$ przesuwają ładunki wzdłuż siebie, więc polaryzacja $\vec{P}$ jest równoległa do $\vec{E}$ i wystarczy jedna liczba: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$. W kryształach elektronom łatwiej poruszać się w jednych kierunkach niż w innych. Pole wzdłuż osi x może wtedy dać polaryzację o składowych x , y i z . Każda składowa $\vec{P}$ jest liniową funkcją wszystkich trzech składowych $\vec{E}$:

FLP II-31-1

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Dziewięć liczb zamiast jednej. Tak samo opisuje się moment bezwładności bryły (moment pędu nie musi być równoległy do prędkości kątowej, Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna), przewodnictwo kryształu i naprężenia w materiale. Gdy widzisz, że jedna wielkość wektorowa zależy liniowo od drugiej, ale nie musi być do niej równoległa, w tle stoi macierz.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

7 zadań · ok. 40 min

- 1 Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ oblicz $A + B$, $2A$, AB i BA .
- 2 A ma wymiary 2×3 , B ma wymiary 3×4 . Które z iloczynów AB , BA , $A^T A$, AA^T istnieją i jakie mają wymiary?
- 3 Zapisz układ $2x - y = 3$, $x + 4y = -3$ w postaci $A\vec{x} = \vec{b}$ i jako kombinację kolumn. Rozwiąż go.
- 4 Oblicz N^2 dla $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Czego to uczy o równaniu $AB = 0$?
- 5 Sprawdź na macierzach z zadania 2.1, że $(AB)^T = B^T A^T$, ale $(AB)^T \neq A^T B^T$.
- 6 Kryształ ma macierz polaryzowalności $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (w umownych jednostkach). Oblicz $\vec{P}$ dla $\vec{E} = [1; 0; 0]$ i $\vec{E} = [0; 1; 0]$. O jaki kąt $\vec{P}$ odchyła się od $\vec{E}$? Dla $\vec{E} = [0; 0; 1]$?

7

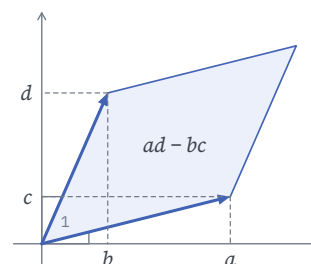
Macierz $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ obraca wektor o kąt α (lekcja 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza). Oblicz $R(\alpha)R(\beta)$. Co musi wyjść, skoro dwa obroty to obrót o $\alpha + \beta$? Jakie wzory dostajesz?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

3

Wyznacznik

W lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste wyznacznik $W = a_1b_2 - a_2b_1$ układu 2×2 decydował, czy układ ma jedno rozwiązanie. W lekcji 1.1 Wektory to samo wyrażenie było polem równoległoboku rozpiętego na dwóch wektorach. Połączmy te fakty. Macierz A zamienia wektor $[1; 0]$ na swoją pierwszą kolumnę, a $[0; 1]$ na drugą. Kwadrat jednostkowy przechodzi więc w równoległobok rozpięty na kolumnach.



WYZNACZNIK 2×2 I JEGO SENS

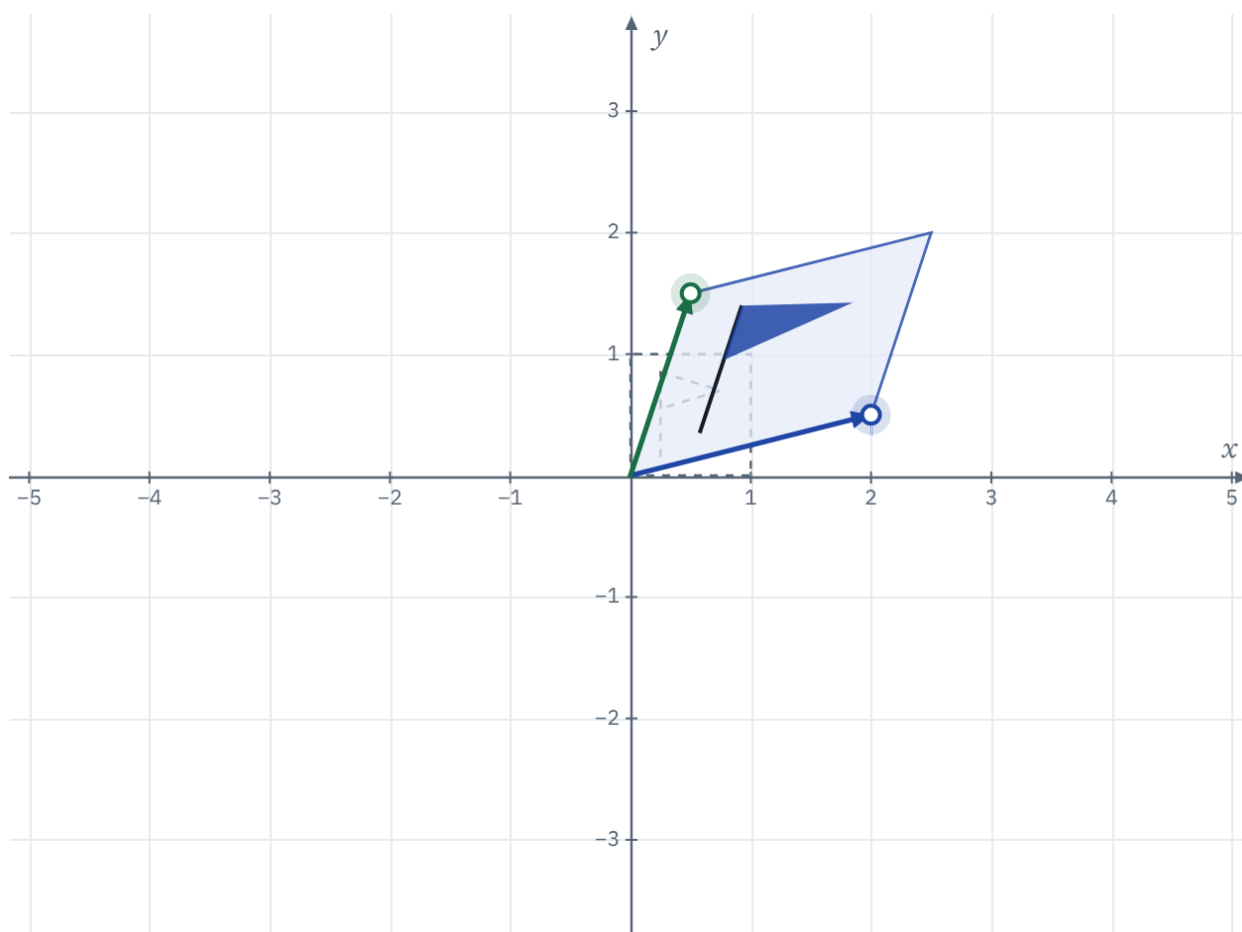
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$|\det A|$ to pole równoległoboku rozpiętego na kolumnach A , czyli **współczynnik, przez który A mnoży pola**. Znak mówi o orientacji: plus, gdy obrót od pierwszej kolumny do drugiej (o kąt mniejszy niż 180°) jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara, minus, gdy figura zostaje „odbita w lustrze”.

Teraz widać, dlaczego $\det A = 0$ oznacza kłopot z układem. Macierz zgniata płaszczyznę do prostej (albo punktu). Różne wektory $\vec{x}$ lądują w tym samym miejscu, więc rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Za to punkty spoza tej prostej nie są obrazem niczego, więc dla takich $\vec{b}$ rozwiązania nie ma wcale.

SYMULACJA 3

Macierz 2×2 przekształca kwadrat jednostkowy (z chorągiewką, żeby widać było odbicie) w równoległobok rozpięty na kolumnach. Przeciągaj końce kolumn. Pole równoległoboku to $|\det A|$. Gdy kolumny przejdą przez siebie nawzajem, wyznacznik zmienia znak, a chorągiewka odwraca się jak w lustrze.



— kolumna 1 — kolumna 2 — obraz kwadratu - - kwadrat jednostkowy

kolumna 1 $[2, 0; 0, 5]$

kolumna 2 $[0, 5; 1, 5]$

$\det A = ad - bc$ 2,75

pole obrazu = $|\det A|$ 2,75

orientacja zachowana

Każda figura zmienia pole tyle razy, ile wynosi wyznacznik. Kwadrat jednostkowy miał pole 1, więc jego obraz ma pole $\det A$.

Stan na rysunku: kolumny $[2, 0; 0, 5]$ i $[0, 5; 1, 5]$; $\det A = 2,75$, pole obrazu 2,75, orientacja zachowana.

3.1 Wyznacznik 3×3

W trzech wymiarach wyznacznik to objętość równoległościanu rozpiętego na trzech kolumnach (lub wierszach), ze znakiem. To iloczyn mieszany z lekcji 1.1 Wektory. Liczymy go **rozwinięciem Laplace'a** względem pierwszego wiersza:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Każdy element pierwszego wiersza mnożymy przez wyznacznik 2×2 , który zostaje po skreśleniu jego wiersza i kolumny, a znaki zmieniają się na przemian: +, −, +. Rozwijać można względem dowolnego wiersza lub kolumny, ze znakiem $(-1)^{i+j}$ dla elementu a_{ij} (szachownica znaków). Najlepiej wybrać wiersz z największą liczbą zer. Ten sam przepis działa dla macierzy 4×4 i większych: wyznacznik $n \times n$ sprowadza się do n wyznaczników $(n-1) \times (n-1)$.

Dla 3×3 istnieje też skrót, **reguła Sarrusa**: dopisujemy dwie pierwsze kolumny z prawej, dodajemy trzy iloczyny „z góry na dół w prawo” i odejmujemy trzy iloczyny „z dołu do góry w prawo”. Uwaga: działa *tylko* dla 3×3 .

Przykład 3.1

Jeden wyznacznik, trzy sposoby

Oblicz $\det A$ dla macierzy A z przykładu 1.1.

- 1 Sarrus: $1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2 - 1 + 6 - 1 + 3 - 4 = 5$.
- 2 Laplace względem pierwszego wiersza: $1 \cdot (2 + 3) - 1 \cdot (4 + 1) + 1 \cdot (6 - 1) = 5 - 5 + 5 = 5$.
- 3 Eliminacja: w przykładzie 1.1 dostaliśmy macierz trójkątną z elementami głównymi 1, −1, −5, a dodawanie wielokrotności wierszy nie zmienia wyznacznika (patrz niżej). Wyznacznik macierzy trójkątnej to iloczyn przekątnej: $1 \cdot (-1) \cdot (-5) = 5$.

Wynik: $\det A = 5$. Trzy kolumny A rozpinają równoległoscian o objętości 5.

Sprawdzenie: trzy niezależne metody dały to samo. Wyznacznik jest różny od zera, zgodnie z tym, że układ 1.1 miał dokładnie jedno rozwiązanie.

3.2 Własności, które oszczędzają rachunków

WŁASNOŚCI WYZNACZNIKA (A, B KWADRATOWE $N \times N$)

1. zamiana dwóch wierszy (lub kolumn) zmienia znak wyznacznika;
2. pomnożenie jednego wiersza przez c mnoży wyznacznik przez c ; stąd $\det(cA) = c^n \det A$;
3. dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza **nie zmienia** wyznacznika;
4. $\det A^T = \det A$, więc wszystko, co prawdziwe dla wierszy, jest prawdziwe dla kolumn;
5. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
6. wyznacznik macierzy trójkątnej to iloczyn elementów na przekątnej;
7. $\det A = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy któraś kolumna (wiersz) jest kombinacją liniową pozostałych.

Wszystkie mają sens geometryczny. Dodanie do jednej krawędzi równoległocianu wielokrotności innej krawędzi to „przesunięcie warstw talii kart”: objętość się nie zmienia. Rozciągnięcie jednej krawędzi c razy zwiększa objętość c razy. Złożenie przekształceń mnoży współczynniki zmiany objętości, stąd $\det(AB) = \det A \det B$. Wynika z tego praktyczna metoda: **duże wyznaczniki liczy się eliminacją**. Doprowadzamy macierz do postaci trójkątnej, mnożymy elementy przekątnej i zmieniamy znak przy każdej zamianie wierszy. To ta sama robota, co przy rozwiązywaniu układu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 40 min

1 Oblicz $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$. Co oznacza każdy wynik geometrycznie?

2 Oblicz $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ dwiema metodami.

3 Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(2; 5)$.

4 A jest macierzą 3×3 i $\det A = 5$. Oblicz $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det A^T$, $\det(A^2)$.

5 Dla jakiego t zachodzi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = 0$? Który wiersz jest wtedy kombinacją pozostałych?

6

Pokaż, że $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ (wyznacznik Vandermonde'a). Co to mówi o zadaniu 1.6: kiedy przez trzy punkty przechodzi dokładnie jedna parabola?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

4

Macierz odwrotna i wzory Cramera

Równanie liczbowe $ax = b$ rozwiązujemy, dzieląc przez a , czyli mnożąc przez a^{-1} . Dla macierzy dzielenia nie ma, ale czasem istnieje odpowiednik odwrotności.

🔑 DEFINICJA · MACIERZ ODWROTNA

Macierz A^{-1} jest **odwrotna** do kwadratowej macierzy A , jeśli $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$ (macierz jest **nieosobliwa**). Wtedy układ $A\vec{x} = \vec{b}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dla 2×2 : zamień elementy na przekątnej, zmień znaki pozostałych, podziel przez wyznacznik. Geometrycznie A^{-1} cofa to, co zrobiła A . Jeśli A zgmiotła płaszczyznę do prostej, cofnąć się tego nie da. Stąd warunek $\det A \neq 0$, a także $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Dla większych macierzy najprościej użyć **metody Gaussa-Jordana**. Zapisujemy obok siebie $[A \mid I]$ i operacjami na wierszach doprowadzamy lewą część do I . Prawa część staje się wtedy A^{-1} . To nie sztuczka: każda kolumna A^{-1} to rozwiązanie układu $A\vec{x} = \vec{e}_j$, gdzie $\vec{e}_j$ to j -ta kolumna I . Rozwiązujemy więc n układów naraz.

Przykład 4.1

Odwracamy macierz z przykładu 1.1

Znajdź A^{-1} dla $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i rozwiąż ponownie układ 1.1.

- 1 Eliminacja w przód taka jak w przykładzie 1.1 ($w_2 - 2w_1, w_3 - w_1, w_3 + 2w_2$), tylko na dłuższych wierszach:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

- 2 Wstecz: $w_3 \leftarrow w_3 / (-5); w_1 \leftarrow w_1 - w_3, w_2 \leftarrow w_2 + 3w_3; w_2 \leftarrow -w_2; w_1 \leftarrow w_1 - w_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right).$$

- 3 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$

Wynik: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, a $\vec{x} = [1; 2; 3]$, jak w przykładzie 1.1.

Sprawdzenie: pierwszy wiersz A razy pierwsza kolumna A^{-1} : $\frac{1}{5}(5 - 5 + 5) = 1 \checkmark$;
 pierwszy wiersz razy druga kolumna: $\frac{1}{5}(1 + 1 - 2) = 0 \checkmark$. Mianownik 5 to $\det A$, i to nie przypadek (wzór poniżej).

Przydaje się reguła $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Kolejność się odwraca z tego samego powodu co przy skarpetkach i butach: zakładamy najpierw skarpetki, potem buty, a zdejmujemy w odwrotnej kolejności.

4.1 Wzory Cramera

WZORY CRAMERA

Jeśli $W = \det A \neq 0$, układ $A\vec{x} = \vec{b}$ ma jedno rozwiązanie

$$x_j = \frac{W_j}{W},$$

gdzie W_j to wyznacznik macierzy A , w której j -tą kolumnę zastąpiono wektorem $\vec{b}$.

Dla układu 1.1: $W = 5$, $W_x = 5$, $W_y = 10$, $W_z = 15$, więc znów (1; 2; 3). Wzory Cramera są piękne i przydatne w teorii: od razu widać, że rozwiązanie zależy od $\vec{b}$ liniowo i że kłopot zaczyna się, gdy $W \rightarrow 0$ (jak w prologu). Ogólny wzór na odwrotność, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$, gdzie D to macierz dopełnień algebraicznych (wyznaczników po skreśleniu wiersza i kolumny, ze znakami szachownicy), ma to samo źródło.

PUŁAPKA · ILE TO KOSZTUJE

Wyznacznik $n \times n$ liczony rozwinięciem Laplace'a wymaga około $n!$ mnożeń, a wzory Cramera potrzebują $n + 1$ takich wyznaczników. Eliminacja Gaussa potrzebuje około $\frac{2}{3}n^3$ działań. Dla $n = 20$ to kilka tysięcy działań wobec około $5 \cdot 10^{19}$: przy miliardzie działań na sekundę mikrosekundy wobec 1600 lat. Programy numeryczne (np. `numpy.linalg.solve`) używają eliminacji (z wyborem największego co do modułu elementu głównego, co ogranicza błędy zaokrągleń), nie Cramera, i nie liczą A^{-1} , gdy trzeba tylko rozwiązać układ. Ręcznie: Cramer dla 2×2 i czasem 3×3 , powyżej eliminacja.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

6 zadań · ok. 35 min

1 Znajdź odwrotność $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ i sprawdź mnożeniem.

2 Znajdź odwrotności $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Zinterpretuj je.

3 Korzystając z zadania 4.1, rozwiąż $3x + y = 4$, $5x + 2y = 7$. Potem bez nowej eliminacji rozwiąż ten sam układ z prawą stroną $[1; 0]$.

4

Znajdź metodą Gaussa–Jordana odwrotność $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5

Rozwiąż wzorami Cramera układ z zadania 1.2.

6

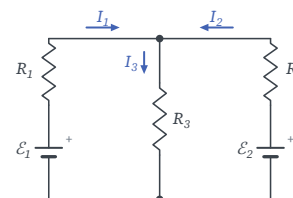
Pokaż, że $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, mnożąc. Dlaczego $A^{-1}B^{-1}$ zwykle nie jest odwrotnością AB ?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

5

Zastosowania i uwarunkowanie

Prawa Kirchhoffa (omówimy je w fizyce, Dział 15: Prąd i pole magnetyczne; tu przyjmij je jako dane) mówią: w każdym węźle suma prądów wpływających równa się sumie wypływających, a w każdym zamkniętym oczku suma sił elektromotorycznych równa się sumie spadków napięcia RI (ze znakami zależnymi od kierunku obiegu). Każde z tych praw to równanie liniowe w prądach.



Przykład 5.1

Obwód z dwiema bateriami

Baterie $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ i $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ V}$ są połączone z opornikami $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$ jak na rysunku. Oblicz prądy I_1 , I_2 , I_3 (kierunki strzałek na rysunku są założone; wynik ujemny oznacza przepływ w przeciwną stronę).

- 1 Węzeł górny: $I_1 + I_2 = I_3$. Oczko lewe: $12 = 2I_1 + 6I_3$. Oczko prawe: $6 = 4I_2 + 6I_3$.
- 2 Macierz rozszerzona i eliminacja ($w_2 - 2w_1$, potem $w_3 + 2w_2$, a na końcu prosty rachunek wsteczny):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 22 & 30 \end{array} \right).$$

- 3 $I_3 = \frac{30}{22} = \frac{15}{11}$; $-2I_2 = 12 - 8 \cdot \frac{15}{11} = \frac{12}{11}$, więc $I_2 = -\frac{6}{11}$; $I_1 = I_3 - I_2 = \frac{21}{11}$.

Wynik: $I_1 \approx 1,91 \text{ A}$, $I_2 \approx -0,55 \text{ A}$, $I_3 \approx 1,36 \text{ A}$. Minus przy I_2 znaczy, że prąd płynie przez baterię 6 V „pod prąd”, od plusa do minusa: silniejsza bateria ją ładuje.

Sprawdzenie: oczko lewe $2 \cdot \frac{21}{11} + 6 \cdot \frac{15}{11} = \frac{132}{11} = 12 \checkmark$; prawe $4 \cdot (-\frac{6}{11}) + 6 \cdot \frac{15}{11} = \frac{66}{11} = 6 \checkmark$. Jednostki: $\text{V}/\Omega = \text{A} \checkmark$.

5.1 Uwarunkowanie: kiedy rozwiązanie istnieje, ale nie można mu ufać

Wyznacznik różny od zera gwarantuje jedno rozwiązanie. Nie gwarantuje, że to rozwiązanie da się wiarygodnie policzyć z danych obarczonych błędem. Zawsze tak jest w fizyce, bo prawe strony (a często i współczynniki) pochodzą z pomiarów (lekcja 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru).

Przykład 5.2

Prawie równoległe proste

Rozwiąż $x + y = 2$, $x + 1,001y = b_2$ dla $b_2 = 2,001$ i dla $b_2 = 2,002$.

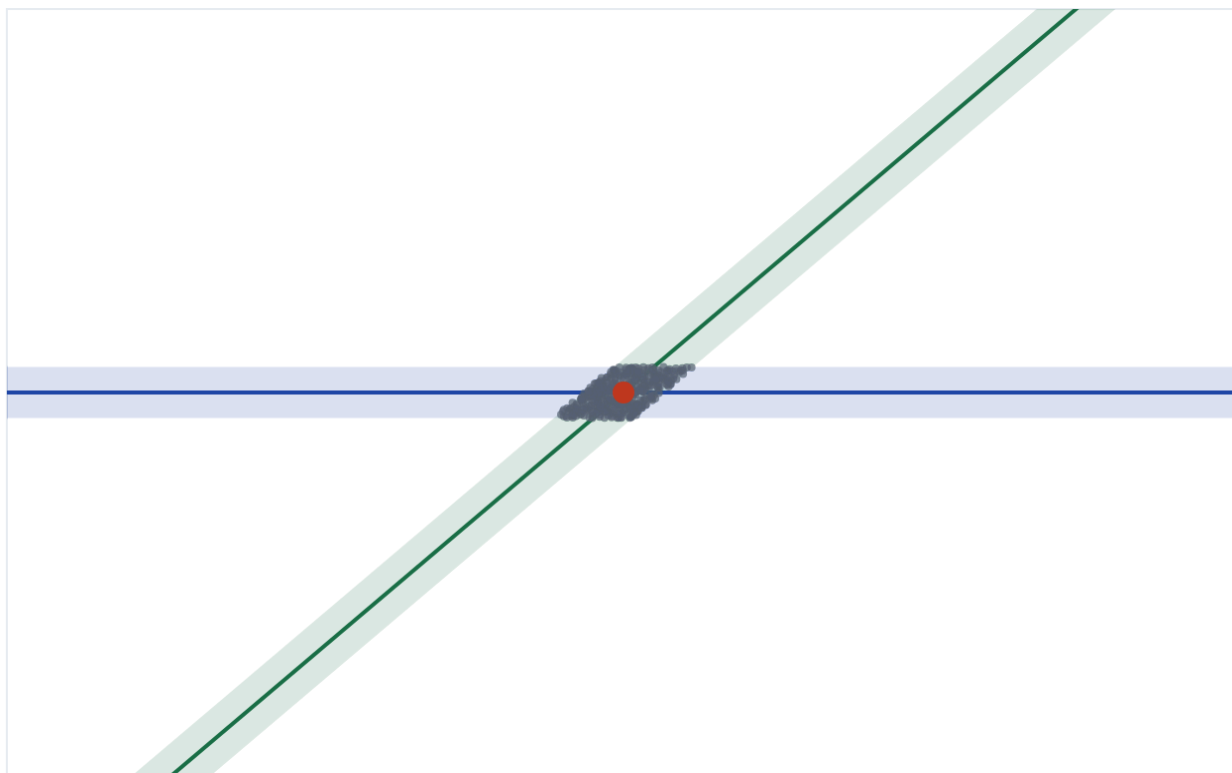
- 1 $w_2 - w_1$: $0,001y = b_2 - 2$, więc $y = 1000(b_2 - 2)$ i $x = 2 - y$.
- 2 $b_2 = 2,001$: $y = 1$, $x = 1$. $b_2 = 2,002$: $y = 2$, $x = 0$.

Wynik: zmiana prawej strony o 0,05% (z 2,001 na 2,002) przesunęła rozwiązanie z (1; 1) do (0; 2). Zmiana danych o 0,001 dała zmianę wyniku o 1, tysiąc razy większą.

Sprawdzenie: $0 + 1,001 \cdot 2 = 2,002 \checkmark$. Geometrycznie: proste o nachyleniach -1 i $-1/1,001$ są prawie równoległe, więc małe przesunięcie jednej z nich przesunęło punkt przecięcia daleko wzdłuż drugiej.

Taki układ nazywamy **źle uwarunkowanym**. Miarą jest **wskaźnik uwarunkowania** macierzy, który mówi, ile razy może się wzmacnić względny błąd danych. W tym przykładzie wynosi około 4000. Dokładna definicja wymaga norm macierzy; tu wystarczy intuicja. Wyznacznik tu jest mały (0,001), ale sam mały wyznacznik nie świadczy o złym uwarunkowaniu: macierz $0,1 \cdot I$ o wymiarach 10×10 ma wyznacznik 10^{-10} , a układ z nią rozwiązuje się idealnie (każdą niewiadomą mnożymy przez 10). Liczy się to, czy kolumny są *prawie zależne* (w dwóch wymiarach: prawie równoległe), a nie to, że wszystkie są jednakowo krótkie.

SYMULACJA 4 Dwie proste i niepewność pomiaru. Każda prosta jest rozmyta o $\pm\delta$ w prawej stronie, a szare punkty to rozwiązania dla losowych prawych stron z tego zakresu. Zmniejszaj kąt między prostymi: chmura rozwiązań rozciąga się wzdłuż prostych, choć dane są tak samo dokładne.



— prosta $1 \pm \delta$ — prosta $2 \pm \delta$ — rozwiązania z zaburzonych danych — rozwiązanie dokładne

niepewność danych δ 0,10

największe odchylenie rozwiązania 0,29

wzmocnienie błędu ($\max |\Delta x| / \delta$) 2,9×

$\det$ (normalne jednostkowe) = $\sin$ kąta 0,643

wskaźnik uwarunkowania 2,7

Stan na rysunku: kąt 40° , $\delta = 0,10$; największe odchylenie rozwiązania 0,29 (wzmocnienie 2,9×), wskaźnik uwarunkowania 2,7.

Prolog jest przykładem tego samego zjawiska. Kolumny macierzy mają tam długość 1, więc mały wyznacznik naprawdę oznacza prawie równoległe kolumny. Gdy liny są prawie poziome, wyznacznik $-\sin(\alpha + \beta)$ jest mały, a naciąg ogromny i bardzo czuły na kąt. Inżynier nie powie „ten układ ma rozwiązanie”, tylko „ta konstrukcja jest źle pomyślana”.

- 1 Lampa z prologu ($mg = 117,72 \text{ N}$) wisi symetrycznie na dwóch linach nachylonych pod kątem θ do poziomu. Pokaż, że naciąg każdej liny to $T = \frac{mg}{2 \sin \theta}$, i oblicz go dla $\theta = 30^\circ$, 10° , 5° , 1° .
- 2 Powtórz przykład 5.1 dla $\mathcal{E}_1 = 9 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$.
- 3 Rozwiąż $x + y = 2$, $x + 0,99y = b_2$ dla $b_2 = 1,99$, $2,00$ i $1,98$. O ile zmienia się prawa strona, a o ile rozwiązanie?
- 4 Kwadratowa płyta ma na górnej krawędzi temperaturę 100°C , a na pozostałych 0°C . Dzielimy ją siatką tak, że w środku są cztery węzły (dwa górne T_1 , T_2 i dwa dolne T_3 , T_4), a każdy węzeł wewnętrzny ma temperaturę równą średniej czterech sąsiadów. Każdy węzeł ma dwóch sąsiadów na brzegu i dwóch wewnątrz. Ułóż układ i rozwiąż go.
- 5 Komputer wykonuje 10^9 działań na sekundę. Ile czasu zajęłoby rozwiązanie układu $n \times n$ wzorami Cramera z wyznacznikami liczonymi rozwinięciem Laplace'a (przyjmij $(n+1)!$ działań), a ile eliminacją ($\frac{2}{3}n^3$) dla $n = 10$, 20 , 30 ?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

× „ $AB = BA$, jak dla liczb.”

Na ogół nie (przykład 2.1). Iloczyn to złożenie działań, a kolejność działań ma znaczenie: obrót, a potem rozciągnięcie wzdłuż osi to co innego niż rozciągnięcie, a potem obrót.

× „ $\det(A+B) = \det A + \det B$ i $\det(2A) = 2 \det A$.”

Oba fałszywe. Wyznacznik jest multiplikatywny ($\det AB = \det A \det B$), a nie addytywny. Dla $n \times n$: $\det(2A) = 2^n \det A$, bo każda z n krawędzi wydłuża się dwa razy.

× „ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.”

Kolejność się odwraca: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Tak samo przy transpozycji.

× „Tyle równań, ile niewiadomych, więc jest jedno rozwiązanie.”

Tylko gdy wyznacznik jest różny od zera. Równania mogą być zależne (przykład 1.2) albo sprzeczne. Liczy się rząd, a nie liczba równań.

× „Mały wyznacznik oznacza źle uwarunkowany układ.”

Nie: $0,1 \cdot I$ o wymiarach 10×10 ma wyznacznik 10^{-10} i jest idealnie uwarunkowana. Wyznacznik zależy od skali. Uwarunkowanie zależy od tego, czy kolumny są prawie zależne (prawie równoległe) albo mają bardzo różne długości. Jednakowe przeskalowanie wszystkich kolumn go nie zmienia.

× „Wzory Cramera to najlepsza metoda, bo dają gotowy wzór.”

Najlepsza do teorii i do 2×2 . Dla większych układów eliminacja jest nieporównanie szybsza (zadanie 5.5). Programy numeryczne do typowych układów używają eliminacji (do bardzo dużych i rzadkich metod iteracyjnych), nigdy wzorów Cramera.

× „Skoro $A\vec{x} = \vec{b}$, to $\vec{x} = \vec{b}/A$.”

Dzielenia przez macierz nie ma. Jest mnożenie przez odwrotność, i to z lewej strony: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, a nie $\vec{b}A^{-1}$ (ten iloczyn nawet nie istnieje).

7

Sprawdź się

1 Które operacje na wierszach nie zmieniają zbioru rozwiązań układu?

Zamiana wierszy, pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera, dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza.

2 Po eliminacji pojawił się wiersz $(0 \ 0 \ 0 \mid 3)$. Co to znaczy?

Równanie $0 = 3$: układ jest sprzeczny.

3 Jakie wymiary ma iloczyn macierzy 3×2 i 2×5 ?

3×5 .

4 Co oznacza geometrycznie $\det A = -2$ dla macierzy 2×2 ?

Pola rosną dwukrotnie, a orientacja się odwraca (odbicie).

5 Jak zmienia się wyznacznik przy zamianie dwóch wierszy?

Zmienia znak.

6 Kiedy macierz kwadratowa ma odwrotność?

Wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera.

7 Dlaczego programy numeryczne nie używają wzorów Cramera?

Z wyznacznikami liczonymi rozwinięciem Laplace'a kosztują około $(n + 1)!$ działań, a eliminacja około $\frac{2}{3}n^3$. Nawet gdy wyznaczniki liczy się eliminacją, Cramer wymaga $n + 1$ eliminacji zamiast jednej i jest bardziej wrażliwy na błędy zaokrągleń.

UKŁADY I MACIERZE

układ: $A\vec{x} = \vec{b}$; macierz rozszerzona $[A | \vec{b}]$

operacje: $w_i \leftrightarrow w_j$; $w_i \leftarrow cw_i$ ($c \neq 0$);

$w_i \leftarrow w_i + cw_j$

Kronecker–Capelli: rozwiązanie istnieje

$\iff \text{rz } A = \text{rz } [A | \vec{b}]$; parametrów $n - r$

$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$; $(m \times n)(n \times p) = m \times p$

$A\vec{x}$ = kombinacja kolumn A ; $AB \neq BA$ na ogół

$(AB)^T = B^T A^T$; $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

WYZNACZNIK I ODWROTNOŚĆ

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ = pole ze znakiem

3×3 : Laplace (znaki szachownicy) lub Sarrus; = iloczyn mieszany

zamiana wierszy: $-$; $w_i + cw_j$: bez zmian;

$\det(cA) = c^n \det A$

$\det AB = \det A \det B$; $\det A^T = \det A$

$\det A \neq 0 \iff A^{-1}$ istnieje $\iff$ jedno rozwiązanie

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; $[A | I] \rightarrow [I | A^{-1}]$

Cramer: $x_j = W_j/W$; duże układy: eliminacja

Do przeczytania u Feynmana

- Dla chętnych: II-31-1 i 31-2 (tensor polaryzowalności: dlaczego jedna liczba nie wystarcza i jak zachowuje się dziewięć liczb przy zmianie osi).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*: rozdziały o wyznacznikach i macierzach (eliminacja Gaussa, macierz odwrotna, rozwiązywanie układów).
- G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*: rozdziały 1–2 i 5. Najlepsze źródło obrazu kolumnowego i myślenia o macierzach jako przekształceniach.

W lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza macierz przestanie być tabelą współczynników i stanie się przekształceniem: obrotem, zmianą bazy, transformacją Lorentza. W 2.3 Wartości i wektory własne zapytamy o kierunki, które macierz tylko wydłuży (to kierunki $\vec{P} \parallel \vec{E}$ z zadania 2.6), a wyznacznik da równanie na te kierunki. Wyznacznik jako współczynnik zmiany objętości wróci w całkach wielokrotnych jako jacobian (3.3 Całki podwójne i potrójne), a układy równań w metodzie najmniejszych kwadratów (5.2 Statystyka pomiarów i dopasowania) i w przestrzeni stanów (4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń

stanów). W mechanice kwantowej (Dział 18: Stany kwantowe, układy dwustanowe i spin) stan układu dwustanowego to wektor, a jego ewolucja to mnożenie przez macierz.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $w_2 \leftarrow w_2 - 3w_1$: $-7y = -14$, więc $y = 2$, $x = 1$.
2. $(x; y; z) = (2; -1; 1)$. Po $w_2 - 2w_1$, $w_3 - w_1$: $-3y - z = 2$, $y - 2z = -3$. Dalej $w_3 \leftarrow 3w_3 + w_2$: $-7z = -7$.
3. Trzeci wiersz zeruje się (trzecie równanie to suma dwóch pierwszych). $z = t$, $y = 2 - 3t$, $x = -3 + 7t$. Nieskończenie wiele rozwiązań, prosta w przestrzeni.
4. Po $w_2 - w_1$: $(a - 1)y = b - 1$. Dla $a \neq 1$ jedno rozwiązanie. Dla $a = 1$, $b = 1$ nieskończenie wiele (to samo równanie dwa razy). Dla $a = 1$, $b \neq 1$ brak (proste równoległe).
5. $c = 3a$, $d = 4a$, $b = 5a$: nieskończenie wiele rozwiązań, jeden parametr. To oczekiwane, bo równanie reakcji można pomnożyć przez dowolną liczbę. Najmniejsze liczby całkowite: $a = 1$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 4$.
6. Układ $a + b + c = 2$, $4a + 2b + c = 3$, $9a + 3b + c = 6$ daje $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$, czyli $y = x^2 - 2x + 3$. Sprawdzenie: $9 - 6 + 3 = 6 \checkmark$.

Zadania • część 2

1. $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
2. AB : 2×4 . BA nie istnieje (4 kolumny, 2 wiersze). $A^T A$: 3×3 . AA^T : 2×2 .
3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, czyli $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Rozwiązanie: $x = 1$, $y = -1$.
4. $N^2 = 0$, choć $N \neq 0$. Z $AB = 0$ nie wynika, że $A = 0$ lub $B = 0$. Dla liczb to prawda, dla macierzy nie.
5. $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, a $A^T B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
6. $[3; 1; 0]$, odchylenie $\arctan \frac{1}{3} \approx 18,4^\circ$. $[1; 2; 0]$, odchylenie $\arctan \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ$. $[0; 0; 1]$: równoległy. Kierunki, w których $\vec{P} \parallel \vec{E}$, to kierunki własne, temat lekcji 2.3 Wartości i wektory własne.
7. $R(\alpha)R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$. Porównanie z $R(\alpha + \beta)$ daje wzory na $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$, te same co z liczb zespolonych w lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory. Tutaj $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha)$: obroty płaszczyzny są przemienne, obroty w przestrzeni już nie.

Zadania • część 3

1. 5: pole rośnie pięciokrotnie. 0: kolumny równoległe ($[4; 2] = 2 \cdot [2; 1]$), płaszczyzna zgnieciona do prostej. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$: obrót nie zmienia pól ani orientacji.
2. Laplace względem pierwszego wiersza: $2 \cdot (12 - 1) - 1 \cdot (4 - 0) + 0 = 18$. Sarrus: $24 + 0 + 0 - 0 - 2 - 4 = 18$.
3. $\vec{u} = [3; 1]$, $\vec{v} = [1; 4]$, $\frac{1}{2}|3 \cdot 4 - 1 \cdot 1| = 5,5$.

4. $2^3 \cdot 5 = 40$; $(-1)^3 \cdot 5 = -5$; 5; 25. Najczęstszy błąd to $\det(2A) = 10$.

5. Wyznacznik to $t - 7$, więc $t = 7$. Wtedy $w_3 = 2w_2 - w_1$: $(2 - 1; 4 - 1; 8 - 1) = (1; 3; 7) \checkmark$.

6. Po odjęciu: $\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. To jest wyznacznik układu z zadania 1.6 (z kolumnami w innej kolejności, co zmienia najwyżej znak). Jest różny od zera, gdy a, b, c są różne: przez trzy punkty o różnych odciętych przechodzi dokładnie jedna parabola (gdy współczynnik przy x^2 wyjdzie zerem, jest to prosta).

Zadania · część 4

1. Wyznacznik 1, więc $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Sprawdzenie: $\begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix} = I \checkmark$.

2. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$: cofnięcie rozciągnięć wzdłuż osi. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$: obrót o $-\alpha$. Dla obrotu odwrotność to transpozycja.

3. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dla $[1; 0]$ wynik to pierwsza kolumna odwrotności: $[2; -5]$.

4. Wyznacznik 1. $w_3 - w_1$, potem $w_1 - 2w_3$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $W = 7, W_x = 14, W_y = -7, W_z = 7$: $(2; -1; 1) \checkmark$.

6. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$, podobnie z drugiej strony. Natomiast $(AB)(A^{-1}B^{-1})$ wymagałoby przestawienia B i A^{-1} , co jest dozwolone tylko, gdy te macierze są przemienne.

Zadania · część 5

1. Symetria daje $T_1 = T_2 = T$, a z równania pionowego $2T \sin \theta = mg$. 117,7 N (tyle, ile ciężar); 339 N; 675 N (prawie sześć razy ciężar); 3373 N. Lina zupełnie pozioma nie utrzyma niczego: $\theta \rightarrow 0$ daje $T \rightarrow \infty$.

2. Układ $I_1 + I_2 - I_3 = 0, I_1 + 3I_3 = 9, 2I_2 + 3I_3 = 3$. $I_1 = \frac{36}{11} \approx 3,27$ A, $I_2 = -\frac{15}{11} \approx -1,36$ A, $I_3 = \frac{21}{11} \approx 1,91$ A.

3. $(1; 1), (2; 0), (0; 2)$. Prawa strona zmienia się o 0,01, czyli o pół procenta, a rozwiązanie o 1 w każdej współrzędnej, czyli o 100% wartości.

4. $3T_1 - T_3 = 100, 3T_3 - T_1 = 0$, czyli $T_1 = T_2 = 37,5^\circ\text{C}, T_3 = T_4 = 12,5^\circ\text{C}$. Średnia czterech węzłów to 25°C , tyle co średnia czterech krawędzi. Tak w uproszczeniu wygląda numeryczne rozwiązywanie równania Laplace'a (4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a): przy gęstej siatce to układ tysięcy równań.

5. $n = 10$: 0,04 s wobec 0,7 μs . $n = 20$: około 1600 lat wobec 5 μs . $n = 30$: około $2,6 \cdot 10^{17}$ lat (około 20 milionów razy więcej niż wiek Wszechświata) wobec 18 μs .

Matematyka · Macierze, wyznaczniki i układy równań. Źródła: K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*; R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. II (Addison-Wesley 1964; New Millennium Edition 2011), 31-1; G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.