

Liczby zespolone i fazory

Równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązania wśród liczb rzeczywistych. Wystarczy jednak dopisać jedną nową liczbę i , żeby każde równanie wielomianowe miało rozwiązanie.

Feynman nazywa to „ostatnim wynalazkiem”. Ta lekcja pokazuje, że liczby zespolone to punkty płaszczyzny, mnożenie przez nie to obrót, a wzór Eulera $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ łączy algebrę z geometrią. Na końcu zamieniamy drgania i prąd przemienny w zwykłą arytmetykę: to fazory.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

28 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 22-5, 22-6, 23-1;
K. A. Stroud,
Engineering Mathematics

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: pierwiastek z liczby ujemnej, który dał 4
- 1 Liczby zespolone: algebra
- 2 Płaszczyzna zespolona i postać wykładnicza
- 3 Wzór Eulera
- 4 Potęgi i pierwiastki
- 5 Fazory: drgania i prąd przemienny
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: pierwiastek z liczby ujemnej, który dał 4

W XVI wieku włoscy matematycy znaleźli wzór na pierwiastki równania trzeciego stopnia (wzór Cardana). Rafael Bombelli w swojej *Algebrze* z 1572 r. zastosował go do równania $x^3 = 15x + 4$ i dostał

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Pierwiastek z liczby ujemnej nie istnieje wśród liczb rzeczywistych, a przecież równanie ma oczywiste rozwiązanie $x = 4$. Bombelli odważył się liczyć z $\sqrt{-1}$ jak ze zwykłą liczbą. Zauważył, że $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$. Pierwszy pierwiastek sześcienny to więc $2 + \sqrt{-1}$, drugi $2 - \sqrt{-1}$, a ich suma to 4. (Każdy pierwiastek sześcienny ma trzy wartości; trzeba wybrać pasujące do siebie, o iloczynie $15/3 = 5$, i rzeczywiście $(2 + i)(2 - i) = 5$.) „Niemożliwe” liczby pojawiły się w środku rachunku i zniknęły z wyniku.

Feynman opowiada historię liczb jako ciąg uogólnień: z liczb naturalnych przez odejmowanie dostajemy ujemne, przez dzielenie ułamki, przez pierwiastki niewymierne. Każde nowe działanie wymagało nowych liczb. Wydawałoby się, że tak będzie bez końca. A jednak po dopisaniu jednej liczby i , takiej że $i^2 = -1$, każde równanie algebraiczne ma rozwiązanie. Feynman nazywa to największym cudem: „to jest ostatni wynalazek”. FLP I-22-5

Pytanie na start. Czym jest i^i ? Feynman twierdzi, że to „coś konkretnego”, czyli zwykła liczba. Jaka? Odpowiedź w zadaniu 3.6.

Liczyby zespolone: algebra

Jednostka urojona i to liczba, dla której $i^2 = -1$. **Liczba zespolona** to $z = a + bi$, gdzie a i b są rzeczywiste. $a = \operatorname{Re} z$ to część rzeczywista, a $b = \operatorname{Im} z$ część urojona (zauważ: $\operatorname{Im} z$ to liczba rzeczywista b , a nie bi). W automatyce i elektrotechnice jednostkę urojoną pisze się j , bo i oznacza tam prąd.

Liczymy jak z wielomianami zmiennej i , zamieniając i^2 na -1 :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Sprzężenie liczby $z = a + bi$ to $\bar{z} = a - bi$. Feynman zauważa, że i i $-i$ są nierozróżnialne: obie spełniają $x^2 = -1$, więc każde prawdziwe równanie pozostaje prawdziwe po zamianie i na $-i$ wszędzie. Iloczyn $z\bar{z} = a^2 + b^2$ jest rzeczywisty i nieujemny. Pierwiastek z niego to **moduł** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dzielenie robimy, mnożąc licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika. Mianownik staje się wtedy liczbą rzeczywistą:

$$\frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + 3i - 3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

1.1 Równanie kwadratowe z ujemnym wyróżnikiem

W lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste równanie $ax^2 + bx + c = 0$ z $\Delta < 0$ nie miało rozwiązań. Teraz ma dwa: $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$, więc $x = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. Dla $x^2 + 2x + 5 = 0$: $\Delta = -16$, $x = -1 \pm 2i$. **Nierzeczywiste** pierwiastki wielomianu o współczynnikach rzeczywistych występują zawsze w **parach sprzężonych**, bo zamiana i na $-i$ nie zmienia współczynników. To dokładnie te pierwiastki dadzą drgania tłumione w lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

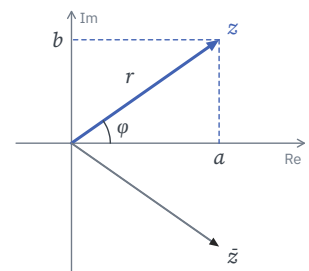
6 zadań · ok. 30 min

- 1 Dla $z = 3 + 4i$ i $w = 1 - 2i$ oblicz $z + w$, zw , $\bar{z}$, $|z|$ i z/w .
- 2 Oblicz i^3 , i^4 , i^{10} , i^{2027} .
- 3 Rozwiąż $x^2 - 4x + 13 = 0$ i sprawdź wzory Viète'a dla otrzymanych pierwiastków.
- 4 Sprawdź rachunek Bombellego: pokaż, że $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.
- 5 Pokaż, że $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$ i $|zw| = |z| |w|$.
- 6 Wielomian $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ ma pierwiastek $x = 1$. Znajdź pozostałe (podziel przez $x - 1$, lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste).

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Płaszczyzna zespolona i postać wykładnicza

Liczba $z = a + bi$ to para liczb rzeczywistych, więc można ją narysować jako punkt $(a; b)$ na płaszczyźnie: oś poziomą nazywamy **rzeczywistą**, pionową **urojoną**. Dodawanie liczb zespolonych to wtedy dodawanie wektorów (reguła równoległoboku), moduł $|z|$ to odległość od zera, a $|z - w|$ odległość dwóch punktów (lekcja 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe).



We współrzędnych biegunowych (lekcja 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe) punkt ma moduł $r = |z|$ i kąt φ , zwany **argumentem**: $\varphi = \arg z = \text{atan2}(b, a)$. Argument jest określony z dokładnością do wielokrotności 2π ; atan2 daje wartość główną z przedziału $(-\pi; \pi]$, a dla $z = 0$ argument nie jest określony. Stąd **postać trygonometryczna**

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Drugi zapis, **postać wykładnicza**, uzasadnimy w części 3. Na razie zobacz, co daje mnożenie. Ze wzorów na cosinus i sinus sumy (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne):

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

🔑 MNOŻENIE W POSTACI WYKŁADNICZEJ

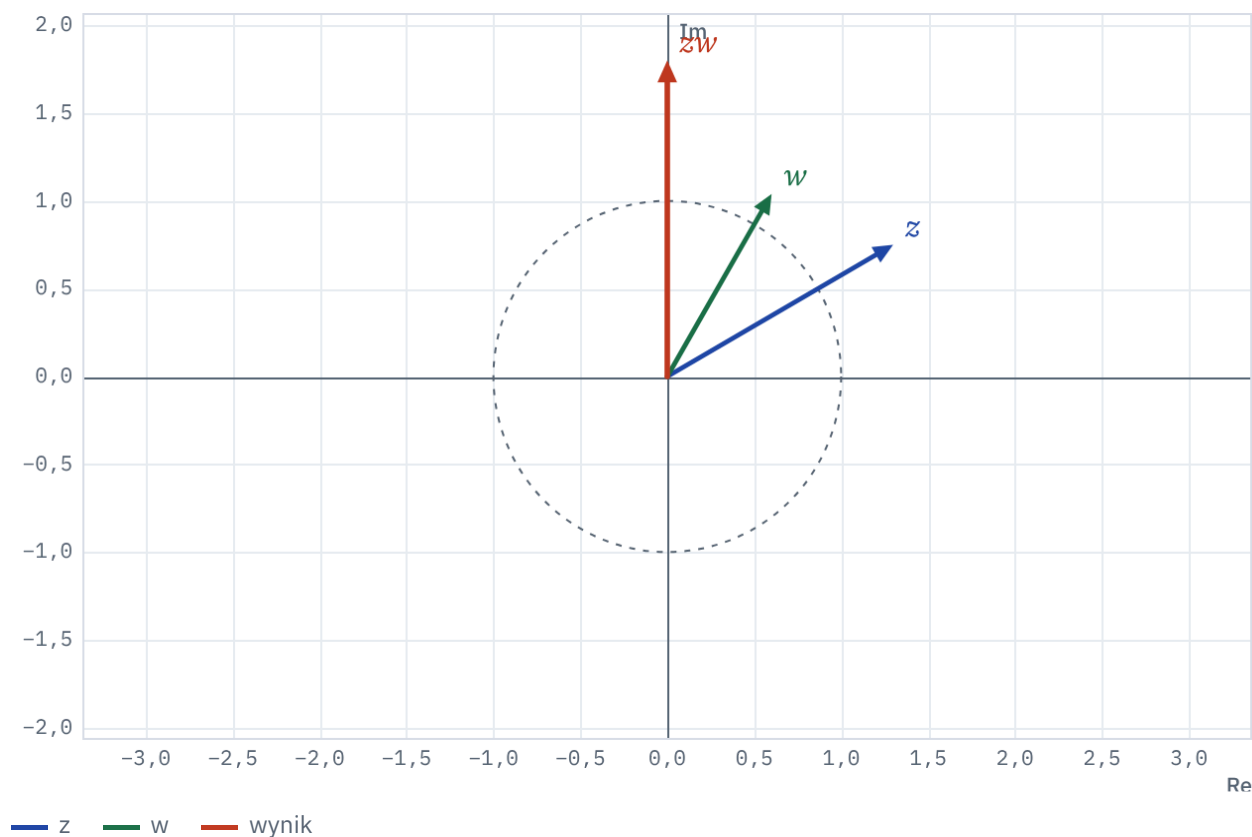
$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Moduły się mnożą, argumenty dodają. Mnożenie przez $e^{i\alpha}$ to obrót o kąt α , a mnożenie przez $i = e^{i\pi/2}$ to obrót o 90° .

Teraz widać, dlaczego $i^2 = -1$: dwa obroty o 90° to obrót o 180° , a ten zamienia 1 na -1 . Liczba i nie jest tajemnicza: mnożenie przez nią to obrót o ćwierć okręgu.

SYMULACJA 1

Dwie liczby zespolone z i w na płaszczyźnie. W trybie „suma” zobaczysz równoległobok. W trybie „iloczyn” moduły się mnożą, a kąty dodają: zw to z obrócone o $\arg w$ i przeskalowane przez $|w|$.


 $z = 1,30 + 0,75i$
 $w = 0,60 + 1,04i$
 $z \cdot w = 0,00 + 1,80i$

moduł 1,800

 argument $90,0^\circ$

Stan na rysunku: $z = 1,30 + 0,75i$, $w = 0,60 + 1,04i$; $z \cdot w = 0,00 + 1,80i$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 25 min

1 Zapisz w postaci wykładniczej: $1 + i$, -2 , $-3i$, $-1 + i\sqrt{3}$.

2 Zapisz w postaci $a + bi$: $4e^{i\pi/6}$, $e^{-i\pi/2}$, $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$.

3 Gdzie na płaszczyźnie leżą liczby, dla których $|z - 2i| = 3$? A te, dla których $|z - 1| = |z + 1|$?

- 4 Obróć punkt (3; 1) o 90° i o 45° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, mnożąc przez odpowiednią liczbę zespoloną.

- 5 Oblicz $(1 + i)^8$ dwa razy: mnożąc wprost (przez $(1 + i)^2 = 2i$) i z postaci wykładniczej.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

3 Wzór Eulera

Skąd $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$? Najkrótsza droga prowadzi przez szereg z lekcji 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe. Tam dotyczył liczb rzeczywistych. Dla zespolonego z **definiujemy** e^z tym samym szeregiem $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$, zbieżnym dla każdego z . Wstawiamy $z = i\varphi$ i używamy $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin \varphi}.$$

WZÓR EULERA

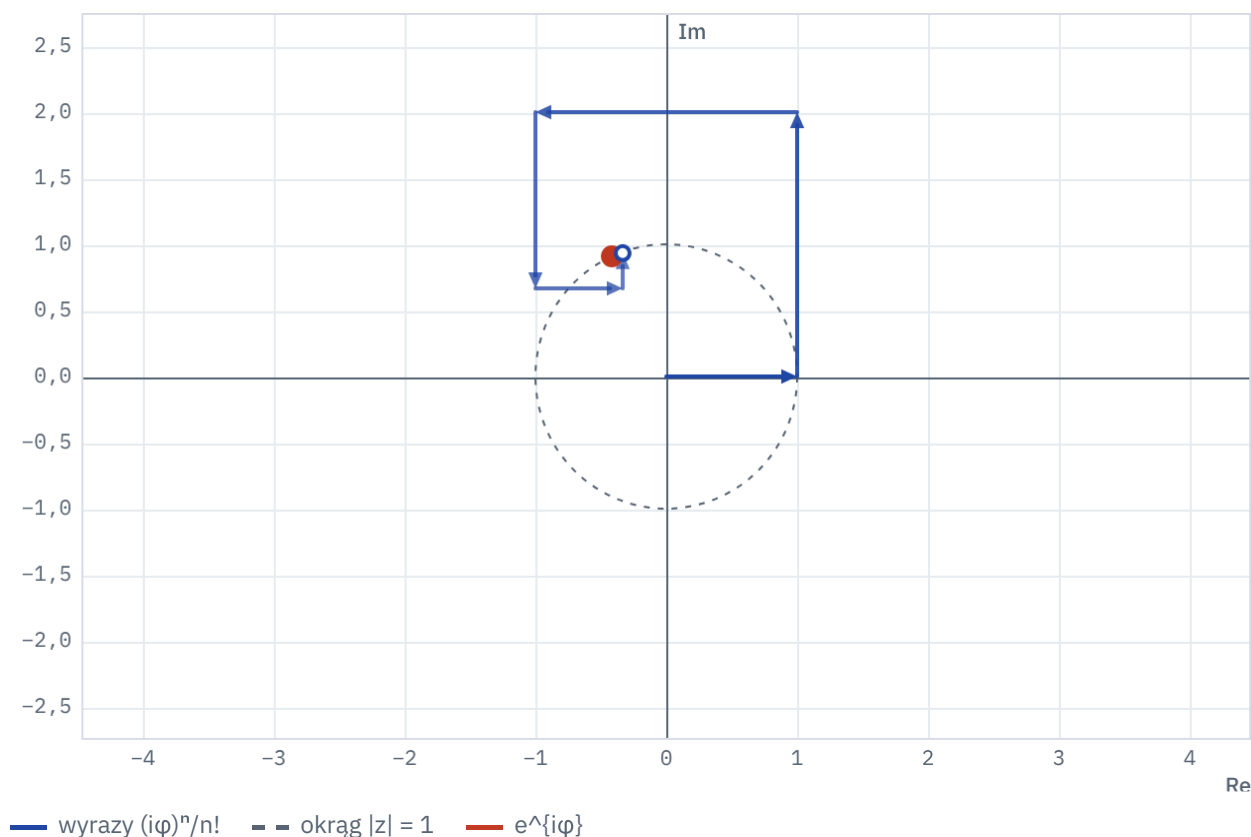
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Feynman dochodzi do tego samego bez szeregów i bez geometrii. Zakłada tylko, że $10^\varepsilon \approx 1 + 2,3025 \varepsilon$ działa także dla małego urojonego ε , i liczy $10^{i/1024} \approx 1 + 0,002\,2486 i$. Potem wielokrotnie podnosi ją do kwadratu ($10^{i/512}$, $10^{i/256}$, ...) i mnoży otrzymane liczby. Części rzeczywista i urojona zaczynają się zmieniać okresowo: to „algebraiczny cosinus” i „algebraiczny sinus”. Na końcu okazuje się, że to dokładnie sinus i cosinus z geometrii, a „algebraiczne $\pi/2$ ” wychodzi mu 1,570. Wzór Eulera nazywa „naszym klejnotem” i „najbardziej niezwykłym wzorem matematyki”.

FLP I-22-6

SYMULACJA 2

Szereg $e^{i\varphi}$ na płaszczyźnie. Kolejne wyrazy $\frac{(i\varphi)^n}{n!}$ to wektory, każdy obrócony o 90° względem poprzedniego i coraz krótszy. Ich suma zawija się spiralnie i trafia w punkt okręgu jednostkowego pod kątem φ .



suma N wyrazów $-0,3333 + 0,9333i$

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ $-0,4161 + 0,9093i$

odległość $0,08623$

Stan na rysunku: $\varphi = 2,00$ rad, $N = 6$; suma $-0,3333 + 0,9333i$, $e^{i\varphi} = -0,4161 + 0,9093i$.

Wzór Eulera to fabryka tożsamości trygonometrycznych. W lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne obiecaliśmy, że wzory na sinus i cosinus sumy wyprowadzimy prościej. W części 2 szliśmy w drugą stronę: z tych wzorów dostaliśmy regułę mnożenia. Teraz odwracamy kierunek. Z szeregu da się udowodnić (mnożąc szeregi wyraz po wyrazie), że $e^{z+w} = e^z e^w$ także dla zespolonych z i w . Stąd $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$, czyli

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone. Dwa wzory naraz, bez rysunku.

Porównaj też wzory na $\cos$ i $\sin$ przez $e^{\pm i\varphi}$ z definicjami $\cosh$ i $\sinh$ z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne: wstawiając do definicji $\cosh$ argument urojony, dostajemy $\cos \varphi = \cosh(i\varphi)$, a podobnie $\sin \varphi = -i \sinh(i\varphi)$. Funkcje trygonometryczne i hiperboliczne to jedna rodzina.

Teraz widać też, czemu szereg $\frac{1}{1+x^2}$ z lekcji 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe ma promień 1: zera mianownika $\pm i$ leżą na płaszczyźnie zespolonej w odległości 1 od zera.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 35 min

1 Oblicz $e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi}$, $e^{2\pi i}$, $e^{i\pi/3}$.

2 Ile wynosi $|e^{i\varphi}|$ dla rzeczywistego φ ? A $|e^{a+ib}|$?

3 Wyprowadź wzór na $\cos 3x$ przez $\cos x$, rozwijając $(\cos x + i \sin x)^3 = e^{3ix}$ i biorąc część rzeczywistą.

4 Pokaż, korzystając z $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, że $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$.

5 Policz pierwsze cztery sumy częściowe szeregu e^i (czyli $\varphi = 1$) i porównaj z $\cos 1 + i \sin 1 \approx 0,5403 + 0,8415i$.

6 Oblicz i^i .

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Potęgi i pierwiastki

W postaci wykładniczej potęgowanie jest proste: $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$ dla całkowitego n . To wzór de Moivre'a. (Dla niecałkowitych wykładników potęga ma wiele wartości, jak i^i i pierwiastki poniżej.) Odwrotnie, równanie $z^n = w$ z $w = Re^{i\psi} \neq 0$ ma dokładnie n rozwiązań:

PIERWIASTKI N -TEGO STOPNIA

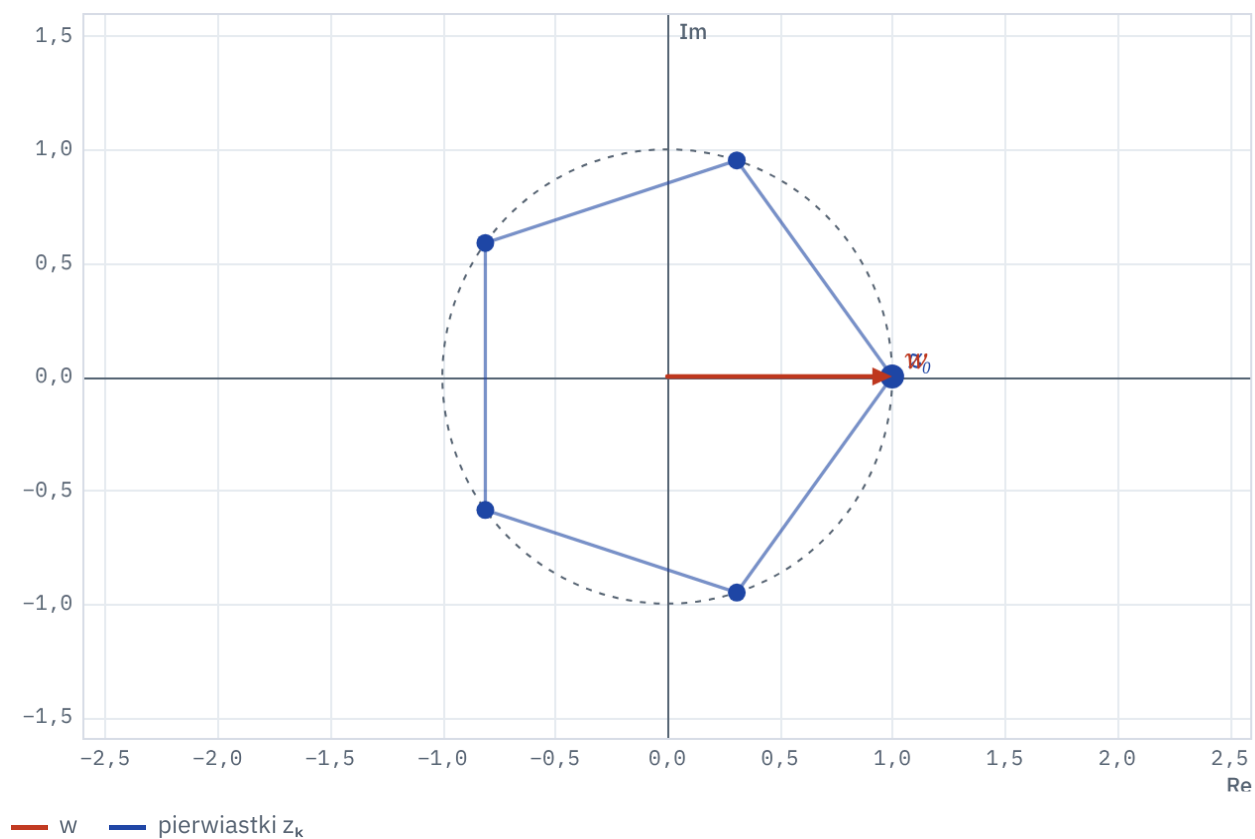
$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i(\psi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Leżą na okręgu o promieniu $\sqrt[n]{R}$ w wierzchołkach n -kąta foremnego.

Skąd n rozwiązań? Kąt ψ i kąt $\psi + 2\pi$ opisują ten sam punkt w , ale po podzieleniu przez n dają różne punkty. Dla $w = 1$ dostajemy pierwiastki z jednościci $e^{2k\pi i/n}$. Ich suma jest równa zeru: to wierzchołki wielokąta foremnego, a wektory od środka do wierzchołków się równoważą.

SYMULACJA 3

Pierwiastki stopnia n z liczby w . Zmieniaj n i położenie w : pierwiastki zawsze tworzą wielokąt foremny. Gdy w obiega zero raz, każdy pierwiastek przesuwają się tylko o $1/n$ okręgu i trafia na miejsce sąsiada.



w 1,00 + 0,00i

$|z_k| = \sqrt[n]{|w|}$ 1,000

z_0 1,000 + 0,000i

kąt między sąsiednimi 72,0°

Stan na rysunku: $n = 5$, $w = 1,00 + 0,00i$; pierwiastki na okręgu o promieniu 1,000, co 72,0°.

Przykład 4.1

Trzy pierwiastki sześciennie z 8

Rozwiąż $z^3 = 8$ i $z^3 = -8$.

- 1 $8 = 8e^{i0}$: $z_k = 2e^{2k\pi i/3}$, czyli $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$.
- 2 $-8 = 8e^{i\pi}$: $z_k = 2e^{i(\pi+2k\pi)/3}$, czyli $1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}$.

Wynik: każde równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty (2 lub -2) i parę sprzężoną.

Sprawdzenie: $(-1 + i\sqrt{3})^3$: moduł $2^3 = 8$, kąt $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, więc wynik $8 \checkmark$. Suma trzech pierwiastków z $z^3 - 8$ to 0, zgodnie ze wzorami Viète'a (brak wyrazu z z^2) $\checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Oblicz $(1 + i\sqrt{3})^6$ z wzoru de Moivre'a.

- 2 Podaj wszystkie pierwiastki czwartego stopnia z 1. Narysuj je.

- 3 Znajdź oba pierwiastki kwadratowe z i . Feynman zauważa, że $\sqrt{i}$ „nie jest niczym nowym”: sprawdź, że to zwykła liczba zespolona.

- 4 Rozwiąż $z^4 = 16i$. Podaj moduł i argumenty pierwiastków.

- 5 Pokaż, że suma pierwiastków n -tego stopnia z 1 ($n \geq 2$) jest równa zeru, sumując je jak szereg geometryczny.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Fazory: drgania i prąd przemienny

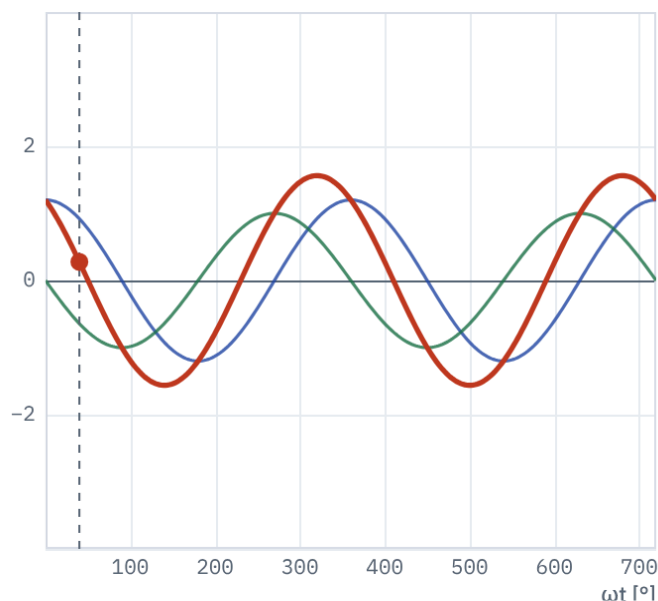
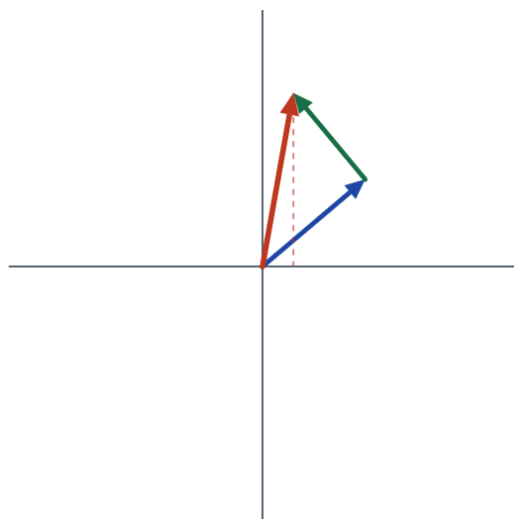
Drganie harmoniczne $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne to część rzeczywista wirującej liczby zespolonej:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(A e^{i(\omega t + \varphi)} \right) = \operatorname{Re} \left(\hat{X} e^{i\omega t} \right), \quad \hat{X} = A e^{i\varphi}.$$

Liczba $\hat{X}$ to **fazor**, czyli **amplituda zespolona**: jej moduł to amplituda, a argument to faza. Daszek przypomina, że to liczba zespolona. Feynman wyjaśnia, dlaczego warto tak robić. Funkcja wykładnicza jest prostsza niż cosinus: przesunięcie fazy to mnożenie, $e^{i(\omega t - \Delta)} = e^{i\omega t} e^{-i\Delta}$, a pochodna to mnożenie przez $i\omega$, bo $\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$. Dodaje przy tym ostrzeżenie: siła ani położenie nie są naprawdę zespolone. Fizyczna jest tylko część rzeczywista. Sztuczka działa wyłącznie dla równań **liniowych o rzeczywistych współczynnikach**, w których x i jego pochodne występują w pierwszej (lub zerowej) potęgce. W równaniu z x^2 części rzeczywista i urojona by się pomieszały. (FLP I-23-1)

Najważniejsza konsekwencja: **drgania o tej samej częstotliwości dodaje się, dodając fazory**, czyli zwykle wektory na płaszczyźnie. Zamiast męczyć się ze wzorami na sumę cosinusów, rysujesz strzałki.

SYMULACJA 4 Dwa fazory obracają się z tą samą prędkością kątową ω . Ich suma to też fazor, a rzuty na oś rzeczywistą dają wykresy drgań (po prawej). Zmieniaj amplitudy i różnicę faz: przy 180° i równych amplitudach drgania się wygaszają.



— $A_1 \cos(\omega t)$ — $A_2 \cos(\omega t + \Delta\phi)$ — suma

fazor sumy $1,20 + 1,00i$

amplituda sumy **1,562**

faza sumy $39,8^\circ$

Stan na rysunku: $A_1 = 1,20$, $A_2 = 1,00$, $\Delta\phi = 90^\circ$; suma: amplituda 1,562, faza $39,8^\circ$.

Przykład 5.1

Suma

$$3 \cos \omega t + 4 \sin \omega t$$

Zapisz $x(t) = 3 \cos \omega t + 4 \sin \omega t$ jako jedno drganie $A \cos(\omega t + \varphi)$.

- 1 $3 \cos \omega t$ ma fazor 3. $4 \sin \omega t = 4 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ ma fazor $4e^{-i\pi/2} = -4i$.
- 2 Suma fazorów: $\hat{X} = 3 - 4i$. Moduł $A = 5$, argument $\varphi = \text{atan2}(-4, 3) \approx -53,13^\circ$.

Wynik: $x(t) = 5 \cos(\omega t - 53,13^\circ)$.

Sprawdzenie: $t = 0$: $5 \cos(-53,13^\circ) = 5 \cdot 0,6 = 3 \checkmark$. Trójkąt 3-4-5 z lekcji 0.3
Trygonometria i funkcje hiperboliczne.

5.1 Impedancja: prawo Ohma dla prądu przemiennego

W obwodzie z prądem przemiennym $I(t) = \text{Re}(\hat{I}e^{i\omega t})$ napięcie na oporniku to RI , na cewce $L \frac{dI}{dt}$, a na kondensatorze $\frac{1}{C} \int I dt$. (Te trzy prawa przyjmij na razie jako dane; kondensator i indukcję omówimy w fizyce: Dział 14: Potencjał, przewodniki i kondensatory i Dział 16: Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne.) Pochodna to mnożenie przez $i\omega$, a całka to dzielenie przez $i\omega$ (dla przebiegu ustalonego, bez stałej całkowania). Wszystkie trzy prawa mają więc postać $\hat{U} = Z\hat{I}$ z **impedancją**

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}.$$

Impedancje szeregowo się dodają, równolegle dodają się odwrotnościami, jak opory. Moduł $|Z|$ mówi, ile woltów przypada na amper, a argument, o ile napięcie wyprzedza prąd.

Przykład 5.2

Obwód RLC w gniazdku

Szeregowo połączono $R = 100 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ i $C = 10 \mu\text{F}$ i podłączono do gniazdka: 230 V (to wartość skuteczna; amplituda wynosi $230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$), 50 Hz . Jaka jest amplituda prądu i przesunięcie fazy? Przy jakiej częstotliwości prąd jest największy?

- 1 $\omega = 2\pi \cdot 50 \approx 314,2 \text{ s}^{-1}$. $\omega L \approx 31,4 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} \approx 318,3 \Omega$.
- 2 $Z = 100 + i(31,4 - 318,3) = 100 - 286,9i \Omega$. $|Z| \approx 303,8 \Omega$, $\arg Z \approx -70,8^\circ$.
- 3 Amplituda prądu $325/303,8 \approx 1,07 \text{ A}$. Argument ujemny: napięcie opóźnia się względem prądu o $70,8^\circ$ (obwód „pojemnościowy”).
- 4 Prąd jest największy, gdy część urojona Z znika: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, czyli $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 159,2 \text{ Hz}$. Wtedy $Z = R$ i amplituda prądu to $325/100 = 3,25 \text{ A}$.

Wynik: amplituda prądu $1,07 \text{ A}$ przy 50 Hz (wartość skuteczna $0,76 \text{ A}$), prąd wyprzedza napięcie o $70,8^\circ$; rezonans przy 159 Hz .

Sprawdzenie: jednostki ωL : $\text{s}^{-1} \cdot \text{H} = \Omega$ ✓. Rezonans to ta sama częstotać własna co $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ dla oscylatora LC ; drgania wymuszone zbadamy w 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne i w Dział 6: Drgania, rezonans i układy liniowe.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Podaj fazory drgań: $5 \cos(\omega t + 30^\circ)$; $2 \sin \omega t$; $-3 \cos \omega t$.

- 2 Dodaj drgania $2 \cos \omega t$ i $2 \cos(\omega t + 60^\circ)$.

- 3 Ile wynosi impedancja cewki $0,2 \text{ H}$ i kondensatora $50 \mu\text{F}$ przy 50 Hz ? Która z nich przewodzi prąd przemienny lepiej?

- 4 Filtr RC: napięcie na kondensatorze to $\hat{U}_C = \frac{Z_C}{R + Z_C} \hat{U} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \hat{U}$. Dla $R = 1 \text{ k}\Omega$ i $C = 1 \mu\text{F}$ oblicz $|H| = |\hat{U}_C/\hat{U}|$ przy 50 Hz , 159 Hz i 1 kHz . Dlaczego to filtr dolnoprzepustowy?

- 5 Pochodna $x(t) = \text{Re}(\hat{X}e^{i\omega t})$ to $\text{Re}(i\omega \hat{X}e^{i\omega t})$. Co mnożenie przez $i\omega$ robi z amplitudą i fazą? Sprawdź na $x = \cos \omega t$.


- 6 Feynman ostrzega, że sztuczka z liczbami zespolonymi działa tylko dla równań liniowych. Pokaż na przykładzie, że $\operatorname{Re}(z^2) \neq (\operatorname{Re} z)^2$, i wyjaśnij, czemu moc w obwodzie, $P = UI$, trzeba liczyć z części rzeczywistych.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

- × „Liczby urojone nie istnieją, to tylko sztuczka.”

Są tak samo „prawdziwe” jak liczby ujemne: to punkty płaszczyzny z określonym dodawaniem i mnożeniem. Mnożenie przez i to obrót o 90° .

- × „ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ zawsze.”

Gdy a i b są obie ujemne, nie: $\sqrt{(-1)(-1)} = 1$, a $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$. Pierwiastek z liczby zespolonej ma kilka wartości i trzeba wybierać.

- × „ $\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4i$.”

Część urojona to liczba rzeczywista: $\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4$.

- × „ $\arg z = \arctan(b/a)$.”

Tylko dla $a > 0$. Dla $-1 - i$ argument to -135° , a nie 45° . Używaj $\operatorname{atan2}$ (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne).

- × „Równanie $z^3 = 8$ ma jedno rozwiązanie.”

Ma trzy: rzeczywiste 2 i dwa zespolone (przykład 4.1 w tej lekcji).

- × „Skoro fazory to liczby zespolone, mogą je dowolnie mnożyć.”

Fazory dodaje się i mnoży przez impedancje (działania liniowe). Iloczynu dwóch fazorów, np. przy liczeniu mocy, nie wolno traktować jak iloczynu wielkości fizycznych.

Sprawdź się

1 Ile wynosi $(2 + i)(2 - i)$?

5.

2 Jaki jest moduł i argument liczby $-2i$?

2 i -90° .

3 Co robi mnożenie przez i na płaszczyźnie?

Obraca o 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

4 Ile wynosi $e^{i\pi}$?

-1 .

5 Ile rozwiązań ma $z^5 = 1$ i gdzie leżą?

Pięć, w wierzchołkach pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy.

6 Jaka jest impedancja cewki?

$i\omega L$.

7 Dlaczego fazory można stosować tylko do równań liniowych?

Bo dla równań liniowych o rzeczywistych współczynnikach część rzeczywista rozwiązania zespolonego sama spełnia równanie (z rzeczywistą częścią wymuszenia); przy nieliniowości części się mieszają.

ALGEBRA I GEOMETRIA

$$i^2 = -1; z = a + bi, \operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b$$

$$\bar{z} = a - bi; z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

dzielenie: pomnóż przez sprzężenie mianownika

$$z = re^{i\varphi}, r = |z|, \varphi = \operatorname{atan2}(b, a)$$

mnożenie: moduły razy, argumenty plus;

$\cdot i$ = obrót o 90°

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; e^{i\pi} = -1$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

POTĘGI, PIERWIASTKI, FAZORY

$$\text{de Moivre: } (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$z^n = Re^{i\psi}; z_k = \sqrt[n]{R} e^{i(\psi+2k\pi)/n}, k = 0, \dots, n-1$$

współczynniki rzeczywiste $\Rightarrow$ pierwiastki nierzeczywiste w parach sprzężonych

$$A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\hat{X} e^{i\omega t}), \hat{X} = Ae^{i\varphi}$$

pochodna: $\cdot i\omega$; suma drgań: suma fazorów

$$Z_R = R, Z_L = i\omega L, Z_C = \frac{1}{i\omega C}; \hat{U} = Z\hat{I}$$

tylko równania liniowe; w automatyce j zamiast i

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 22-5 i 22-6 (liczby zespolone jako „ostatni wynalazek” i wzór Eulera policzony z tablicy potęg).
- **Dla chętnych:** 23-1 (liczby zespolone w drganiach; od razu prowadzi do rezonansu w 23-2 i 23-3).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: rozdziały o liczbach zespolonych (postać algebraiczna, biegunowa i wykładnicza, de Moivre).
- Dowolny podręcznik elektrotechniki: obliczenia obwodów prądu przemiennego metodą liczb zespolonych.

Liczby zespolone wrócą przy równaniach różniczkowych (4.1 Równania różniczkowe zwyczajne): pierwiastki zespolone równania charakterystycznego dają drgania tłumione. Wartości własne macierzy obrotu są zespolone (2.3 Wartości i wektory własne), a transformata Fouriera (4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca) to fazy dla wszystkich częstości naraz. W mechanice kwantowej amplitudy prawdopodobieństwa są liczbami zespolonymi (Dział 17: Amplitudy prawdopodobieństwa).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $4 + 2i$; $3 - 6i + 4i - 8i^2 = 11 - 2i$; $3 - 4i$; 5 ; $\frac{(3+4i)(1+2i)}{5} = \frac{-5+10i}{5} = -1 + 2i$.
- $-i$; 1 ; -1 ; $2027 = 4 \cdot 506 + 3$, więc $i^{2027} = -i$. Potęgi i powtarzają się co 4.
- $\Delta = -36$, $x = 2 \pm 3i$. Suma $4 = -\frac{b}{a} \checkmark$, iloczyn $4 + 9 = 13 = \frac{c}{a} \checkmark$.
- $(2+i)^2 = 3 + 4i$, $(3+4i)(2+i) = 6 + 3i + 8i + 4i^2 = 2 + 11i \checkmark$. A $11i = \sqrt{-121}$.
- Pierwsze: rachunkiem albo z obserwacji Feynmana (zamiana $i \rightarrow -i$ zachowuje równości). Drugie: $|zw|^2 = zw \bar{z} \bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2 |w|^2$.
- $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$, a $x^2 - 2x + 2 = 0$ daje $x = 1 \pm i$. Para sprzężona, zgodnie z regułą.

Zadania • część 2

- $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$; $2e^{i\pi}$; $3e^{-i\pi/2}$; $2e^{i2\pi/3}$.
- $2\sqrt{3} + 2i$; $-i$; $-1 + i$.
- Okrąg o środku $2i$ i promieniu 3. Punkty jednakowo odległe od 1 i -1 : oś urojona ($\text{Re } z = 0$).
- $i(3+i) = -1 + 3i$, czyli $(-1; 3)$. $e^{i\pi/4}(3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+4i) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \approx (1,41; 2,83)$.
- $(2i)^4 = 16i^4 = 16$. $(\sqrt{2})^8 e^{i8\pi/4} = 16e^{2\pi i} = 16 \checkmark$.

Zadania • część 3

- i ; -1 ; 1 ; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- 1, bo $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. $|e^a e^{ib}| = e^a$.
- $\text{Re} : \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
- $\frac{1}{4}(e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$.
- 1; $1 + i$; $0,5 + i$; $0,5 + 0,8333i$. Po ośmiu wyrazach $0,540\,28 + 0,841\,47i$.
- $e^{i \cdot i\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0,2079$: liczba rzeczywista! Ściślej: $i = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$ dla każdego całkowitego k , więc i^i ma nieskończenie wiele wartości $e^{-\pi/2 - 2k\pi}$. Wartość dla $k = 0$ to wartość główna.

Zadania • część 4

- $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, więc $2^6 e^{2\pi i} = 64$.
- 1, i , -1 , $-i$: wierzchołki kwadratu.
- $i = e^{i\pi/2}$, więc $\pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Sprawdzenie: $\frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2i = i \checkmark$.
- $16i = 16e^{i\pi/2}$: moduł 2, kąty $22,5^\circ$, $112,5^\circ$, $202,5^\circ$, $292,5^\circ$.

5. $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q = e^{2\pi i/n} \neq 1$. Ale $q^n = e^{2\pi i} = 1$, więc licznik to 0.

Zadania • część 5

1. $5e^{i\pi/6}$; $2e^{-i\pi/2} = -2i$; $3e^{i\pi} = -3$.

2. $2 + 2e^{i\pi/3} = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}$; $2\sqrt{3}\cos(\omega t + 30^\circ) \approx 3,46\cos(\omega t + 30^\circ)$.

3. $Z_L = i \cdot 62,8 \Omega$; $Z_C = -i \cdot 63,7 \Omega$. Prawie tyle samo (cewka minimalnie lepiej; ta para ma rezonans przy ok. 50,3 Hz); przy wyższej częstotliwości kondensator przewodzi lepiej, cewka gorzej.

4. $\omega RC = 0,314$; 1; 6,28. $|H| = 1/\sqrt{1+(\omega RC)^2} \approx 0,954$; 0,707; 0,157. Niskie częstotliwości przechodzą prawie bez zmian, wysokie są tłumione.

5. Amplituda razy ω , faza $+90^\circ$. $\text{Re}(i\omega e^{i\omega t}) = -\omega \sin \omega t = \omega \cos(\omega t + 90^\circ) \checkmark$. Prędkość w drganiu wyprzedza położenie o ćwierć okresu.

6. $z = 1 + i$: $\text{Re}(z^2) = \text{Re}(2i) = 0$, a $(\text{Re } z)^2 = 1$. Moc to iloczyn dwóch wielkości, czyli działanie nieliniowe: najpierw bierzemy części rzeczywiste $U(t)$ i $I(t)$, dopiero potem mnożymy. (Średnia moc to $\frac{1}{2} \text{Re}(\hat{U}\hat{I}) = \frac{1}{2}|\hat{U}||\hat{I}|\cos(\varphi_U - \varphi_I)$; czynnik $\frac{1}{2}$ bierze się ze średniej z $\cos^2$, por. zadanie 3.4.)

Matematyka • Liczby zespolone i fazory. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 22-5, 22-6 i 23-1; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.