

Szeregi liczbowe i potęgowe

Czy można dodać nieskończenie wiele liczb? Czasem wychodzi liczba skończona, jak w paradoksie Zenona, a czasem nie, choć dodawane liczby maleją do zera. Ta lekcja uczy rozpoznawać, kiedy suma ma sens: od szeregu geometrycznego, przez zaskakująco rozbieżny szereg harmoniczny (i stos klocków wystający dowolnie daleko poza stół), do szeregów potęgowych, które zamieniają funkcje w nieskończone wielomiany. Na końcu policzysz z nich e , π i $\ln 2$.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

27 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 8-2, 15-8; K. A. Stroud,
Engineering Mathematics

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: piłka, która odbija się nieskończenie wiele razy
- 1 Szereg i jego suma
- 2 Szereg harmoniczny i stos klocków
- 3 Kryteria zbieżności
- 4 Szeregi naprzemienne
- 5 Szeregi potęgowe i szereg Taylora
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej



Prolog: piłka, która odbija się nieskończenie wiele razy

Piłka spada z wysokości 2 m, a po każdym odbiciu wznosi się na 60% poprzedniej wysokości. W idealnym modelu odbija się nieskończenie wiele razy. Czy w takim razie skacze bez końca? To ten sam problem, co u Zenona: nieskończenie wiele kroków w rozumowaniu nie musi oznaczać nieskończenie długiego czasu. FLP I-8-2

Pierwszy spadek trwa $t_0 = \sqrt{2h_0/g} \approx 0,639$ s. Wysokość kolejnego odbicia to 0,6 poprzedniej, a czas spadku z wysokości h to $\sqrt{2h/g}$ (z $h = \frac{1}{2}gt^2$, lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne), więc każdy następny lot w górę i w dół trwa $\sqrt{0,6} \approx 0,775$ długości poprzedniego (pierwszy taki lot trwa $2t_0q$). Całkowity czas to

$$T = t_0 + 2t_0q + 2t_0q^2 + 2t_0q^3 + \dots, \quad q = \sqrt{0,6}.$$

To nieskończona suma. W tej lekcji nauczysz się ją policzyć i sprawdzić, czy w ogóle ma sens.

Pytanie na start. Po jakim czasie piłka przestaje skakać? Odpowiedź w przykładzie 1.1.



Szereg i jego suma

Szereg to nieskończona suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sensu nadaje mu granica. Dodajemy kolejno skończenie wiele wyrazów i dostajemy **sumy częściowe**

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Jeśli ciąg S_N ma skończoną granicę S (lekcja 1.2 Ciągi, granice i ciągłość), szereg jest **zbieżny**, a S to jego suma. W przeciwnym razie szereg jest **rozbieżny**.

1.1 Szereg geometryczny

Najważniejszy szereg ma stały iloraz kolejnych wyrazów: $a + aq + aq^2 + \dots$. Sumę częściową znamy z lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste: $S_N = a \frac{1 - q^N}{1 - q}$ dla $q \neq 1$.

Dla $|q| < 1$ mamy $q^N \rightarrow 0$, więc

SZEREG GEOMETRYCZNY

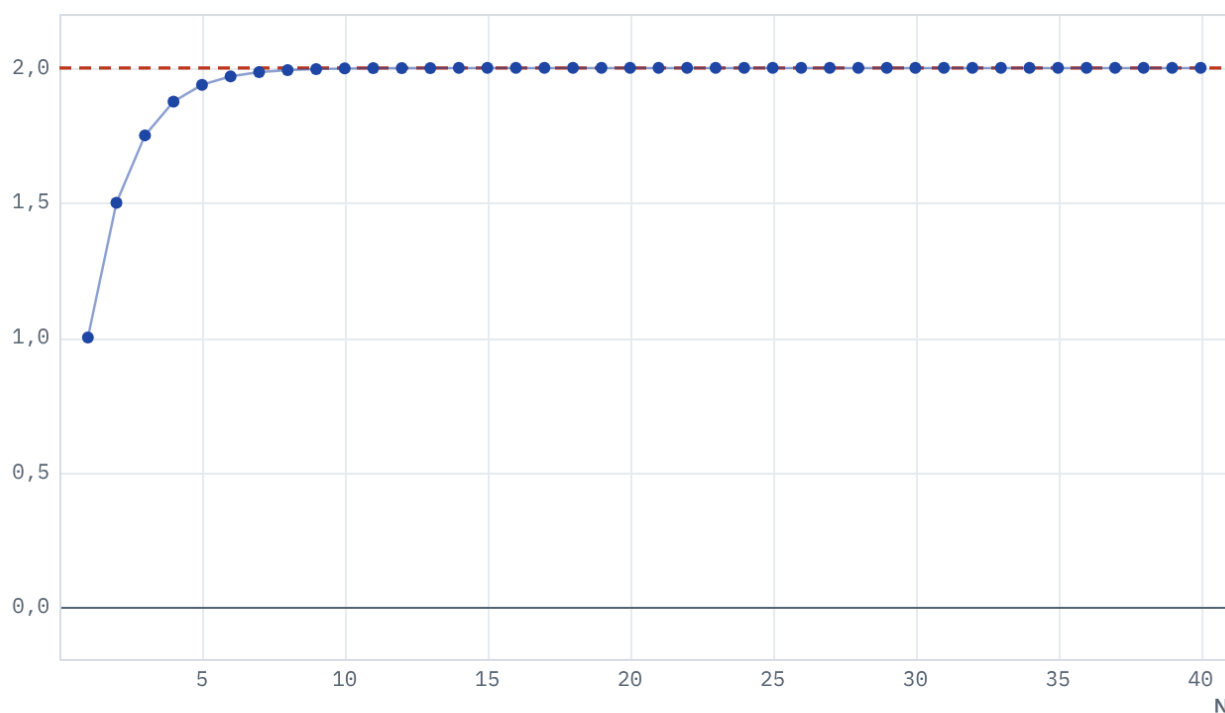
$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad \text{dla } |q| < 1.$$

Dla $|q| \geq 1$ (i $a \neq 0$) szereg jest rozbieżny.

Zenon: $100 + 10 + 1 + \dots = \frac{100}{1-0,1} = 111,\overline{1}$ m. Ułamki okresowe to też szeregi geometryczne:

$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots = \frac{9/10}{1-1/10} = 1$. Liczba $0,999\dots$ to dokładnie 1, a nie „prawie 1”.

SYMULACJA 1 Sumy częściowe S_N kilku szeregów. Szereg geometryczny szybko się stabilizuje. Harmoniczny rośnie tak wolno, że na wykresie wydaje się zbieżny, a jednak nie ma granicy. Naprzemienny zbliża się do swojej sumy, skacząc raz powyżej, raz poniżej.



— sumy częściowe S_N - - - suma szeregu

szereg $\sum q^{n-1}$, $q = 0,50$

S_N 2,00000

zbieżność zbieżny, suma 2,00000

odległość od sumy 0,00000

Stan na rysunku: szereg geometryczny (q), $q = 0,50$; $N = 40$, $S_N = 2,00000$; zbieżny, suma 2,00000.

Przykład 1.1

Ile trwa skakanie piłki?

Dla piłki z prologu ($h_0 = 2$ m, każde odbicie na 60% wysokości) oblicz całkowitą drogę i całkowity czas skakania.

- 1 Droga ($r = 0,6$; w lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste po pięciu wzlotach wyszło 7,533 m): spadek h_0 , potem każde odbicie to lot w górę i w dół:

$$h_0 + 2h_0r + 2h_0r^2 + \dots = h_0 + \frac{2h_0r}{1-r} = 2 + \frac{2,4}{0,4} = 8 \text{ m.}$$
- 2 Czas: $T = t_0 + \frac{2t_0q}{1-q}$ z $q = \sqrt{0,6} \approx 0,7746$ i $t_0 = \sqrt{4/9,81} \approx 0,6386$ s.
- 3 $T \approx 0,6386 + \frac{2 \cdot 0,6386 \cdot 0,7746}{0,2254} \approx 5,03$ s.

Wynik: piłka przebywa 8 m i przestaje skakać po ok. 5,0 s, choć w modelu odbija się nieskończenie wiele razy.

Sprawdzenie: po 20 odbiciach do końca zostaje tylko 0,027 s, więc ogon szeregu naprawdę znika ✓. Prawdziwa piłka przestaje odbijać się wcześniej, bo przy małych prędkościach model stałego współczynnika odbicia przestaje działać.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 25 min

- 1 Oblicz sumy: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$; $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \dots$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

- 2 Zamień na ułamek zwykły: $0,\overline{3}$, $0,\overline{12}$, $2,1\overline{5}$.

- 3 Dla jakich x zbieżny jest szereg $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$? Ile wynosi jego suma?

- 4 Lek podaje się co 24 godziny w dawce 100 mg, a w ciągu doby organizm usuwa 75% leku. Ile leku jest w organizmie tuż po bardzo wielu dawkach?

- 5 Wyjaśnij przez sumy częściowe, dlaczego szereg $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nie ma sumy, choć „grupując” wyrazy można dostać $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$ albo $1 - (1 - 1) - \dots = 1$.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Szereg harmoniczny i stos klocków

Warunek konieczny zbieżności jest oczywisty: jeśli szereg jest zbieżny, to $a_n \rightarrow 0$. Inaczej sumy częściowe wciąż przyrastałyby o coś niemałego. Ale ten warunek nie wystarcza. Pokazuje to szereg harmoniczny:

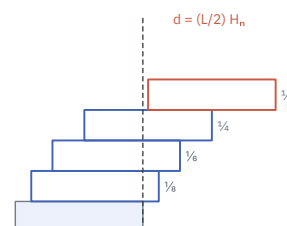
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty.$$

Wyrazy dążą do zera, a suma jest nieskończona. Dowód z XIV wieku (Mikołaj z Oresme) grupuje wyrazy:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} + \dots$$

Każda grupa daje więcej niż $\frac{1}{2}$, a grup jest nieskończenie wiele. Szereg rośnie jednak bardzo wolno: suma częściowa H_N jest bliska $\ln N + 0,577$. Żeby przekroczyć 10, trzeba 12 367 wyrazów, a do 100 potrzeba ok. 10^{43} .

Szereg harmoniczny ma piękne zastosowanie fizyczne. Układamy na krawędzi stołu stos jednakowych klocków o długości L , każdy przesunięty względem niższego. Stos stoi, dopóki dla każdego klocka (i dla stołu) środek masy wszystkich klocków leżących wyżej nie wychodzi poza jego krawędź. Przy największym wysięgu leży dokładnie na krawędzi: to równowaga graniczna, w praktyce zostawiamy mały zapas. Jeśli na każdym poziomie leży jeden klocek, największy wysięg daje ułożenie, w którym najwyższy klocek wystaje o $\frac{L}{2}$ poza drugi, drugi o $\frac{L}{4}$ poza trzeci, trzeci o $\frac{L}{6}$ i tak dalej. Całkowity wysięg n klocków to

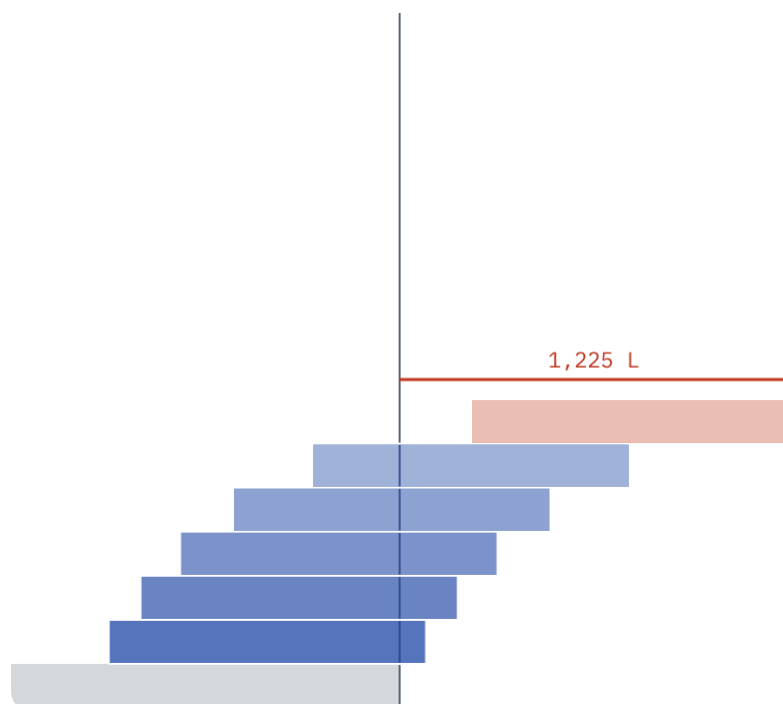


$$d_n = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{L}{2} H_n.$$

Już 4 klocki wystają poza stół o więcej niż długość klocka ($d_4 = 1,04 L$). A ponieważ szereg harmoniczny jest rozbieżny, odpowiednio wysoki stos może wystawać *dowolnie daleko*. Tylko że na wysięg $3L$ potrzeba już 227 klocków. (Przy kilku klockach na jednym poziomie, z przeciwwagami, stos da się wysunąć jeszcze dalej.)

SYMULACJA 2

Stos klocków na krawędzi stołu (pionowa linia). Każdy klocek wysunięty o $\frac{L}{2k}$ względem niższego. Zwiększaj liczbę klocków: wysięg rośnie bez ograniczeń, ale coraz wolniej, jak $\frac{L}{2} \ln n$.



wysięg = $(L/2) \cdot H_n$ 1,225 L

H_n 2,450

dla porównania $\frac{1}{2} \cdot \ln n + 0,29$ 1,184

Stan na rysunku: $n = 6$ klocków, wysięg 1,225 L.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 25 min

1 Który szereg na pewno jest rozbieżny na podstawie warunku koniecznego: $\sum \frac{n}{n+1}$, $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \cos \frac{1}{n}$?

2 Ile wystają poza stół stosy 2 i 3 klocków o długości 20 cm?

3 Uzasadnij wysięg $\frac{L}{2k}$: środek masy k górnych klocków musi leżeć dokładnie na krawędzi klocka $k + 1$. Sprawdź to dla $k = 1$ i $k = 2$.

4 Grupując wyrazy jak Oresme, pokaż, że $H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ (ostro dla $m \geq 2$). Ile wyrazów wystarczy, żeby suma przekroczyła 6?

podstawowe średnie feynmanowskie

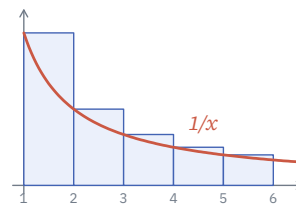
Zwykle nie umiemy policzyć sumy, ale umiemy rozstrzygnąć, czy istnieje. Dla szeregów o wyrazach dodatnich służą do tego trzy narzędzia.

3.1 Porównanie

Jeśli $0 \leq a_n \leq b_n$ i $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ też. Jeśli $\sum a_n$ jest rozbieżny, to $\sum b_n$ też. Szereg mniejszy od zbieżnego jest zbieżny, większy od rozbieżnego rozbieżny. Porównujemy zwykle z szeregiem geometrycznym albo z szeregami $\sum \frac{1}{n^p}$ z części 3.2.

3.2 Kryterium całkowe i szeregi $\sum \frac{1}{n^p}$

Suma $\sum f(n)$ dla dodatniej, malejącej funkcji f to pole słupków o szerokości 1. Słupek nad $[n; n+1]$ ma wysokość $f(n)$, więc leży nad wykresem, a przesunięty o 1 w lewo leży pod nim: $\int_1^{N+1} f(x) dx \leq S_N \leq f(1) + \int_1^N f(x) dx$. Dlatego szereg i całka niewłaściwa $\int_1^\infty f(x) dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne (lekcja 1.5 Całki), o ile f jest dodatnia i malejąca na $[1; \infty)$. Stąd:



🔊 SZEREGI P

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leq 1$.

Harmoniczny to przypadek graniczny $p = 1$, odpowiadający całce $\int \frac{dx}{x} = \ln x \rightarrow \infty$. Euler pokazał, że $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$.

3.3 Kryterium d'Alemberta (ilorazowe)

Policz granicę ilorazu kolejnych wyrazów $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Dla $q < 1$ szereg jest zbieżny (od pewnego miejsca maleje szybciej niż geometryczny), dla $q > 1$ (także $q = \infty$) rozbieżny, a dla $q = 1$ kryterium nic nie mówi. To najwygodniejsze kryterium dla szeregów z silnią i potęgami.

Przykład 3.1

Trzy szeregi, trzy kryteria

Zbadaj zbieżność: (a) $\sum \frac{n}{2^n}$; (b) $\sum \frac{1}{n^2 + n}$; (c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- 1 (a) d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. Zbieżny (suma wynosi 2).
- 2 (b) Porównanie: $\frac{1}{n^2 + n} < \frac{1}{n^2}$, a $\sum \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Zbieżny. Suma: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (ułamki proste, lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste), więc $S_N = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$.
- 3 (c) Szereg p z $p = \frac{1}{2} \leq 1$. Rozbieżny.

Wynik: (a) i (b) zbieżne, z sumami 2 i 1; (c) rozbieżny.

Sprawdzenie: dla (c) d'Alembert daje $\sqrt{n/(n+1)} \rightarrow 1$, czyli nic nie rozstrzyga; dlatego potrzebne było inne kryterium $\checkmark$. Suma (b) „składa się jak teleskop”: wyrazy środkowe się znoszą.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Zbadaj zbieżność: $\sum \frac{1}{n^3}$; $\sum \frac{1}{n^{0,9}}$; $\sum \frac{3^n}{n!}$.
- 2 Zbadaj kryterium d'Alemberta zbieżność szeregu $\sum \frac{n!}{10^n}$.
- 3 Zbadaj $\sum \frac{2n+1}{n^3+5}$ przez porównanie.
- 4 Oblicz sumę teleskopową $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$.
- 5 Pokaż kryterium całkowym, że $\sum \frac{1}{n \ln n}$ (od $n = 2$) jest rozbieżny, choć jego wyrazy maleją szybciej niż $\frac{1}{n}$.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

Szeregi naprzemienne

Gdy znaki wyrazów się zmieniają, szereg zbiega łatwiej, bo wyrazy częściowo się znoszą.

Kryterium Leibniza: jeśli b_n maleje do zera, to szereg $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$ jest zbieżny. Co więcej, błąd sumy częściowej jest mniejszy od pierwszego pominiętego wyrazu: $|S - S_N| < b_{N+1}$. Tę regułę wykorzystaliśmy już w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce.

Przykład: **naprzemienny szereg harmoniczny** jest zbieżny, choć harmoniczny nie jest:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \approx 0,6931.$$

Takie szeregi, zbieżne tylko dzięki zmianie znaków, nazywamy **warunkowo zbieżnymi**. Są delikatne: Riemann pokazał, że przestawiając ich wyrazy, można dostać dowolną sumę. Szeregi zbieżne także po wzięciu wartości bezwzględnych (**bezwzględnie zbieżne**) można przestawiać bez obaw.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 20 min

1 Ile wyrazów szeregu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ wystarczy według oszacowania Leibniza, żeby oszacować $\ln 2$ z błędem mniejszym niż 0,01?

2 Które szeregi są bezwzględnie, a które warunkowo zbieżne: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$; $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$?

3 Oszacuj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ z dokładnością do 0,001.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Szeregi potęgowe i szereg Taylora

Szereg potęgowy to „nieskończony wielomian” $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ (albo z potęgami $(x - a)$). Dla każdego x to zwykły szereg liczbowy, który może być zbieżny albo nie. Okazuje się, że zbiór dobrych x to zawsze przedział: istnieje **promień zbieżności** R taki, że szereg jest zbieżny dla $|x| < R$ i rozbieżny dla $|x| > R$. Na brzegu $|x| = R$ trzeba sprawdzić osobno. Promień zwykle daje kryterium d'Alemberta, o ile granica istnieje (dla $\sin x$ co drugi współczynnik jest zerem, więc porównujemy kolejne niezerowe wyrazy): $\left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| < 1$.

5.1 Szereg Taylora

W lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce funkcję przybliżaliśmy wielomianem Taylora z resztą R_n . Jeśli dla danego x reszta $R_n \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, wielomiany zbiegają do funkcji i dostajemy **szereg Taylora**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

♣ SZEREGI DO ZAPAMIĘTANIA (WOKÓŁ $X = 0$)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (R = \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (R = \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (R = 1)$$

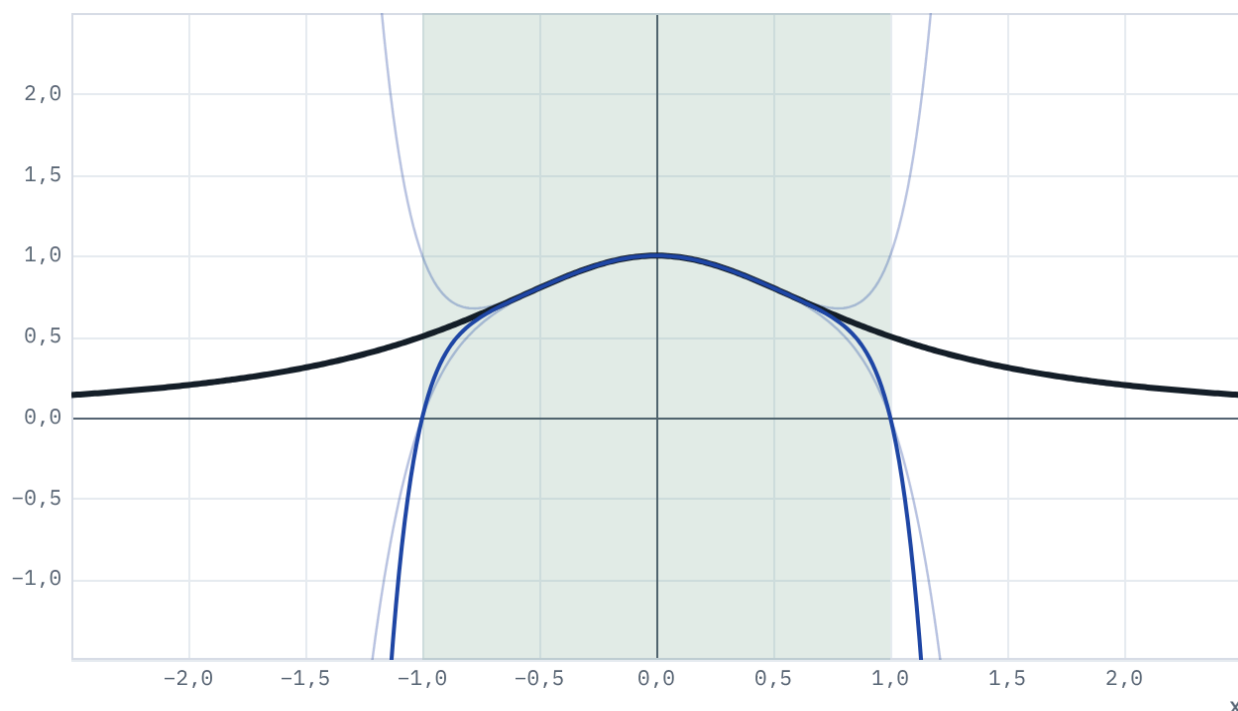
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots \quad (R = 1, \text{ gdy } \alpha \notin \mathbb{N})$$

Wewnątrz przedziału zbieżności, czyli dla $|x| < R$, szeregi potęgowe można różniczkować i całkować wyraz po wyrazie. To potężne narzędzie. Całkując szereg geometryczny $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots$ od 0 do x , dostajesz szereg logarytmu. Całkując $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots$, dostajesz $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, a dla $x = 1$ wzór Leibniza $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$. Punkt $x = 1$ leży na brzegu. Szereg jest tam zbieżny z kryterium Leibniza, a to, że jego suma to nadal $\arctan 1$, wymaga osobnego argumentu (twierdzenia Abela). Tak samo dla $\ln 2$ z szeregu logarytmu.

Promień zbieżności bywa zaskakujący. Funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ jest gładka na całej prostej, a jej szereg działa tylko dla $|x| < 1$. Przyczyna leży poza osią rzeczywistą: mianownik zeruje się w liczbach zespolonych $x = \pm i$, odległych od zera o 1 (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory).

SYMULACJA 3

Sumy częściowe szeregu potęgowego (cienkie linie) i funkcja (gruba). Zwiększaj liczbę wyrazów N . Wewnątrz przedziału zbieżności (zaczerniony) sumy przylegają do funkcji coraz lepiej. Na zewnątrz rozjeżdżają się tym bardziej, im większe N .



— funkcja — suma częściowa — przedział zbieżności

promień zbieżności R 1

błąd w $x = 0,5$ 0,000195

błąd w $x = 2$ 819,200

Stan na rysunku: $1/(1+x^2)$, $N = 6$; błąd w $x = 0,5$: 0,000195.

Przykład 5.1

Liczby

e

i

π

z szeregów

Oblicz e z szeregu $\sum \frac{1}{n!}$ z dokładnością 10^{-5} i oceń, jak szybko zbiega szereg Leibniza dla π .

- 1 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ Po 9 wyrazach (do $\frac{1}{8!}$): 2,718 279. Ogon szacujemy bez znajomości e : $\frac{1}{9!} (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots) = \frac{1}{9!} \cdot \frac{10}{9} \approx 3,1 \cdot 10^{-6}$. Wyrazy maleją szybciej niż geometrycznie, więc zbieżność jest błyskawiczna.
- 2 Leibniz: $\pi = 4 (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$. Błąd po N wyrazach jest mniejszy od $\frac{4}{2N+1}$. Po 1000 wyrazach: 3,140 59, błąd 0,001.
- 3 Szybciej: wzór Machina $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. Tu x jest małe, więc wyrazy maleją jak $(1/5)^{2n}$. Pięć wyrazów każdego szeregu daje 3,141 592 68, czyli 8 poprawnych cyfr.

Wynik: $e \approx 2,71828$ z 9 wyrazów; Leibniz potrzebuje tysiąca wyrazów na 3 cyfry, Machin pięciu na 8.

Sprawdzenie: $e = 2,718\ 281\ 8\dots$, $\pi = 3,141\ 592\ 65\dots$ ✓. Morał: o szybkości decyduje nie liczba wyrazów, ale to, jak szybko maleją, czyli jak daleko od brzegu przedziału zbieżności jesteśmy.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

10 zadań · ok. 60 min

- 1 Wyznacz promień zbieżności: $\sum \frac{x^n}{n}$; $\sum n! x^n$; $\sum \frac{x^n}{n!}$.
- 2 Oblicz $\sin 0,5$ z dwóch i trzech pierwszych wyrazów szeregu. Porównaj z kalkulatorem.
- 3 Napisz pierwsze cztery wyrazy szeregu e^{-x^2} (podstaw $-x^2$ w miejsce x w szeregu e^x).
- 4 W jakim przedziale zbieżny jest $\sum \frac{(x-2)^n}{3^n}$? Sprawdź też brzegi.

- 5 Różniczkując wyraz po wyrazie szereg e^x , sprawdź, że $(e^x)' = e^x$. Zrób to samo dla $\sin x$.
■ ■ ■
- 6 Oblicz $\sqrt{17} = 4 \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{1/2}$ z dwóch i trzech wyrazów szeregu dwumianowego.
■ ■ ■
- 7 Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, różniczkując szereg geometryczny $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$.
■ ■ ■
- 8 Feynman rozwija masę relatywistyczną $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ w szereg (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). Dla jakich prędkości ten szereg w ogóle jest zbieżny?
■ ■ ■
- 9 Pokaż, że funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ ma szereg o promieniu 1, choć jest określona i gładka dla każdego rzeczywistego x . Co dzieje się z sumami częściowymi dla $x = 2$?
■ ■ ■
- 10 Całkując wyraz po wyrazie, znajdź szereg dla $\int_0^x e^{-t^2} dt$ i oblicz tę całkę dla $x = 1$ z dokładnością do 0,001. (Funkcji pierwotnej e^{-t^2} nie da się wyrazić przez funkcje elementarne; to podstawa rozkładu normalnego, lekcja 5.1 Prawdopodobieństwo i rozkłady.)
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

× „Jeśli wyrazy dążą do zera, szereg jest zbieżny.”

To warunek konieczny, a nie wystarczający. Szereg harmoniczny ma $a_n \rightarrow 0$ i jest rozbieżny.

× „0,999... jest trochę mniejsze od 1.”

To suma szeregu geometrycznego równa dokładnie 1. Między tymi liczbami nie ma żadnej innej.

× „Nieskończona suma liczb dodatnich musi być nieskończona.”

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$. Liczy się, jak szybko wyrazy maleją.

× „Kolejność dodawania nie ma znaczenia.”

Dla szeregów warunkowo zbieżnych ma: przestawiając wyrazy, można dostać dowolną sumę (twierdzenie Riemanna).

× „Funkcja gładka wszędzie ma szereg Taylora zbieżny wszędzie.”

$\frac{1}{1+x^2}$ jest gładka na całej prostej, a jej szereg działa tylko dla $|x| < 1$ (symulacja 3).

× „Więcej wyrazów zawsze daje lepsze przybliżenie.”

Wewnątrz przedziału zbieżności błąd w końcu dąży do zera, ale nie musi maleć od pierwszego wyrazu: dla e^{-x} przy $x = 5$ sumy częściowe to 1, -4, 8, 5, ... Poza przedziałem dodatkowe wyrazy nie pomagają, a sumy częściowe się rozjeżdżają.

7 Sprawdź się

1 Ile wynosi $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$?

2.

2 Czy szereg harmoniczny jest zbieżny?

Nie, choć rośnie bardzo wolno (jak $\ln N$).

3 Dla jakich p jest zbieżny $\sum \frac{1}{n^p}$?

Dla $p > 1$.

4 Co mówi kryterium d'Alemberta, gdy $q = 1$?

Nic; trzeba użyć innego kryterium.

5 Jaki jest promień zbieżności szeregu e^x ?

Nieskończony.

6 Ile wynosi $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$?

$\ln 2 \approx 0,693$.

7 Jak daleko może wystawać stos klocków poza stół?

Dowolnie daleko, bo szereg harmoniczny jest rozbieżny; ale wysięg rośnie tylko jak $\frac{L}{2} \ln n$.

SZEREGI LICZBOWE

$$\sum a_n = \lim S_N, \quad S_N = a_1 + \dots + a_N$$

$$\text{geometryczny: } \sum_{n \geq 0} aq^n = \frac{a}{1-q} \text{ dla } |q| < 1$$

$$\text{warunek konieczny: } \text{zbieżny} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$\text{harmoniczny rozbieżny, } H_N \approx \ln N + 0,577$$

$$\sum \frac{1}{n^p}: \text{zbieżny} \Leftrightarrow p > 1; \quad \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{porównanie; całkowe; d'Alembert: } q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ zbieżny, } > 1 \text{ rozbieżny}$$

$$\text{Leibniz: } b_n \searrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n \text{ zbieżny, błąd } < b_{N+1}$$

SZEREGI POTĘGOWE

promień R : zbieżny dla $|x| < R$; brzegi osobno

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}; \quad \sin x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n; \quad \ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n};$$

$$\arctan x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R=1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots \quad (R=1; \text{ dla } \alpha \in \mathbb{N} \text{ to wielomian})$$

dla $|x| < R$: różniczkowanie i całkowanie wyraz po wyrazie

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 8-2 (Zenon: nieskończenie wiele kroków w skończonym czasie).
- **Dla chętnych:** koniec 15-8 i początek 15-9 (rozwiązanie masy relatywistycznej i $\frac{1}{2}mv^2$).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: rozdziały o szeregach, kryteriach zbieżności i szeregach potęgowych.
- Dowolny podręcznik analizy dla pierwszego roku: dowody kryteriów i twierdzenie Riemanna o przestawianiu wyrazów.

Szereg e^x z $x = i\theta$ da wzór Eulera $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (1.7 Liczby zespolone i fazory). Szeregi funkcji zamiast potęg, czyli sumy sinusów i cosinusów, to szeregi Fouriera (4.2 Szeregi Fouriera). A szereg z silnią w mianowniku wróci przy rozkładzie Poissona (5.1 Prawdopodobieństwo i rozkłady).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\frac{3}{2}; \frac{4}{1+1/2} = \frac{8}{3}; \frac{2/5}{1-2/5} = \frac{2}{3}$ (pierwszy wyraz to $\frac{2}{5}$).
2. $\frac{1}{3}; \frac{12}{99} = \frac{4}{33}; 2,1 + \frac{0,05}{1-0,1} = 2,1 + \frac{1}{18} = \frac{97}{45}$.
3. Iloraz $q = 2x$, więc $|x| < \frac{1}{2}$; suma $\frac{1}{1-2x}$.
4. $\frac{100}{1-0,25} \approx 133$ mg. Poziom ustala się szybko: po trzech dawkach 131 mg.
5. Sumy częściowe to $1, 0, 1, 0, \dots$, a ten ciąg nie ma granicy. Grupowanie wybiera tylko podciąg sum częściowych, więc może dać dowolną z dwóch wartości. Dla szeregów rozbieżnych zwykle reguły arytmetyki nie działają.

Zadania • część 2

1. Pierwszy ($a_n \rightarrow 1$) i trzeci ($a_n \rightarrow 1$). Dla drugiego $a_n \rightarrow 0$, co nic nie przesądza (jest zbieżny, część 3).
2. $10 \cdot 1,5 = 15$ cm; $10 \cdot 1,833 \approx 18,3$ cm.
3. $k = 1$: środek górnego klocka musi być nad krawędzią drugiego, więc górny wystaje o $\frac{L}{2}$. $k = 2$: wspólny środek masy dwóch górnych ma być nad krawędzią trzeciego. Jeśli drugi wystaje o d , jego środek jest w $d - \frac{L}{2}$, a środek pierwszego w d . Średnia $d - \frac{L}{4} = 0$ daje $d = \frac{L}{4} \checkmark$.
4. Po 2^m wyrazach mamy $1, \frac{1}{2}$ i $m - 1$ grup, każda większa niż $\frac{1}{2}$: razem więcej niż $1 + \frac{m}{2}$. Dla $m = 10$: $H_{1024} > 6$. (Naprawdę wystarczy 227 wyrazów; oszacowanie jest zgrubne, ale wystarcza do dowodu rozbieżności.)

Zadania • część 3

1. Zbieżny ($p = 3$); rozbieżny ($p = 0,9$); zbieżny (d'Alembert: $\frac{3}{n+1} \rightarrow 0$).
2. $\frac{n+1}{10} \rightarrow \infty$: rozbieżny. Silnia w końcu pokonuje każdą funkcję wykładniczą. Zresztą $a_n \rightarrow \infty$, więc wystarczy warunek konieczny.
3. $\frac{2n+1}{n^3+5} \leq \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$ dla $n \geq 1$, a $\sum \frac{3}{n^2}$ jest zbieżny. Zbieżny.
4. $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$. Zostają $1 + \frac{1}{2}$, więc suma $\frac{3}{2}$.
5. $\int_2^X \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln X - \ln \ln 2 \rightarrow \infty$ (podstawienie $u = \ln x$, lekcja 1.5 Całki). Rozbieżny, ale niewyobrażalnie wolno: żeby suma przekroczyła 10, liczba wyrazów musiałaby mieć tysiące cyfr.

Zadania • część 4

1. $\frac{1}{N+1} < 0,01$, czyli $N = 100$. Zbieżność jest wolna. Naprawdę wystarczy 50 wyrazów (błąd 0,0099), bo oszacowanie jest z zapasem. Z 10 wyrazów wychodzi 0,6456, błąd 0,048.
2. Pierwszy bezwzględnie ($\sum \frac{1}{n^2}$ zbieżny). Drugi warunkowo: Leibniz działa, ale $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny.
3. $\frac{1}{(N+1)^3} < 0,001$ dla $N + 1 = 11$, więc wystarczy 10 wyrazów: $\approx 0,9011$ (dokładnie 0,901 54).

Zadania · część 5

1. $R = 1$; $R = 0$ (zbieżny tylko dla $x = 0$); $R = \infty$.
2. $0,5 - 0,020\,83 = 0,479\,17$; $+ 0,000\,26 = 0,479\,43$. Kalkulator: $0,479\,426$.
3. $1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}$.
4. To szereg geometryczny z $q = \frac{x-2}{3}$: $|x-2| < 3$, czyli $x \in (-1; 5)$. Na brzegach $q = \pm 1$, rozbieżny.
5. $(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots)' = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \checkmark$. $(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots)' = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots = \cos x \checkmark$.
6. $4 \cdot 1,031\,25 = 4,125$; $4(1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{2048}) = 4,123\,05$. Dokładnie $4,123\,11$.
7. $\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$; dla $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1/2}{1/4} = 2$.
8. To szereg dwumienny $(1+x)^{-1/2}$ z $x = -v^2/c^2$, o promieniu 1. Zbieżny dla $v^2 < c^2$, czyli dla każdej prędkości mniejszej od prędkości światła. Szybko zbieżny tylko dla $v \ll c$. FLP I-15-8
9. Szereg geometryczny z $q = -x^2$: zbieżny dla $x^2 < 1$. Dla $x = 2$ wyrazy $(-4)^n$ rosną, a sumy częściowe skaczą coraz mocniej: $1, -3, 13, -51, \dots$, choć funkcja ma tam wartość $0,2$.
10. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots$. Dla $x = 1$: $1 - 0,3333 + 0,1 - 0,0238 + 0,0046 - 0,0008 \approx 0,747$ (dokładnie $0,746\,82$). Szereg naprzemienny, błąd mniejszy od pierwszego pominiętego wyrazu.

Matematyka · Szeregi liczbowe i potęgowe. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 8-2 i 15-8; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.