

Całki

Pochodna odpowiada na pytanie „jak szybko?”, a całka na pytanie odwrotne: „ile razem?”. Znamy prędkość w każdej chwili, ile wynosi droga? Znamy siłę w każdym punkcie, ile wynosi praca? Feynman pokazuje, że odpowiedź to suma bardzo wielu bardzo małych kawałków. Najważniejsze twierdzenie całego rachunku mówi, że taką sumę liczy się, odwracając różniczkowanie.

CZAS

ok. 4 h teorii + 5 h zadań

ZADANIA

37 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

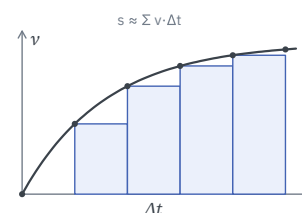
Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, rozdz. 8-4, 13-1, 19-1...19-3; M. Gewert, Z. Skoczyła, *Analiza matematyczna 1*, rozdz. 7-9

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: problem odwrotny
- 1 Całka jako suma
- 2 Twierdzenie główne
- 3 Własności i wartość średnia
- 4 Podstawienie i części
- 5 Całka w kinematyce
- 6 Wytnij, zapisz, zsumuj
- 7 Całki niewłaściwe
- 8 Błędne intuicje
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: problem odwrotny

W lekcji 1.3 Pochodne znaleźliśmy położenie w każdej chwili i pytaliśmy o prędkość. Feynman od razu odwraca pytanie. Zamiast tabeli położenia mamy tabelę prędkości, na przykład odczyty prędkościomierza co pół minuty. Ile kilometrów przejechał samochód? FLP I-8-4



Pomysł jest prosty. W pierwszej sekundzie prędkość była mniej więcej taka i taka, więc samochód przejechał mniej więcej $v \Delta t$. W drugiej sekundzie prędkość była trochę inna, więc znowu $v \Delta t$. Sumujemy te kawałki. Wynik nie jest dokładny, bo prędkość zmieniała się w trakcie każdej sekundy. Bierzymy więc coraz krótsze przedziały, czyli sumujemy coraz więcej coraz mniejszych kawałków. Wartość, do której ta suma dąży, to **całka**.

Feynman zwraca uwagę na samą nazwę. Znak $\int$ to wydłużona litera S od łacińskiego *summa*, a dt przypomina, że kawałki czasu są tak małe, jak to tylko możliwe.

Jeden operator (d) odwraca drugi ($\int$).

R. Feynman, FLP I-8-4 (tłum. własne)

To zdanie zapowiada najważniejszy wynik tej lekcji. Całkowanie, czyli sumowanie kawałków, i różniczkowanie, czyli liczenie tempa zmian, są operacjami odwrotnymi. Dzięki temu tabelę całek dostajemy za darmo, czytając tabelę pochodnych od tyłu.

Całka jako suma

1.1 Suma całkowa

Niech f będzie ograniczona na $[a, b]$. Dzielimy przedział na n kawałków o długościach Δx_k . W każdym kawałku wybieramy dowolny punkt x_k^* (np. lewy koniec, prawy koniec albo środek) i tworzymy **sumę całkową**: GS 8.1.3

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Gdy $f \geq 0$, każdy wyraz to pole cienkiego prostokąta o podstawie Δx_k i wysokości $f(x_k^*)$. Suma przybliża pole pod wykresem.

DEFINICJA · CAŁKA OZNACZONA (RIEMANNA)

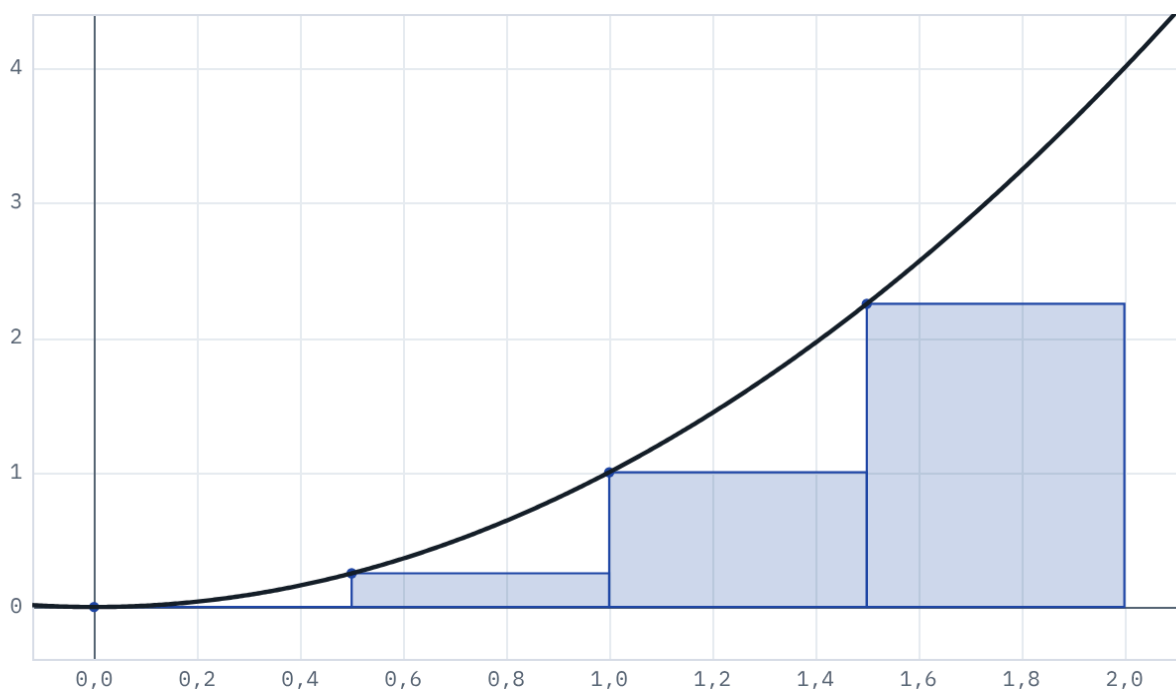
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k,$$

gdzie długość najdłuższego kawałka dąży do zera, o ile granica istnieje, jest skończona i nie zależy od sposobu podziału ani od wyboru punktów x_k^* . Taką funkcję nazywamy **całkowalną**. Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest całkowalna, a także każda ograniczona funkcja o skończonej liczbie skoków.

GS 8.1.5, 8.4.1

Całka oznaczona jest **liczbą**. Zmienna x pod znakiem całki jest „niema”: $\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 t^2 dt$. Symbol dx mówi, po czym sumujemy, i niesie jednostkę. Całka z prędkości [m/s] po czasie [s] ma jednostkę metra.

SYMULACJA 1 Sumy całkowite. Wybierz funkcję i sposób wyboru wysokości prostokątów, potem zwiększaj ich liczbę n . Obserwuj błąd: przy podwojeniu n dla lewych końców błąd maleje mniej więcej dwa razy, a dla środków i trapezów mniej więcej cztery razy.



— $f(x)$ — kawałki dodatnie — kawałki ujemne

suma S_n 1,75000

całka dokładnie 2,66667

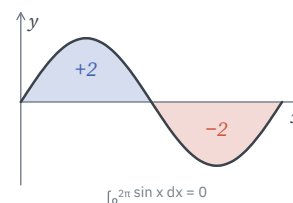
błąd -0,91667

błąd(n) / błąd(2n) 1,91

Stan na rysunku: x^2 na $[0; 2]$, $n = 4$, wysokość: lewy koniec; $S_n = 1,75000$, całka = 2,66667.

1.2 Pole ze znakiem

Gdy funkcja jest ujemna, wyraz $f(x_k^*) \Delta x_k$ jest ujemny. Całka liczy więc pole ze **znakiem**: części nad osią z plusem, części pod osią z minusem. Na przykład $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$, bo dodatnia i ujemna połowa się znoszą. Pole „geometryczne”, które zawsze jest dodatnie, to $\int_a^b |f(x)| \, dx$. GS 8.2



W fizyce znak niesie informację. Całka z prędkości to przemieszczenie, które może być ujemne. Całka z wartości bezwzględnej prędkości to droga, która ujemna nie jest (część 5).

1.3 Gdy wzoru nie ma: liczymy

Feynman zauważa ważną asymetrię. Każdą funkcję zbudowaną ze znanych funkcji da się zróżniczkować (tam, gdzie pochodna istnieje) i wynik też jest zbudowany ze znanych funkcji. Z całkami tak nie jest. Funkcje pierwotne funkcji e^{-x^2} , $\frac{\sin x}{x}$ czy $\sqrt{1+x^3}$ istnieją, ale nie da się ich zapisać za pomocą funkcji elementarnych. Całkę oznaczoną zawsze można jednak policzyć numerycznie, z definicji, czyli z sumy. FLP I-8-4 · GS 7.1

W praktyce zamiast prostokątów „z lewego końca” używamy lepszych przepisów:

- **Metoda środków:** wysokość prostokąta to wartość w środku kawałka.
- **Metoda trapezów:** wykres zastępujemy łamaną, a prostokąty trapezami. GS 8.8

Dla funkcji gładkich błąd obu metod maleje jak $1/n^2$, a dla lewych lub prawych końców tylko jak $1/n$. To ten sam efekt co przy ilorazie symetrycznym w lekcji 1.3 Pochodne: symetria kasuje błąd pierwszego rzędu.

Przykład 1.1

Droga spadającej kulki z tabeli prędkości

Prędkość spadającej kulki to $v(t) = 9,8t$ m/s (tabela 8-4 u Feynmana, tylko w metrach). Oszacuj drogę w pierwszych 3 s sumą prędkości z lewych końców i z prawych końców, najpierw dla $\Delta t = 1$ s, potem dla $\Delta t = 0,5$ s. Porównaj z wartością dokładną $\frac{1}{2}gt^2$.

- 1 $\Delta t = 1$ s, lewe końce: $9,8(0 + 1 + 2) \cdot 1 = 29,4$ m. Prawe końce: $9,8(1 + 2 + 3) = 58,8$ m.
- 2 $\Delta t = 0,5$ s, lewe końce: $9,8 \cdot 0,5 \cdot (0 + 0,5 + 1 + \dots + 2,5) = 4,9 \cdot 7,5 = 36,75$ m. Prawe końce: $4,9 \cdot 10,5 = 51,45$ m.
- 3 Dokładnie: $\frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 3^2 = 44,1$ m. Lewa suma zaniża, bo kulka przyspiesza, a prawa zawyża.

Wynik: sumy osaczają wartość dokładną 44,1 m: $29,4 < 36,75 < 44,1 < 51,45 < 58,8$.

Sprawdzenie: średnia lewej i prawej sumy to metoda trapezów: $\frac{1}{2}(36,75 + 51,45) = 44,1$ m. Dla funkcji liniowej trapezy są dokładne, bo łamana pokrywa się z wykresem ✓

Przykład 1.2

Archimedes i parabola: całka z definicji

Oblicz $\int_0^1 x^2 dx$ jako granicę sum z prawych końców przy podziale na n równych części. Skorzystaj ze wzoru $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

- 1 $\Delta x = \frac{1}{n}$, prawe końce $x_k = \frac{k}{n}$: $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- 2 $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. Dla $n = 10$: $S_{10} = 0,385$.
- 3 $S_n = \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ przy $n \rightarrow \infty$.

Wynik: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Sprawdzenie: pole pod parabolą to jedna trzecia kwadratu jednostkowego. Archimedes znalazł ten wynik ok. 250 r. p.n.e., prawie dwa tysiące lat przed Newtonem ✓. W części 2 dostaniemy go w jednej linijce.

Przykład 1.3

Całka bez wzoru: krzywa dzwonowa

Funkcja e^{-x^2} (kształt rozkładu normalnego) nie ma elementarnej funkcji pierwotnej. Oszacuj $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ metodą trapezów i metodą środków dla $n = 4$.

- 1 $h = 0,25$. Wartości: $f(0) = 1$, $f(0,25) = 0,9394$, $f(0,5) = 0,7788$, $f(0,75) = 0,5698$, $f(1) = 0,3679$.
- 2 Trapezy: $h \left(\frac{1}{2}f(0) + f(0,25) + f(0,5) + f(0,75) + \frac{1}{2}f(1) \right) \approx 0,7430$.
- 3 Środki: $h (f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875)) \approx 0,7487$.

Wynik: trapezy 0,7430, środki 0,7487; dokładna wartość to 0,74682.

Sprawdzenie: błędy wynoszą $-0,0038$ i $+0,0019$: mają przeciwne znaki, a błąd środków jest mniej więcej o połowę mniejszy. Dla funkcji gładkich i dostatecznie dużych n tak jest zawsze (stosunek błędów dąży do $-\frac{1}{2}$). Na tym spostrzeżeniu opiera się metoda Simpsona: $S = \frac{1}{3}(2M + T) \approx 0,746826 \checkmark$

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oszacuj $\int_0^2 x dx$ sumą z lewych końców i sumą z prawych końców dla $n = 4$. Porównaj z polem trójkąta. ■ ■ ■
- 2 Ile wynosi $\int_0^{2\pi} \sin x dx$, a ile $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$? Wyjaśnij różnicę rysunkiem. ■ ■ ■
- 3 Prędkościomierz samochodu odczytywano co 10 s: 0, 8, 14, 18, 20, 20 m/s w chwilach 0, 10, ..., 50 s. Oszacuj przejechaną drogę metodą trapezów. Między jakimi wartościami musi leżeć prawdziwa droga, jeśli prędkość nigdy nie malała? ■ ■ ■
- 4 Oblicz $\int_0^1 x^3 dx$ jako granicę sum z prawych końców. Skorzystaj ze wzoru $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$. ■ ■ ■
- 5 Dla $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ oblicz błędy sumy z lewych końców, metody trapezów i metody środków dla $n = 10$ i $n = 20$. Jak każdy błąd zmienia się po podwojeniu n ? Sprawdź wynik w symulacji 1. ■ ■ ■

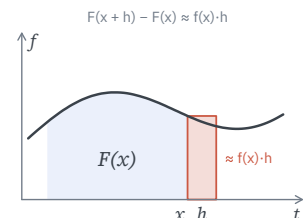
■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

2 Twierdzenie główne

2.1 Całka z ruchomą granicą

Ustalmy dolną granicę a , a górną zrobmy zmienną. Dostajemy funkcję, która mówi, ile „uzbierało się” od a do x : GS 8.7

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$



Jak szybko rośnie F ? Gdy przesuniemy górną granicę z x do $x+h$, do pola dochodzi wąski pasek o szerokości h i wysokości prawie równej $f(x)$:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \approx f(x) h \implies \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow f(x).$$

TWIERDZENIE GŁÓWNE RACHUNKU CAŁKOWEGO

(I) Jeśli f jest ciągła na przedziale, to $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest różniczkowalna i $F'(x) = f(x)$.

(II, wzór Newtona–Leibniza) Jeśli f jest ciągła na $[a, b]$, a G jest dowolną funkcją, dla której $G' = f$, to

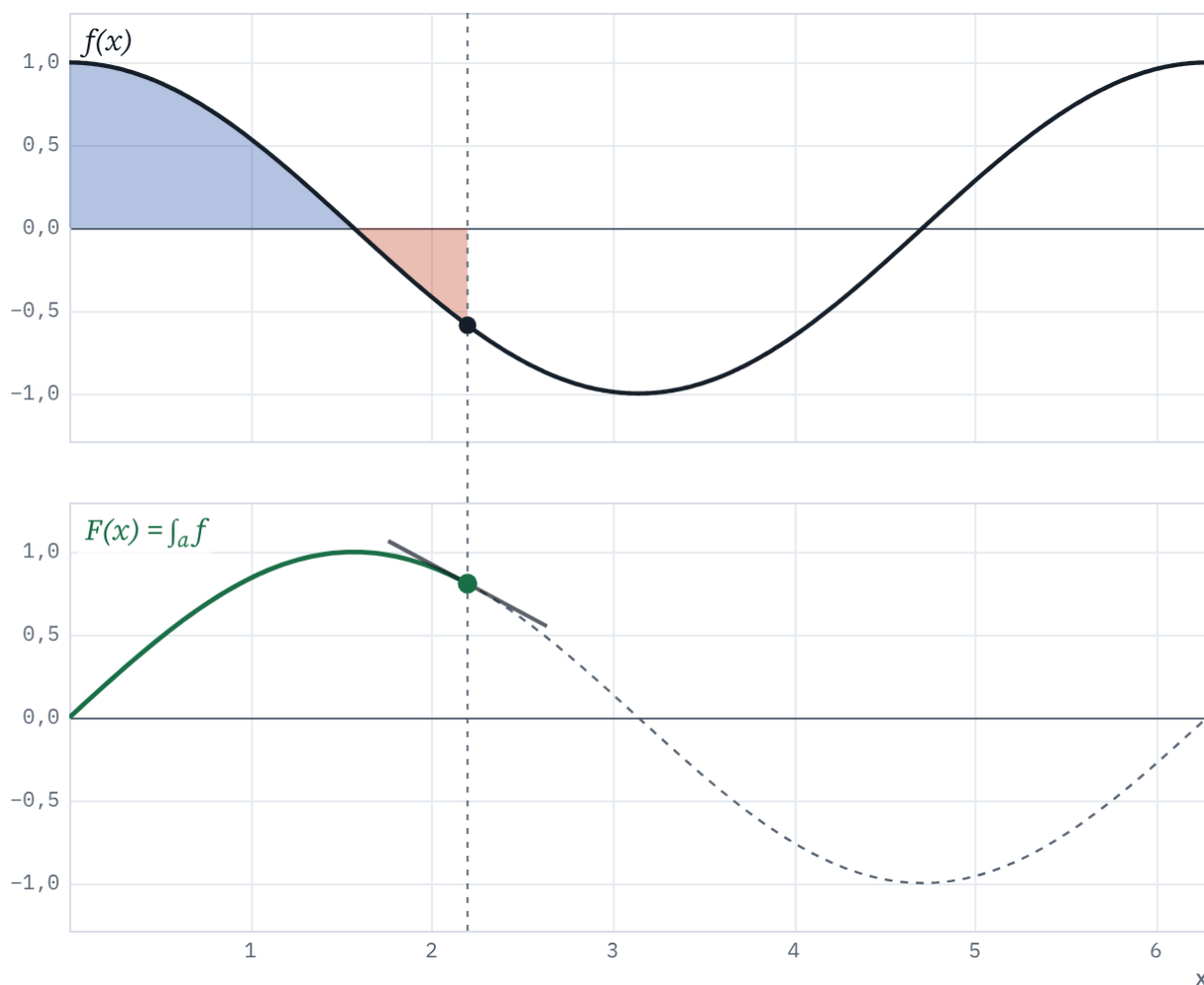
$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = \left[G(x) \right]_a^b.$$

Część (I) Gewert i Skoczylas nazywają drugim, a (II) pierwszym twierdzeniem głównym; numeracja bywa różna. GS podają (II) w ogólniejszej wersji: wystarczy, że f jest całkowna i ciągła w danym punkcie. GS 8.4.4, 8.7.4

Druga część wynika z pierwszej. Dwie funkcje o tej samej pochodnej różnią się o stałą, więc $G(x) = F(x) + C$. Stąd $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f - 0$. Słowami: **żeby zsumować kawałki, wystarczy znaleźć funkcję, której pochodną jest to, co sumujemy**. Rachunek z przykładu 1.2 skraca się do $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

SYMULACJA 2

Pole, które rośnie. Przesuwaj górną granicę x . U góry zaciemnia się pole pod f (ze znakiem), a na dolnym wykresie powstaje $F(x) = \int_a^x f$. Sprawdź, że nachylenie F w każdym punkcie jest równe wysokości f : tam, gdzie $f = 0$, wykres F ma poziomą styczną.



— f — pole dodatnie — pole ujemne — $F(x) = \int f$

x 2,20

$f(x)$ -0,588

$F(x)$ = pole od a do x 0,809

nachylenie F w x -0,588

Stan na rysunku: $f = \cos x$, $x = 2,20$, $F(x) = 0,809$, $f(x) = -0,588$. Krótki czarny odcinek to styczna do F ; jej nachylenie jest równe $f(x)$.

2.2 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Funkcję F , dla której $F' = f$ na przedziale, nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f . Jeśli F jest pierwotna, to każda inna ma postać $F + C$, i tylko takie. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych to **całka nieoznaczona**: [GS 7.1.1, 7.1.5, 7.2.1](#)

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Całka oznaczona to liczba, całka nieoznaczona to rodzina funkcji. Stała C to informacja, którą różniczkowanie „zgubiło”. W fizyce odzyskujemy ją z **warunku początkowego**, na przykład znanego położenia w chwili $t = 0$.

Tabelę całek czytamy z tabeli pochodnych od tyłu. Wynik zawsze można sprawdzić, różniczkując go.

$f(x)$	$\int f(x) dx$ (do każdej dodaj C)	Uwagi
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	na przedziale bez zera
e^{kx}	$\frac{1}{k} e^{kx}$	$k \neq 0$
$\sin kx, \cos kx$	$-\frac{1}{k} \cos kx, \frac{1}{k} \sin kx$	radiany
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x, \arcsin x$	drugi wzór dla $ x < 1$

Wzór na $\int \frac{dx}{x}$ ma moduł, bo dla $x < 0$ mamy $(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Wzór na x^r przy $r = -1$ dawałby dzielenie przez zero, i właśnie w tę lukę wchodzi logarytm. GS 7.2

PUŁAPKA

Całka iloczynu nie jest iloczynem całek: $\int x \cdot x dx = \frac{1}{3}x^3$, a $\int x dx \cdot \int x dx = \frac{1}{4}x^4$. Do iloczynów służy całkowanie przez części (część 4). GS 7.3.1

Przykład 2.1

Od przyspieszenia do położenia

Samochód rusza z miejsca z przyspieszeniem, które maleje w miarę rozpędzania: $a(t) = 3e^{-t/5}$ (SI). Wyznacz $v(t)$ i $x(t)$, jeśli $v(0) = 0$ i $x(0) = 0$. Ile wynoszą prędkość i przejechana droga po 10 s? Do jakiej prędkości dąży samochód?

- 1 $v(t) = \int 3e^{-t/5} dt = -15e^{-t/5} + C_1$. Z $v(0) = 0$: $C_1 = 15$, więc $v(t) = 15(1 - e^{-t/5})$.
- 2 $x(t) = \int 15(1 - e^{-t/5}) dt = 15t + 75e^{-t/5} + C_2$. Z $x(0) = 0$: $C_2 = -75$, więc $x(t) = 15t - 75(1 - e^{-t/5})$.
- 3 Po 10 s: $v = 15(1 - e^{-2}) \approx 13,0$ m/s, $x = 150 - 75(1 - e^{-2}) \approx 85,2$ m.
- 4 Dla $t \rightarrow \infty$: $v \rightarrow 15$ m/s.

Wynik: $v(t) = 15(1 - e^{-t/5})$, $x(t) = 15t - 75(1 - e^{-t/5})$; po 10 s ok. 13 m/s i 85 m; prędkość graniczna 15 m/s.

Sprawdzenie: $\dot{x} = 15 - 15e^{-t/5} = v \checkmark$, $\dot{v} = 3e^{-t/5} = a \checkmark$. Droga 85 m jest mniejsza niż $15 \cdot 10 = 150$ m, bo samochód dopiero się rozpędzał $\checkmark$

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Oblicz: (a) $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$, (b) $\int \left(\frac{1}{x} + e^{2x} \right) dx$, (c) $\int \cos 3x dx$. Sprawdź każdy wynik różniczkowaniem.
- 2 Oblicz: (a) $\int_1^e \frac{dx}{x}$, (b) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$, (c) $\int_0^1 e^x dx$.
- 3 Niech $F(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$. Nie licząc całki, wyznacz $F'(x)$ i odpowiedz, czy F jest rosnąca dla $x > 0$.
- 4 Oblicz pochodną funkcji $G(x) = \int_0^{x^2} \sin t dt$ na dwa sposoby: z twierdzenia głównego i reguły łańcuchowej oraz po obliczeniu całki.
- 5 Piłkę rzucono pionowo w górę z wysokości 5 m z prędkością 20 m/s ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Całkując $a = -g$ dwukrotnie, wyznacz $v(t)$ i $h(t)$. Na jaką wysokość się wzniesie i kiedy spadnie na ziemię?

6

Student liczy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$. Dlaczego wynik musi być błędny bez żadnego liczenia? Które założenie wzoru Newtona-Leibniza nie jest spełnione?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 7.2.4, 8.4.5, 8.7.6.

3 Własności i wartość średnia

3.1 Rachunek na całkach

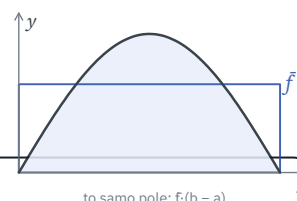
Poniższe reguły wynikają z tego, że całka jest granicą sumy (zamiana granic to umowa zgodna z tą intuicją): GS 8.4.7, 8.6

- **Liniiowość:** $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- **Addytywność względem przedziału:** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Dzięki temu możemy dzielić przedział tam, gdzie zmienia się wzór albo znak funkcji.
- **Zamiana granic:** $\int_b^a f = -\int_a^b f$ i $\int_a^a f = 0$. Sumowanie „pod prąd” daje ujemne Δx .
- **Nierówności:** jeśli $f \leq g$ na $[a, b]$, to $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. W szczególności, gdy $m \leq f \leq M$, to $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$. To pozwala szybko oszacować całkę, zanim ją policzymy.

3.2 Wartość średnia funkcji

Średnia arytmetyczna n liczb to ich suma podzielona przez n .

Średnia funkcji na przedziale to „suma” wartości, czyli całka, podzielona przez długość przedziału: GS 8.6.10, 8.6.13



DEFINICJA I TWIERDZENIE · WARTOŚĆ ŚREDNIA

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Geometrycznie $\bar{f}$ to wysokość prostokąta o podstawie $b-a$ i tym samym polu co obszar pod wykresem. Jeśli f jest ciągła, to przyjmuje wartość średnią w co najmniej jednym punkcie $c \in (a, b)$: $\int_a^b f = (b-a) f(c)$.

Najważniejszy przykład w fizyce to prędkość średnia. Przemieszczenie to $\int v dt$, więc $\bar{v} =$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Definicja średniej z całki zgadza się z tą, którą znasz ze szkoły. Średnia w czasie nie jest jednak średnią z wartości na końcach przedziału. Dla funkcji liniowej te dwie średnie są zawsze równe, dla innych funkcji na ogół się różnią.

3.3 Symetria oszczędza rachunki

Dla funkcji **nieparzystej** ($f(-x) = -f(x)$) całka po przedziale symetrycznym $[-a, a]$ jest zerem, bo pola po obu stronach zera się znoszą. Dla funkcji **parzystej** ($f(-x) = f(x)$) jest równa podwojonej całce po $[0, a]$. Dla funkcji **okresowej** o okresie T całka po dowolnym przedziale długości T jest taka sama. GS 8.6.14

Przykład 3.1

Średnia temperatura w godzinach pracy

Temperatura w ciągu doby zmienia się w przybliżeniu jak $T(t) = 12 + 6 \sin \frac{\pi(t-9)}{12}$ °C, gdzie t to godzina (od 0 do 24). Oblicz średnią temperaturę z całej doby i z godzin pracy od 9 do 17.

- 1 Sinus ma okres 24 h, więc jego całka po całej dobie jest zerem. Średnia dobową to 12 °C.
- 2 Godziny pracy: $\bar{T} = 12 + \frac{6}{8} \int_9^{17} \sin \frac{\pi(t-9)}{12} dt$. Funkcja pierwotna sinusa:
 $-\frac{12}{\pi} \cos \frac{\pi(t-9)}{12}$.
- 3 $\int_9^{17} \dots = \frac{12}{\pi} \left(\cos 0 - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{\pi}$.
- 4 $\bar{T} = 12 + \frac{6}{8} \cdot \frac{18}{\pi} = 12 + \frac{27}{2\pi} \approx 16,3$ °C.

Wynik: średnia dobową 12 °C, średnia w godzinach pracy ok. 16,3 °C.

Sprawdzenie: wynik mieści się między najniższą temperaturą w tym przedziale (12 °C o godz. 9) a najwyższą (18 °C o godz. 15) ✓

Przykład 3.2

Całka, której nie trzeba liczyć

Oblicz $\int_{-2}^2 (x^3 + x \cos x + 4) dx$.

- 1 x^3 jest nieparzysta. $x \cos x$ też, bo $(-x) \cos(-x) = -x \cos x$. Ich całki po $[-2, 2]$ są zerami.
- 2 Zostaje $\int_{-2}^2 4 dx = 4 \cdot 4 = 16$.

Wynik: 16.

Sprawdzenie: funkcja pierwotna $x \cos x$ wymaga całkowania przez części (część 4) i daje $x \sin x + \cos x$. Wyrażenie $[x \sin x + \cos x]_{-2}^2$ jest równe zeru, bo funkcja pierwotna jest parzysta ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Oblicz wartość średnią $\sin x$ na przedziale $[0, \pi]$. Czy jest większa, czy mniejsza od $\frac{1}{2}$?

- 2 Oblicz wartość średnią x^2 na $[0, 3]$ i znajdź punkt c , w którym funkcja ją przyjmuje.

- 3 Bez liczenia funkcji pierwotnej oszacuj z dołu i z góry $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Potem oblicz ją dokładnie.

- 4 Punkt rusza z prędkością $v_0 = 5$ m/s i przyspiesza jednostajnie z $a = 2$ m/s². Oblicz jego średnią szybkość w pierwszych 5 s jako średnią całkową. Porównaj z $\frac{1}{2}(v_0 + v_5)$. (GS ćw. 8.6.12)

- 5 Oblicz $\int_0^{10\pi} |\sin x| dx$, korzystając z okresowości. Jaka jest średnia wartość $|\sin x|$ w długim czasie? Gdzie w elektrotechnice pojawia się ta liczba?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 8.6.11, 8.6.15.

Różniczkować umiemy wszystko, a całkować tylko to, co rozpoznamy jako pochodną. Dwie najważniejsze techniki to dwie reguły różniczkowania czytane od tyłu.

4.1 Podstawienie: reguła łańcuchowa od tyłu

Z reguły łańcuchowej $[F(g(x))]' = f(g(x))g'(x)$, gdzie $F' = f$. Czytając ją od tyłu:

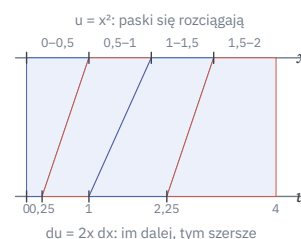
GS 7.3.11, 8.5.3

🔑 TWIERDZENIE · CAŁKOWANIE PRZESZ PODSTAWIENIE

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \Big|_{u=g(x)}, \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

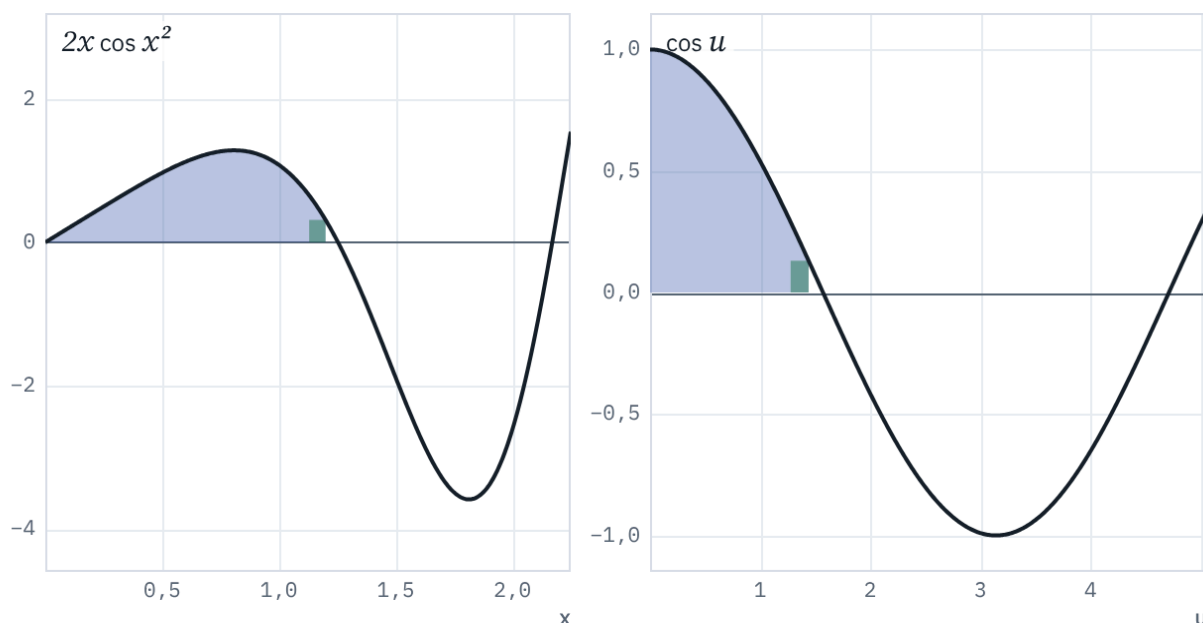
Zapis Leibniza robi to automatycznie: $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$. W całce oznaczonej zmieniamy granice razem ze zmienną i nie musimy wracać do x .

Czego szukać pod całką? Pary: jakiejś funkcji wewnętrznej $g(x)$ i jej pochodnej $g'(x)$ jako czynnika. W $\int x e^{-x^2/2} dx$ funkcją wewnętrzną jest $-x^2/2$, a jej pochodna $-x$ stoi obok (z dokładnością do znaku). Najczęstszy przypadek to funkcja liniowa w środku: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.



SYMULACJA 3

Podstawienie zachowuje pole. Lewy wykres to $2x \cos(x^2)$ na osi x , prawy to $\cos u$ na osi $u = x^2$. Przesuwaj górną granicę b : pola po lewej (do b) i po prawej (do b^2) są zawsze równe. Paski o szerokości dx przechodzą w paski o szerokości $du = 2x dx$.



— $2x \cdot \cos(x^2)$ na osi x — $\cos u$ na osi $u = x^2$ — pole dodatnie — pole ujemne
— jeden pasek $dx \leftrightarrow du$

$$\int_0^b 2x \cos(x^2) dx = 0,9915$$

$$\int_0^{b^2} \cos u du = 0,9915$$

$$\sin(b^2) = 0,9915$$

szerokość paska: $dx \rightarrow du = 0,070 \rightarrow 0,163$

Stan na rysunku: $b = 1,20$, $b^2 = 1,44$; oba pola wynoszą $\sin(b^2) = 0,9915$.

4.2 Przez części: reguła iloczynu od tyłu

Całkujemy regułą iloczynu $(uv)' = u'v + uv'$ i przenosimy jeden wyraz na drugą stronę:

GS 7.3.4, 8.5.1

🔑 TWIERDZENIE · CAŁKOWANIE PRZECZĘŚCI

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx, \quad \int_a^b u v' dx = [u v]_a^b - \int_a^b u' v dx.$$

Za u bierzemy czynnik, który po zróżniczkowaniu się upraszcza (wielomian, $\ln x$). Za v' bierzemy czynnik, który łatwo scałkować (e^x , $\sin x$, $\cos x$).

Wzór nie oblicza całki do końca, tylko zamienia ją na inną. Opłaca się, gdy nowa całka $\int u'v$ jest prostsza od starej. Przy $x^n e^x$ każde całkowanie przez części obniża potęgę o 1, więc po n krokach

zostaje całka elementarna.

Przykład 4.1

Podstawienie w całce oznaczonej

Oblicz $\int_0^2 x e^{-x^2/2} dx$.

- 1 Podstawienie $u = \frac{x^2}{2}$, $du = x dx$. Czynniki $x dx$ stoi pod całką.
- 2 Granice: $x = 0 \mapsto u = 0$, $x = 2 \mapsto u = 2$.
- 3 $\int_0^2 e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^2 = 1 - e^{-2} \approx 0,865$.

Wynik: $1 - e^{-2} \approx 0,865$.

Sprawdzenie: $\left(-e^{-x^2/2} \right)' = x e^{-x^2/2} \checkmark$. Funkcja $x e^{-x^2/2}$ to gęstość rozkładu Rayleigha (z $\sigma = 1$). Gdy górna granica rośnie do nieskończoności, całka dąży do 1: to normalizacja tego rozkładu. Całki do nieskończoności omawiamy w części 7.

Przykład 4.2

Przez części w całce oznaczonej

Oblicz $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

- 1 $u = x$, $u' = 1$; $v' = \cos x$, $v = \sin x$.
- 2 $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

Wynik: $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$.

Sprawdzenie: funkcja pierwotna $x \sin x + \cos x$ ma pochodną $\sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x \checkmark$. Szacunek: $0 \leq x \cos x \leq 0,57$ na tym przedziale, a przedział ma długość 1,57, więc całka jest mniejsza od 0,9 $\checkmark$

1 Oblicz: (a) $\int \sin \omega t \, dt$, (b) $\int (3x - 1)^4 \, dx$, (c) $\int e^{-kt} \, dt$ ($k \neq 0$).

2 Oblicz: (a) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx$, (b) $\int \cos x e^{\sin x} \, dx$.

3 Oblicz $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} \, dx$, zmieniając granice całkowania.

4 Oblicz $\int x \ln x \, dx$. Którą funkcję wybierasz za u i dlaczego?

5 Oblicz $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$. Całkowania przez części trzeba użyć dwa razy.

6 Oblicz $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$ podstawieniem $x = \sin t$. Jaką figurę opisuje ta całka i czy wynik się zgadza?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 7.3.5, 7.3.13, 8.5.2, 8.5.4.

5 Całka w kinematyce

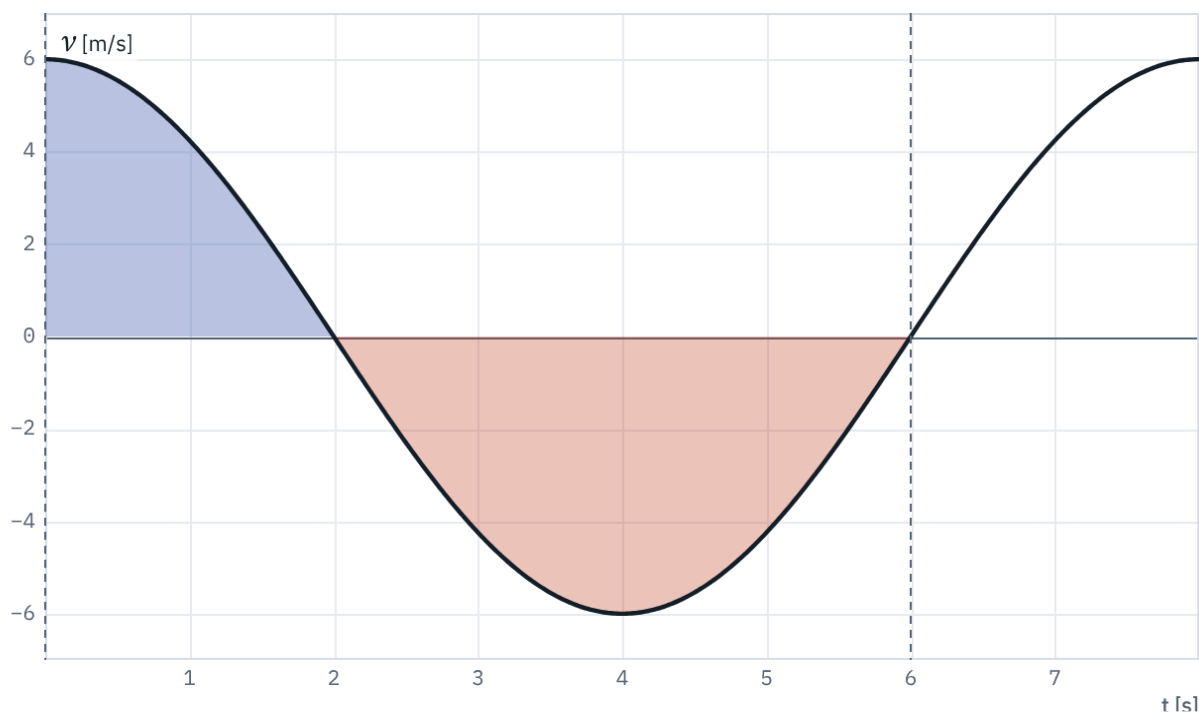
5.1 Przemieszczenie i droga

W krótkim czasie dt ciało przesuwa się o $v \, dt$. Sumując te kawałki, dostajemy przemieszczenie, a sumując ich długości, drogę: FLP I-8-4 · GS 8.3, 9.2.1

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt, \quad s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| \, dt.$$

Na wykresie $v(t)$ przemieszczenie to pole ze znakiem, a droga to pole bez znaku. Żeby policzyć drogę, dzielimy przedział w chwilach, w których $v = 0$, i dodajemy wartości bezwzględne całek z kawałków. Tak samo prędkość to całka z przyspieszenia: $v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a \, dt$.

SYMULACJA 4 Pole pod wykresem prędkości. Wybierz ruch i ustaw przedział czasu. Pole nad osią (niebieskie) to ruch do przodu, pod osią (czerwone) to ruch do tyłu. Przemieszczenie to różnica tych pól, droga to ich suma.



— $v(t)$ — ruch do przodu — ruch do tyłu

przemieszczenie $\int v \, dt$ -7,64 m

droga $\int |v| \, dt$ 22,92 m

prędkość średnia -1,27 m/s

średnia szybkość 3,82 m/s

Stan na rysunku: $v(t) = 6 \cos(\pi t/4)$, $[0,00; 6,00]$ s, przemieszczenie -7,64 m, droga 22,92 m.

5.2 Całka z wektora

Wektory całkujemy po składowych, tak jak je różniczkowaliśmy. Jeśli znamy $\vec{a}(t)$, położenie i prędkość początkowe, to: GS 8.3.2

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(\tau) \, d\tau, \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau) \, d\tau.$$

Zmienną pod całką oznaczyliśmy τ , bo t jest już zajęte przez górną granicę. Dla stałego przyspieszenia wychodzi znany wzór $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$. Rzut ukośny to po prostu ten wzór z $\vec{a} = [0, -g]$.

Przykład 5.1

Ruch drgający: tam i z powrotem

Prędkość ciała to $v(t) = 6 \cos \frac{\pi t}{4}$ m/s. Oblicz przemieszczenie i drogę w przedziale $[0; 6]$ s.

- 1 Funkcja pierwotna: $X(t) = \frac{24}{\pi} \sin \frac{\pi t}{4}$.
- 2 Przemieszczenie: $X(6) - X(0) = \frac{24}{\pi} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{24}{\pi} \approx -7,64$ m.
- 3 $v = 0$ dla $t = 2$ s. Na $[0; 2]$: $X(2) - X(0) = \frac{24}{\pi} \approx 7,64$ m. Na $[2; 6]$: $X(6) - X(2) = -\frac{48}{\pi} \approx -15,28$ m.
- 4 Droga: $7,64 + 15,28 \approx 22,9$ m.

Wynik: przemieszczenie $-\frac{24}{\pi} \approx -7,6$ m, droga $\frac{72}{\pi} \approx 22,9$ m.

Sprawdzenie: droga $\geq |\text{przemieszczenie}| \checkmark$. Ruch to drgania z amplitudą $24/\pi \approx 7,6$ m: ciało przeszło od środka do skrajnego położenia, potem przez środek do drugiego skrajnego. To trzy amplitudy $\checkmark$

Przykład 5.2

Położenie z wektora prędkości

Prędkość punktu to $\vec{v}(t) = [1, \cos t, \sin t]$, a w chwili $t = 0$ był on w początku układu. Gdzie jest w chwili $t = \pi$? Jaką drogę przebył? (GS ćw. 8.3.3)

- 1 Po składowych: $\vec{r}(t) = [t, \sin t, 1 - \cos t]$. Stałe dobraliśmy tak, żeby $\vec{r}(0) = \vec{0}$.
- 2 $\vec{r}(\pi) = [\pi, 0, 2]$.
- 3 Szybkość: $|\vec{v}| = \sqrt{1 + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2}$, stała. Droga to $\sqrt{2}\pi \approx 4,44$.

Wynik: $\vec{r}(\pi) = [\pi, 0, 2]$; droga $\sqrt{2}\pi \approx 4,44$.

Sprawdzenie: odległość od startu to $\sqrt{\pi^2 + 4} \approx 3,72$, mniej niż droga $\checkmark$. Tor to linia śrubowa o osi równoległej do osi x (prosta $y = 0, z = 1$): składowe y i z krążą po okręgu o promieniu 1 wokół punktu $(0, 1)$.

1 $v(t) = 3t^2 - 12$ m/s. Oblicz przemieszczenie i drogę w przedziale $[0; 3]$ s.

2 $a(t) = 2t$ (SI), $v(0) = 1$ m/s, $x(0) = 0$. Wyznacz $v(t)$, $x(t)$ i położenie po 3 s.

3 Winda rusza z przyspieszeniem 1 m/s^2 przez 2 s, potem jedzie ze stałą prędkością przez 6 s, a na koniec hamuje z opóźnieniem 1 m/s^2 do zatrzymania. Narysuj $v(t)$ i oblicz wysokość, na jaką wjechała, jako pole pod wykresem.

4 Skoczek w dal rozpędza się z miejsca ze stałym przyspieszeniem 2 m/s^2 przez 5 s. Oblicz długość rozbiegu i prędkość w chwili odbicia. (GS ćw. 9.2.2)

5 Kamień rzucono z ziemi z prędkością $\vec{v}_0 = [12, 16]$ m/s, przyspieszenie $\vec{a} = [0, -10]$ m/s². Całkując po składowych, wyznacz $\vec{r}(t)$. Kiedy i gdzie kamień spadnie? Jak wysoko się wzniesie?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 9.2.2.

6 Wytnij, zapisz, zsumuj

W fizyce całka rzadko pojawia się jako „pole pod wykresem”. Prawie zawsze powstaje z tego samego przepisu w trzech krokach:

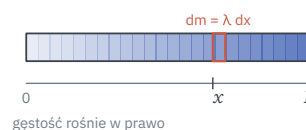
1. **Wytnij** mały kawałek: odcinek pręta dx , chwilę dt , cienką warstwę dr .
2. **Zapisz** wkład tego kawałka, zakładając, że w jego obrębie wszystko jest stałe: masa $dm = \lambda dx$, praca $dW = F dx$, moment bezwładności $dI = r^2 dm$.
3. **Zsumuj** wkłady całką po wszystkich kawałkach.

Założenie „w obrębie kawałka wszystko jest stałe” jest fałszywe dla każdego skończonego kawałka, ale błąd znika w granicy. To dokładnie ten sam argument, którego Feynman używa przy drodze i prędkości.

6.1 Masa i środek masy

Pręt o gęstości liniowej $\lambda(x)$ [kg/m] dzielimy na kawałki o masie $dm = \lambda(x) dx$. Masa i środek masy to: FLP I-19-1

$$m = \int_0^L \lambda(x) dx, \quad x_S = \frac{1}{m} \int_0^L x \lambda(x) dx.$$



Środek masy to więc średnia położenia, ważona masą. Dla jednorodnego pręta wypada w środku, a dla pręta gęstniejącego ku jednemu końcowi przesuwa się w jego stronę.

6.2 Praca siły zmiennej

Gdy siła zależy od położenia, praca na krótkim odcinku dx to $F(x) dx$, a cała praca to całka.

Feynman dochodzi do tej całki, wyprowadzając z drugiej zasady dynamiki twierdzenie o pracy i energii kinetycznej: $dT = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, więc $\Delta T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Liczy się tylko składowa siły wzdłuż drogi.

FLP I-13-1 · GS 9.2.3

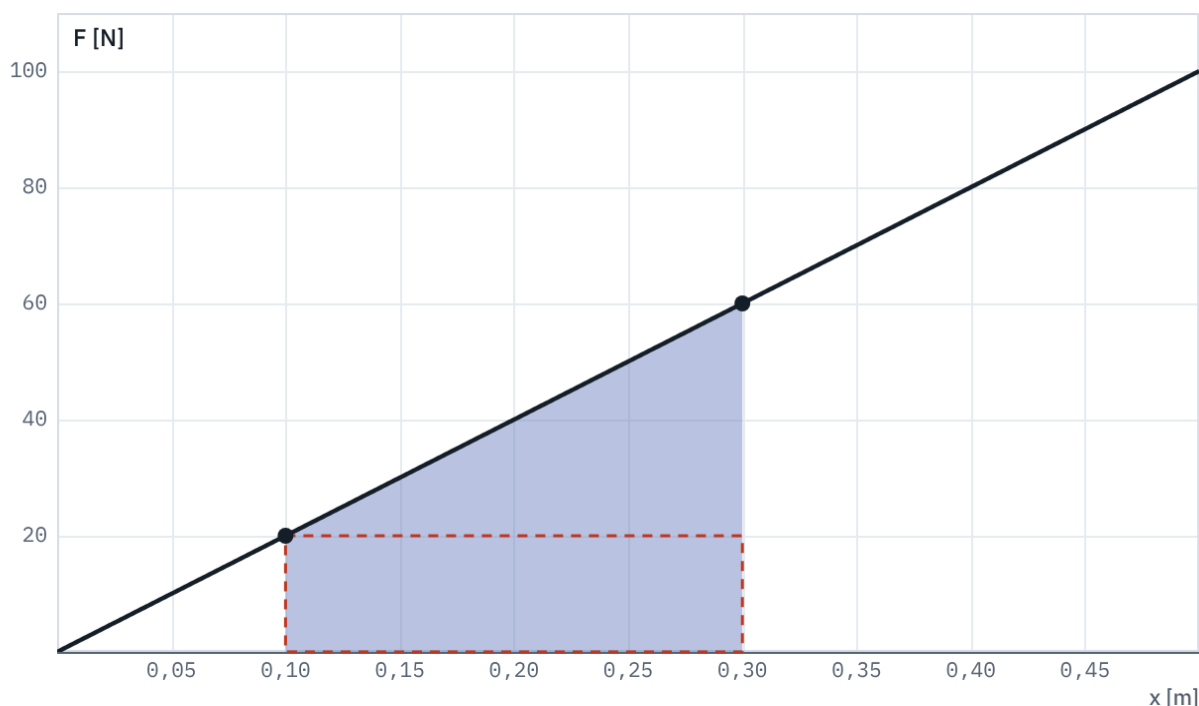
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

Trzy przypadki, które spotkasz na każdym kroku:

- **Sprężyna:** praca potrzebna do rozciągnięcia, $F = kx$: $W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$. Pole trójkąta, stąd ułamek $\frac{1}{2}$.
- **Grawitacja:** praca potrzebna do oddalenia ciała z r_1 na r_2 wbrew przyciąganiu $F = \frac{GMm}{r^2}$:
 $W = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.
- **Gaz:** praca wykonana przez gaz rozprężający się w tłoku, $W = \int p dV$. W przemianie izotermicznej $p = nRT/V$, więc $W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

SYMULACJA 5

Praca jako pole pod wykresem siły. Wybierz siłę i przesuń granice. Wynik całki porównaj z „naiwnym” iloczynem $F(x_1) \cdot \Delta x$, który zakłada siłę stałą. Dla grawitacji przesunij górną granicę daleko: praca dąży do skończonej wartości (część 7).



— siła (lub ciśnienie) — praca = pole - - - „stała siła” $F(x_1) \cdot \Delta x$

praca $W = \int F dx$ **8,00 J**

$F(x_1) \cdot \Delta x$ **4,00 J**

$\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$ **8,00 J**

Stan na rysunku: sprężyna $F = 200x$, od 0,10 do 0,30; $W = 8,00$ J, $F(x_1) \cdot \Delta x = 4,00$ J.

6.3 Moment bezwładności

Moment bezwładności to suma $m_i r_i^2$ po wszystkich punktach ciała. Dla ciała ciągłego wycinamy kawałki dm w odległości r od osi i sumujemy: $I = \int r^2 dm$. Feynman liczy tak moment bezwładności pręta i pokazuje, że pręt znacznie łatwiej obracać wokół środka niż wokół końca. Wyprowadza też twierdzenie o osiach równoległych (Steinera). FLP I-19-3

Przykład 6.1

Praca gazu w izotermicznym rozprężaniu

Mol gazu doskonałego w temperaturze 300 K rozpręża się izotermicznie, aż jego objętość się podwoi. Oblicz pracę wykonaną przez gaz.

- 1 Wytnij: mała zmiana objętości dV . Zapisz: $dW = p dV$, gdzie $p = \frac{nRT}{V}$.
- 2 Zsumuj: $W = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{nRT}{V} dV = nRT \left[\ln V \right]_{V_1}^{2V_1} = nRT \ln 2$.
- 3 $W = 1 \cdot 8,314 \cdot 300 \cdot 0,693 \approx 1730 \text{ J}$.

Wynik: $W = nRT \ln 2 \approx 1,73 \text{ kJ}$.

Sprawdzenie: wynik nie zależy od tego, jaka była objętość początkowa, tylko od stosunku $V_2/V_1 \checkmark$. Ciśnienie maleje w trakcie rozprężania, więc praca jest mniejsza niż $p_1(V_2 - V_1) = nRT \checkmark$

Przykład 6.2

Moment bezwładności pręta

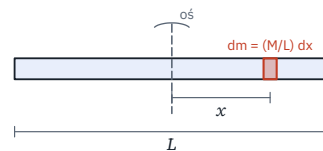
Jednorodny pręt ma masę M i długość L . Oblicz jego moment bezwładności względem osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez środek, i względem osi przechodzącej przez koniec.

- 1 Wytnij: kawałek dx w odległości x od osi. Zapisz:

$$dm = \frac{M}{L} dx, dI = x^2 dm.$$

- 2 Oś w środku: $I_S = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{ML^2}{12}.$

- 3 Oś na końcu: $I_0 = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}.$



Kawałek pręta o masie $dm = \lambda dx$ w odległości x od osi

Wynik: $I_S = \frac{1}{12}ML^2$, $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$.

Sprawdzenie: twierdzenie Steinera, $I_0 = I_S + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \checkmark$.

Wokół osi na końcu pręt obraca się trudniej, bo więcej masy jest daleko od osi.

Feynman liczy I_S sprytniej, bez drugiej całki: pręt obracany wokół środka to dwa pręty o masie $M/2$ i długości $L/2$ obracane wokół końca, więc $I_S = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Sprężyna ma stałą $k = 400$ N/m. Oblicz pracę potrzebną do rozciągnięcia jej o pierwsze 10 cm i o kolejne 10 cm. Dlaczego druga praca jest większa?
- 2 Pręt o długości 2 m ma gęstość $\lambda(x) = 1 + x$ kg/m. Oblicz jego masę i położenie środka masy.
- 3 Walcowy zbiornik o promieniu 1 m i wysokości 3 m jest pełen wody. Jaką pracę trzeba wykonać, żeby wypompować całą wodę przez górną krawędź?
- 4 Oblicz pracę potrzebną do podniesienia ciała o masie 400 kg na wysokość 140 km nad powierzchnię Ziemi ($R = 6400$ km, $g = 9,81$ m/s²). Porównaj z mgh . (GS ćw. 9.2.4)

- 5 Oblicz moment bezwładności jednorodnego cienkiego krążka o masie M i promieniu R względem osi prostopadłej do krążka przez jego środek. Wytnij cienki pierścień o promieniu r i szerokości dr .

▣ podstawowe ▣ średnie ▣ feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 8.3.1, 9.2.4.

7 Całki niewłaściwe

Definicja z części 1 wymaga skończonego przedziału i ograniczonej funkcji. W fizyce często potrzebujemy więcej: pracy potrzebnej do odsunięcia ciała „do nieskończoności” albo ładunku, który przepłynie przez rozładowujący się kondensator w „nieskończenie długim” czasie. Takie całki definiujemy jako granice:

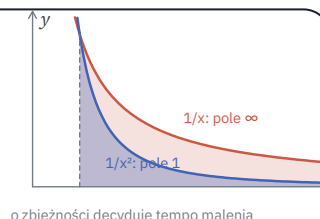
$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_0^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x) dx \quad (\text{gdy } f \text{ nie jest ograniczona przy } 0)$$

Gdy granica istnieje i jest skończona, całka jest **zbieżna**. W przeciwnym razie jest **rozbieżna**.

WZORZEC · POTĘGI

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \text{ jest zbieżna } \iff p > 1, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ jest zbieżna } \iff p < 1$$

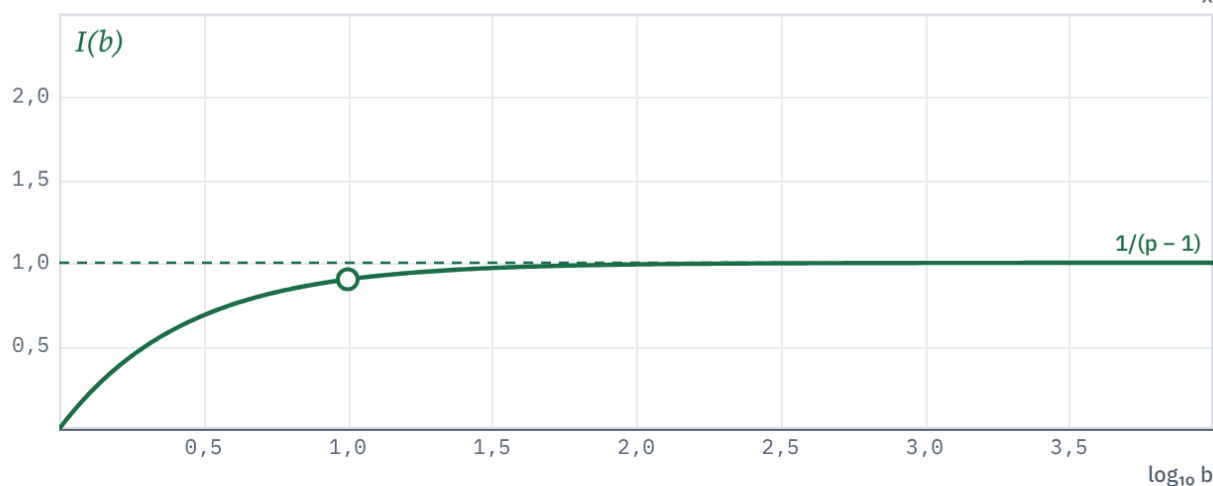
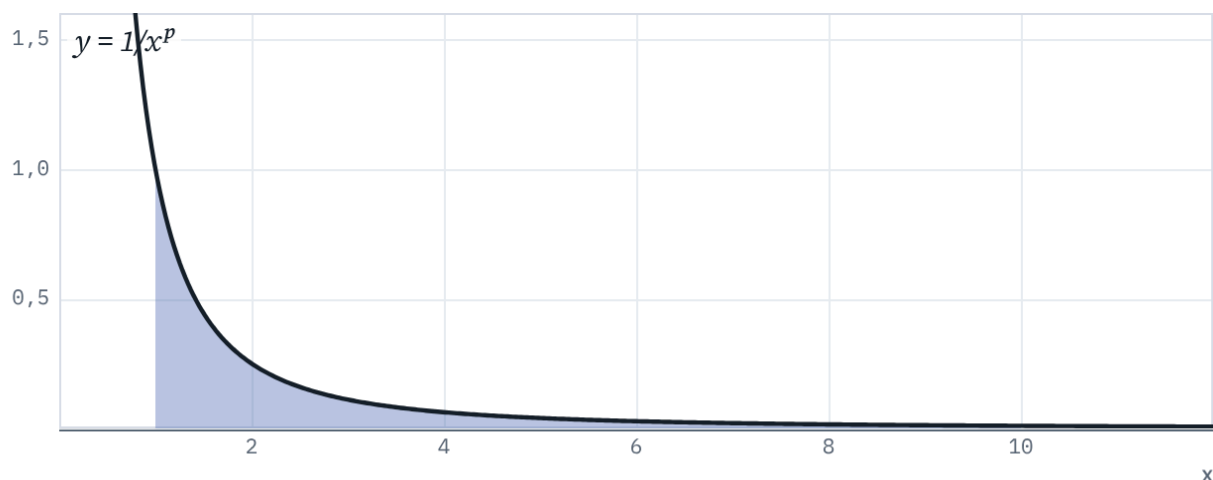
Przypadek graniczny to $p = 1$, czyli $\frac{1}{x}$, której funkcja pierwotna $\ln x$ jest nieograniczona zarówno przy $x \rightarrow \infty$, jak i przy $x \rightarrow 0^+$, choć rośnie bardzo powoli.



Z tym wzorcem porównujemy inne funkcje. Wykładnicza e^{-x} maleje szybciej niż każda potęga, więc $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ jest zbieżna. Siła grawitacji maleje jak $1/r^2$, więc praca do nieskończoności jest skończona. Gdyby malała jak $1/r$, żadne ciało nie mogłoby uciec z żadnej planety.

SYMULACJA 6

Czy nieskończony ogon ma skończone pole? Zmieniaj wykładnik p i przesuwaj górną granicę b . Dla $p > 1$ całka $\int_1^b x^{-p} dx$ zbliża się do $\frac{1}{p-1}$. Dla $p \leq 1$ rośnie bez końca, choć dla $p = 1$ bardzo powoli.



— $y = x^{-p}$ — pole od 1 do b — $I(b) = \int_1^b x^{-p} dx$

p 2,00

b 10

$I(b)$ 0,9000

granica dla $b \rightarrow \infty$ 1,0000 (zbieżna)

Stan na rysunku: $p = 2,00$, $b = 10$, $I(b) = 0,9000$; granica 1,0000.

Przykład 7.1

Prędkość ucieczki z Ziemi

Jaką najmniejszą prędkość trzeba nadać ciału na powierzchni Ziemi, żeby oddaliło się nieskończenie daleko (bez oporu powietrza)? $GM = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $R = 6371 \text{ km}$.

- 1 Praca przeciw grawitacji: $W = \int_R^\infty \frac{GMm}{r^2} dr = \lim_{b \rightarrow \infty} GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right) = \frac{GMm}{R}$.
- 2 Energia kinetyczna musi wystarczyć na tę pracę: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}$, więc $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.
- 3 $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,986 \cdot 10^{14}}{6,371 \cdot 10^6}} \approx 11,2 \text{ km/s}$.

Wynik: $v = \sqrt{2GM/R} \approx 11,2 \text{ km/s}$.

Sprawdzenie: masa ciała się skróciła, więc wynik jest taki sam dla piłki i rakiety ✓. Mimo nieskończonej drogi praca jest skończona i wynosi tyle, co podniesienie ciała o R przy stałym g : $\frac{GMm}{R} = mgR$ ✓

Przykład 7.2

Cały ładunek kondensatora

Prąd rozładowania kondensatora maleje jak $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Jaki ładunek przepłynie w nieskończenie długim czasie? Po jakim czasie przepłynie połowa tego ładunku?

- 1 $Q = \int_0^\infty I_0 e^{-t/\tau} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} I_0 \tau (1 - e^{-b/\tau}) = I_0 \tau$.
- 2 Połowa: $I_0 \tau (1 - e^{-T/\tau}) = \frac{1}{2} I_0 \tau$, więc $e^{-T/\tau} = \frac{1}{2}$ i $T = \tau \ln 2 \approx 0,69 \tau$.

Wynik: $Q = I_0 \tau$; połowa ładunku przepływa w czasie $\tau \ln 2$.

Sprawdzenie: $I_0 \tau$ to pole prostokąta o wysokości I_0 i szerokości τ . Prąd nigdy nie spada do zera, a mimo to ładunek jest skończony ✓

- 1 Oblicz: (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$, (b) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$.
- 2 Która z całek jest zbieżna: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ czy $\int_0^1 \frac{dx}{x}$? Oblicz zbieżną.
- 3 Oblicz prędkość ucieczki z Księżyca ($GM = 4,90 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $R = 1737 \text{ km}$). Dlaczego Księżyc praktycznie nie ma atmosfery?
- 4 Przez opornik płynie prąd $I = I_0 e^{-t/\tau}$. Wydzielana moc to $P = RI^2$. Oblicz całkowite ciepło wydzielone od $t = 0$ do nieskończoności. Ile go wydzieli się w pierwszym czasie τ ?
- 5 Wykres $y = 1/x$ dla $x \geq 1$ obracamy wokół osi x (tzw. trąbka Torricellego, nazywana też trąbką Gabriela). Wykaż, że objętość bryły, $\pi \int_1^\infty y^2 dx$, jest skończona, a pole powierzchni, $2\pi \int_1^\infty y \sqrt{1 + y'^2} dx$, jest nieskończone.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

Więcej zadań: całki niewłaściwe omawia druga część skryptu Gewerta i Skoczylasa (*Analiza matematyczna 2*).

8 Błędne intuicje

Najczęstsze błędy przy całkach to nie pomyłki w tabeli, tylko fałszywe obrazy.

× „Całka to pole, więc zawsze jest dodatnia.”

Całka to pole ze znakiem. Części pod osią liczą się z minusem, więc $\int_0^{2\pi} \sin x = 0$. Pole geometryczne to całka z $|f|$ (część 1.2).

× „Przemieszczenie i droga to to samo.”

Tylko gdy ciało nie zawraca. Droga to $\int |v| dt$ i trzeba dzielić przedział tam, gdzie $v = 0$ (część 5, przykład 5.1).

× „Stałą C można pominąć.”

W całce oznaczonej się skraca, ale w całce nieoznaczonej niesie informację. W fizyce to warunek początkowy. Bez niego nie wiadomo, gdzie ciało było na starcie (przykład 2.1).

× „Całka iloczynu to iloczyn całek.”

Nie. Do iloczynów służy całkowanie przez części (część 4.2), czyli reguła iloczynu czytana od tyłu.

× „Po podstawieniu wystarczy podmienić funkcję.”

Trzeba też podmienić dx na $du/g'(x)$ i w całce oznaczonej zmienić granice. Inaczej wynik jest po prostu inną całką (symulacja 3).

× „Wzór Newtona–Leibniza działa zawsze.”

Wymaga, żeby funkcja była ciągła na całym przedziale (ogólniej: całkowalna i mająca tam funkcję pierwotną). $[-1/x]_{-1}^1 = -2$ to bzdura, bo $1/x^2$ nie jest ograniczona w zerze (zadanie 6 w części 2).

× „Jeśli funkcja maleje do zera, pole pod nią jest skończone.”

$1/x$ maleje do zera, a $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$. O zbieżności decyduje szybkość malenia (część 7).

× „Każdą całkę da się policzyć wzorem.”

Nie. $\int e^{-x^2} dx$ nie ma postaci elementarnej. Całkę oznaczoną zawsze można jednak policzyć numerycznie (część 1.3).

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jaką jednostkę ma całka z siły [N] po czasie [s]? Co oznacza fizycznie?

N·s, czyli kg·m/s. To popęd (impuls) siły, równy zmianie pędu (Dział 3: Pęd, zderzenia i środek masy).

2 Wykres prędkości jest symetrycznym trójkątem: od 0 do 10 m/s w 5 s i z powrotem do 0 w kolejne 5 s. Jaka jest droga?

Pole trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ s} \cdot 10 \text{ m/s} = 50 \text{ m}$.

3 Ile wynosi $\frac{d}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$?

$\cos(x^2)$, z twierdzenia głównego. Samej całki nie da się wyrazić funkcjami elementarnymi, ale jej pochodną znamy od razu.

4 Dlaczego $\int_{-5}^5 x^7 \cos x dx = 0$ bez liczenia?

Funkcja jest nieparzysta (nieparzysta razy parzysta), a przedział jest symetryczny.

5 Suma z lewych końców dla funkcji rosnącej: zaniża czy zawyża?

Zaniża, bo w każdym kawałku wysokość prostokąta to najmniejsza wartość funkcji na tym kawałku.

6 Siła sprężyny rośnie liniowo z wydłużeniem. Dlaczego energia sprężyny to $\frac{1}{2}kx^2$, a nie kx^2 ?

Praca to pole pod wykresem $F(x) = kx$, czyli pole trójkąta, a nie prostokąta o wysokości kx .

7 Jeden pręt ma masę skupioną przy końcach, drugi przy środku. Masy i długości są równe. Który ma większy moment bezwładności względem środka?

Ten z masą przy końcach, bo w $\int r^2 dm$ wkład każdego kawałka rośnie z kwadratem jego odległości od osi.

8 Czy pole pod wykresem e^{-x} na całej półosi $[0, \infty)$ jest skończone?

Tak, równe 1, bo $\int_0^b e^{-x} dx = 1 - e^{-b} \rightarrow 1$.

DEFINICJE I TWIERDZENIA

$\int_a^b f \, dx = \lim \sum f(x_k^*) \Delta x_k$ (pole ze znakiem)

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x)$$

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a), \text{ gdy } F' = f$$

$$\int f \, dx = F(x) + C$$

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx$$

podstawienie: $\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx =$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$$

części: $\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1$$

TABELA I ZASTOSOWANIA

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{e^{kx}}{k}, \quad \int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\Delta x = \int v \, dt, \quad s = \int |v| \, dt, \quad \Delta v = \int a \, dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} \, d\tau$$

$$m = \int \lambda \, dx, \quad x_S = \frac{1}{m} \int x \, dm, \quad I = \int r^2 \, dm$$

$$W = \int F \, dx: \text{sprężyna } \frac{1}{2}kx^2, \text{ gaz}$$

$$nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$v_{\text{ucieczki}} = \sqrt{2GM/R}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 8-4 (droga jako całka), 13-1 (praca jako całka z siły).
- **Dla chętnych:** 13-3...13-4 (energia układu wielu ciał; pole płaskiej warstwy i energia potencjalna powłoki kulistej jako całki), 19-1 (środek masy jako średnia ważona), 19-2...19-3 (środek masy, twierdzenie Pappusa, moment bezwładności pręta).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory:** rozdz. 7 (całki nieoznaczone, tabela, przez części, podstawienie), rozdz. 8 (całka oznaczona, twierdzenia główne, wartość średnia, metody przybliżone), rozdz. 9 (zastosowania w geometrii i fizyce).
- **R. Leitner, Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych:** całki są w części II, której tu nie cytujemy.

Całki wrócą w szeregach (1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe), w całkach wielokrotnych (3.3 Całki podwójne i potrójne) i w równaniach różniczkowych (4.1 Równania różniczkowe zwyczajne),

gdzie z prędkości odtworzymy cały ruch nawet wtedy, gdy prędkość zależy od położenia.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\Delta x = 0,5$. Lewe: $0,5(0 + 0,5 + 1 + 1,5) = 1,5$. Prawe: $0,5(0,5 + 1 + 1,5 + 2) = 2,5$. Pole trójkąta $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ leży dokładnie pośrodku.
2. 0 i 4. W pierwszej całce łuk pod osią liczy się z minusem i znosi łuk nad osią. W drugiej oba łuki liczą się z plusem.
3. Trapezy: $10 \left(\frac{0}{2} + 8 + 14 + 18 + 20 + \frac{20}{2} \right) = 700$ m. Dla prędkości niemalejącej lewa suma zaniża, a prawa zawyża: droga leży między $10(0 + 8 + 14 + 18 + 20) = 600$ m a $10(8 + 14 + 18 + 20 + 20) = 800$ m.
4. $S_n = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \rightarrow \frac{1}{4}$.
5. $n = 10$: lewe $-0,0483$, trapezy $+0,00167$, środki $-0,00083$. $n = 20$: lewe $-0,0246$, trapezy $+0,00042$, środki $-0,00021$. Błąd lewych końców maleje ok. 2 razy (jak $1/n$), a błędy trapezów i środków 4 razy (jak $1/n^2$). Dla x^2 dokładnie: błąd trapezów $\frac{1}{6n^2}$, a środków $-\frac{1}{12n^2}$.

Zadania · część 2

1. (a) $x^3 - 2x^2 + 5x + C$; (b) $\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} + C$; (c) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$.
2. (a) $\ln e - \ln 1 = 1$; (b) $\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$; (c) $e - 1 \approx 1,718$.
3. Z twierdzenia głównego $F'(x) = xe^{-x}$. Dla $x > 0$ pochodna jest dodatnia, więc F rośnie. Każdy kolejny pasek dokładnie dodatnie pole.
4. $G(x) = F(x^2)$, gdzie $F' = \sin$, więc $G'(x) = \sin(x^2) \cdot 2x$. Wprost: $G(x) = 1 - \cos(x^2)$, $G'(x) = 2x \sin(x^2)$ ✓.
5. $v = 20 - 10t$, $h = 5 + 20t - 5t^2$. Najwyżej dla $t = 2$ s: $h = 25$ m. Upadek: $5t^2 - 20t - 5 = 0$, $t = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24$ s.
6. Funkcja podcałkowa jest dodatnia, więc całka nie może być ujemna. Wzór wymaga, żeby f była ciągła na całym $[a, b]$, a $1/x^2$ nie jest nawet określona w zerze i rośnie tam nieograniczenie. To całka niewłaściwa (część 7), w tym przypadku rozbieżna: pole jest nieskończone.

Zadania · część 3

1. $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$. Większa od $\frac{1}{2}$, bo łuk sinusa jest „pełniejszy” od trójkąta.
2. $\bar{f} = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$, $c^2 = 3$, $c = \sqrt{3} \approx 1,73$. Punkt nie leży w środku przedziału, bo funkcja nie jest liniowa.
3. Na $[0, 1]$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, więc całka leży między 0,5 a 1. Dokładnie: $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$.
4. $\bar{v} = \frac{1}{5} \int_0^5 (5 + 2t) \, dt = \frac{1}{5}(25 + 25) = 10$ m/s. $\frac{1}{2}(5 + 15) = 10$ m/s: równe, bo prędkość jest liniową funkcją czasu.

5. $|\sin x|$ ma okres π , a $\int_0^\pi \sin x = 2$, więc wynik to $10 \cdot 2 = 20$. Średnia: $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$. To średnia wartość napięcia po wyprostowaniu dwupołówkowym: $U_{sr} = \frac{2}{\pi} U_0$.

Zadania • część 4

- (a) $-\frac{1}{\omega} \cos \omega t + C$; (b) $\frac{(3x-1)^5}{15} + C$; (c) $-\frac{1}{k} e^{-kt} + C$.
- (a) $u = x^2 + 1: \ln(x^2 + 1) + C$; (b) $u = \sin x: e^{\sin x} + C$.
- $u = 1 + x^4, du = 4x^3 dx$, granice $1 \mapsto 2: \frac{1}{4} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{6} (2^{3/2} - 1) \approx 0,305$.
- $u = \ln x$ (upraszcza się do $1/x$), $v' = x, v = \frac{1}{2}x^2: \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Odwrotny wybór ($u = x, v' = \ln x$) wymaga najpierw znalezienia $\int \ln x dx = x \ln x - x$ i prowadzi do całki, która zawiera wyjściową: to droga okrężna.
- Funkcja pierwotna: $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$. Wynik: $(\pi^2 - 2) - 2 = \pi^2 - 4 \approx 5,87$.
- $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} [t + \frac{1}{2} \sin 2t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$. To ćwiartka koła o promieniu 1, czyli $\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 \checkmark$.

Zadania • część 5

- $X(t) = t^3 - 12t$. Przemieszczenie $X(3) - X(0) = -9$ m. $v = 0$ dla $t = 2$: na $[0; 2]$ przemieszczenie -16 m, na $[2; 3]$ $+7$ m. Droga 23 m.
- $v = t^2 + 1, x = \frac{1}{3}t^3 + t, x(3) = 12$ m.
- Wykres to trapez: $v_{\max} = 2$ m/s, hamowanie trwa 2 s. Pole $= 2 + 12 + 2 = 16$ m.
- $v = 2t, s = \int_0^5 2t dt = 25$ m, $v(5) = 10$ m/s.
- $\vec{v} = [12, 16 - 10t], \vec{r} = [12t, 16t - 5t^2]$. Upadek dla $t = 3,2$ s, w odległości 38,4 m. Najwyżej dla $t = 1,6$ s: 12,8 m.

Zadania • część 6

- $\frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 0,1^2 = 2$ J oraz $\frac{1}{2} \cdot 400 \cdot (0,2^2 - 0,1^2) = 6$ J. Na drugim odcinku siła jest większa, bo rośnie z wydłużeniem, więc pole pod wykresem jest trzy razy większe.
- $m = \int_0^2 (1+x) dx = 4$ kg, $x_S = \frac{1}{4} \int_0^2 x(1+x) dx = \frac{1}{4} (2 + \frac{8}{3}) = \frac{7}{6} \approx 1,17$ m, czyli bliżej cięższego końca.
- $dW = \rho g \pi R^2 (3-y) dy, W = \rho g \pi \int_0^3 (3-y) dy = 1000 \cdot 9,81 \cdot \pi \cdot 4,5 \approx 1,39 \cdot 10^5$ J. To tyle, ile praca podniesienia całej wody o 1,5 m, czyli od jej środka masy do krawędzi.
- $W = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mg \frac{Rh}{R+h} \approx 5,38 \cdot 10^8$ J. $mgh \approx 5,49 \cdot 10^8$ J, ok. 2% za dużo, bo zakłada, że siła ciężkości nie maleje z wysokością.
- Gęstość powierzchniowa $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. Pierścień: $dm = \sigma 2\pi r dr, dI = r^2 dm. I = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} M R^2$.

Zadania • część 7

- (a) $\lim \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^b = \frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$.

2. $\int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 2$: zbieżna. $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon \rightarrow \infty$: rozbieżna.

3. $v = \sqrt{2GM/R} \approx 2,38$ km/s. W temperaturze nasłonecznionej powierzchni (ok. 390 K) średnia prędkość cząsteczek lekkich gazów to setki m/s do ponad 2 km/s (wodór), a szybsze cząsteczki z ogona rozkładu uciekają. W ciągu miliardów lat Księżyc stracił prawie cały gaz.

4. $Q_c = RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} RI_0^2 \tau$. W czasie τ : $\frac{1}{2} RI_0^2 \tau (1 - e^{-2})$, czyli ok. 86% całości.

5. Objętość: $\pi \int_1^{\infty} x^{-2} dx = \pi$. Pole: $\sqrt{1+y'^2} \geq 1$, więc $2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1+x^{-4}} dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$. „Trąbkę można napęlić farbą, ale nie da się jej pomalować”: o zbieżności decyduje wykładnik, x^{-2} czy x^{-1} .

Matematyka · Całki. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 8-4, 13-1, 19-1...19-3; M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, rozdz. 7-9. Cytaty w tłumaczeniu własnym, odnośniki do Feynmana w formacie tom-rozdział-podrozdział.