

Rachunek różniczkowy w praktyce

W lekcji 1.3 Pochodne nauczyliśmy się je liczyć, tu uczymy się ich używać. Fizyk prawie nigdy nie zna dokładnej odpowiedzi. Zna za to pierwszy wyraz, potem drugi, i wie, kiedy można przestać. Różniczka, wzór Taylora, ekstrema, gradient i niepewności pomiarowe to pięć zastosowań jednej myśli: z bliska każda gładka funkcja wygląda jak prosta albo parabola.

CZAS

ok. 4 h teorii + 4 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 14-5, 15-8...15-9, 26-3...26-5; R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej*, cz. I, §55-77; M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1*, rozdz. 4.4, 5, 6

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: sztuka przybliżeń
- 1 Różniczka i przybliżenie liniowe
- 2 Wzór Taylora
- 3 Wartość średnia i ekstrema
- 4 Pochodne cząstkowe i gradient
- 5 Różniczka zupełna i niepewności
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: sztuka przybliżeń

W rozdziale o teorii względności Feynman pokazuje, że masa ciała zależy od prędkości: $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Wzór jest dokładny, ale niewiele z niego widać. Feynman rozwija go więc w szereg dla małych prędkości: FLP I-15-8 (wzór 15.11)

$$m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right) \approx m_0 + \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{c^2}.$$

Drugi wyraz to energia kinetyczna podzielona przez c^2 . Z jednego rozwinięcia wychodzi stara mechanika jako przybliżenie nowej i pierwsza wskazówka, że $E = mc^2$. Feynman dodaje, że szereg szybko się zbiega, gdy v jest małe, a wyrazy po pierwszych dwóch lub trzech są do pominięcia.

W fizyce tak jest prawie zawsze. Dokładny wzór jest skomplikowany albo nieznany, ale w okolicy interesującego nas punktu funkcja zachowuje się prosto: jak stała, jak prosta, jak parabola. Ta lekcja pokazuje, jak z pochodnych zrobić narzędzie do przybliżeń: **prosta** (różniczka), **parabola** i dalsze wyrazy (wzór Taylora), **płaski szczyt** (ekstremum), **nachylenie w wielu wymiarach** (gradient) i szacowanie niepewności (różniczka zupełna).

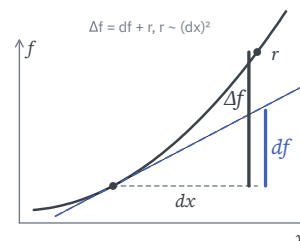
Różniczka i przybliżenie liniowe

1.1 Przyrost i różniczka

Gdy argument zmienia się o dx , funkcja zmienia się o przyrost $\Delta f = f(x + dx) - f(x)$. Leitner rozkłada ten przyrost na dwie części:

Leitner §55 · GS 4.4.1

$$\Delta f = \underbrace{f'(x) dx}_{\text{różniczka } df} + \underbrace{r}_{\text{reszta}}, \quad \frac{r}{dx} \rightarrow 0 \text{ przy } dx \rightarrow 0.$$



Różniczka $df = f'(x) dx$ to zmiana wzdłuż stycznej, czyli główna, liniowa część przyrostu. Reszta maleje szybciej niż dx , dla funkcji gładkich jak $(dx)^2$. Dla $f = x^2$ w punkcie $x = 3$ i $dx = 0,1$: $\Delta f = 0,61$, $df = 0,6$, reszta $0,01$. Przy $dx = 0,01$ reszta spada do $0,0001$: sto razy, a nie dziesięć.

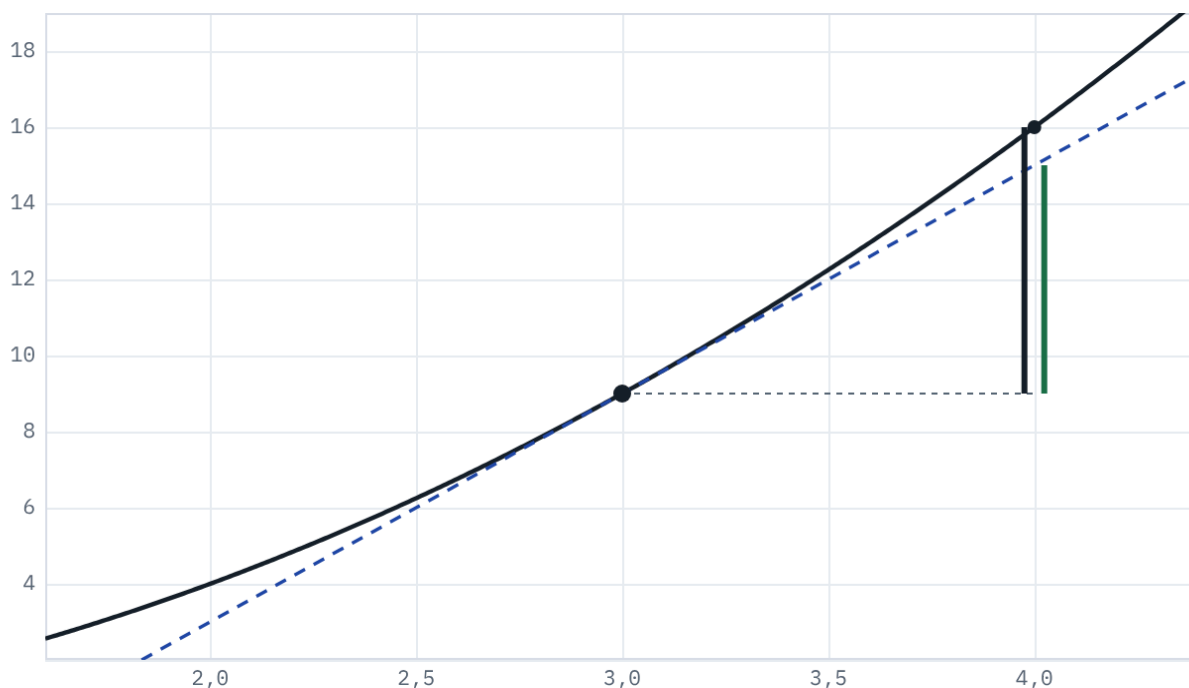
Leitner zwraca uwagę na nazwę. Dla argumentu przyrost i różniczka to to samo, $\Delta x = dx$. Dla funkcji to dwie różne rzeczy. Z równości $df = f' dx$ wynika, że pochodna to dosłownie iloraz dwóch różniczek, $f' = df/dx$. Stąd jej dawna nazwa: **iloraz różniczkowy**. Leitner §55

PRZYBLIŻENIE LINIOWE

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) dx.$$

Dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnej błąd jest rzędu $(dx)^2$: dwa razy mniejszy krok daje mniej więcej cztery razy mniejszy błąd. Leitner (55.9) · GS 4.4.2

SYMULACJA 1 Przyrost i różniczka. Wybierz funkcję i zmniejszaj dx . Różniczka (zielona) to wzrost stycznej, przyrost (czarny) to prawdziwa zmiana funkcji. Ich różnica, czyli reszta, maleje jak $(dx)^2$: stosunek $r/(dx)^2$ ustala się na $\frac{1}{2}f''(x_0)$.



— $f(x)$ - - - styczna — różniczka df — przyrost Δf

dx 1,00

Δf 7,000000

$df = f'(x_0) \cdot dx$ 6,000000

reszta $r = \Delta f - df$ 1,000000

$r / (dx)^2$ 1,0000

$\frac{1}{2} f''(x_0)$ 1,0000

Stan na rysunku: x^2 w $x_0 = 3$, $dx = 1,00$, $\Delta f = 7,000000$, $df = 6,000000$, $r = 1,000000$.

1.2 Zmiany względne

Dla potęgi $f = x^n$ różniczka daje $df = nx^{n-1}dx$, czyli

$$\frac{df}{f} = n \frac{dx}{x}.$$

Względna zmiana potęgi to wykładnik razy względna zmiana podstawy. Jeśli niepewność względna średnicy kuli wynosi 1%, to niepewność względna jej objętości ($\propto d^3$) wynosi ok. 3%. To ta sama reguła, którą w lekcji 1.3 Pochodne wyprowadziliśmy z logarytmu (wzór Feynmana dla iloczynu potęg). Równoważnie: $(1+x)^n \approx 1+nx$ dla $|x| \ll 1$. Leitner przykł. 55.3

Przykład 1.1

Pierwiastek i sinus bez kalkulatora

Oszacuj różniczką $\sqrt{1,1}$ oraz $\sin 31^\circ$. Porównaj z wartościami dokładnymi.

- 1 $f = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $dx = 0,1$: $\sqrt{1,1} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 1,05$ (por. Leitner, przykład 55.2, gdzie tą samą metodą liczony jest $\sqrt[3]{1,1} \approx 1,033$).
- 2 $f = \sin x$, $x_0 = 30^\circ$, $dx = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745$ rad. Kąt musi być w radianach, bo tylko wtedy $(\sin)' = \cos$.
- 3 $\sin 31^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot 0,01745 = 0,5 + 0,8660 \cdot 0,01745 \approx 0,51511$.

Wynik: $\sqrt{1,1} \approx 1,05$ (dokładnie 1,04881); $\sin 31^\circ \approx 0,51511$ (dokładnie 0,51504).

Sprawdzenie: oba przybliżenia są za duże. Dla pierwiastka styczna leży nad wykresem, bo $f'' < 0$. Dla sinusa przy 30° też $f'' = -\sin x < 0$ ✓. Błąd $\sqrt{1,1}$ wynosi 0,0012 przy $dx = 0,1$, a przy $dx = 0,01$ spadłby do ok. 0,0000125.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Oszacuj różniczką $\sqrt{15,96}$.

- 2 Oszacuj $\arctan 1,05$.

- 3 Sześcienna kostka lodu ma objętość 8 cm^3 . Stopiło się $0,3 \text{ cm}^3$ lodu. O ile w przybliżeniu zmniejszyła się krawędź? (GS ćw. 4.4.4)

- 4 Stalowa szyna ma długość 25 m przy 0°C . Współczynnik rozszerzalności liniowej stali to $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. O ile wydłuży się szyna przy 40°C ? O ile procent wzrośnie objętość stalowego sześciangu przy tej samej zmianie temperatury?


- 5 Dla $f = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 9$ wykaż, że reszta przybliżenia liniowego wynosi w przybliżeniu $-\frac{(dx)^2}{216}$. Oblicz ją dla $dx = 0,09$ i porównaj z prawdziwym błędem $\sqrt{9,09} - 3,015$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 4.4.3 c–f, 4.4.4 · Leitner §55.

2 Wzór Taylora

2.1 Od prostej do paraboli i dalej

Styczna dobrze przybliży funkcję blisko punktu, ale nie widzi, w którą stronę wykres się wygina. Dokładamy wyraz z drugą pochodną, potem z trzecią. Kolejne współczynniki dobieramy tak, żeby wielomian miał w x_0 te same pochodne co funkcja:

WZÓR TAYLORA (Z RESZTĄ LAGRANGE'A)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n \quad \text{dla pewnego } c \text{ między } x_0 \text{ a } x_0 + h.$$

Dla $x_0 = 0$ wzór nazywamy **wzorem Maclaurina**. Reszta mówi, jak duży jest błąd: jest rzędu h^n , czyli szybko maleje ze zmniejszaniem kroku. Czy dokładanie wyrazów zawsze pomaga, zależy od promienia zbieżności (lekcja 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe). Leitner tw. 63.1–63.2 · GS 5.3.2

Rozwinięcia, które warto znać na pamięć, dla $|x| \ll 1$ (kąty w radianach): Leitner §65

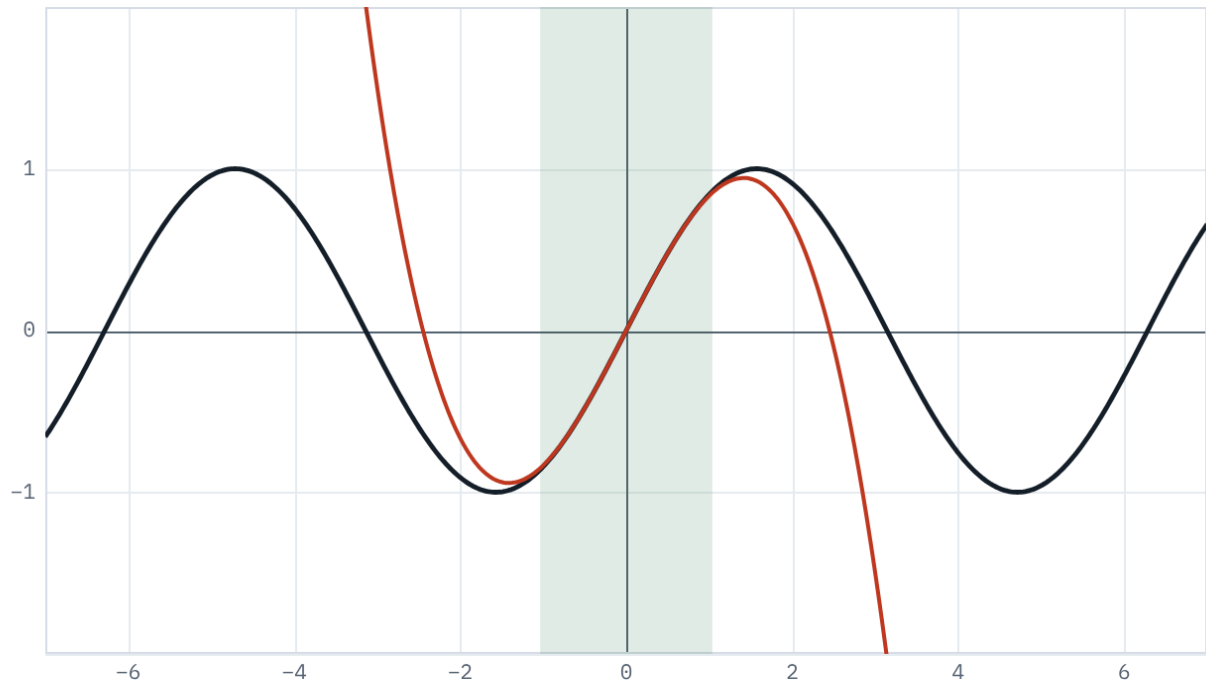
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots$$

Każde z nich wynika wprost ze wzoru: dla e^x wszystkie pochodne w zerze są równe 1, dla sinusa na zmianę 0, 1, 0, -1.

SYMULACJA 2 Wielomiany Taylora. Wybierz funkcję i zwiększaj stopień wielomianu.

Zacieniony pas pokazuje, gdzie wielomian różni się od funkcji o mniej niż 0,01. Z każdym wyrazem pas się poszerza. Dla $\ln(1+x)$ i $(1+x)^{-1/2}$ nie wychodzi poza $x = 1$, niezależnie od liczby wyrazów.



— funkcja — wielomian Taylora — $|błąd| < 0,01$

stopień 3 dobry przedział ($|błąd| < 0,01$) $[-1,04; 1,04]$

pierwsze wyrazy $+1,000 \cdot x - 0,167 \cdot x^3$

Stan na rysunku: $\sin x$, stopień 3, $|błąd| < 0,01$ na $[-1,04; 1,04]$.

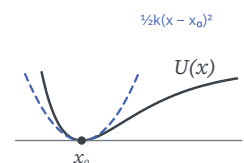
2.2 Pierwszy wyraz, który się nie zeruje

W fizyce zwykle wystarcza pierwszy wyraz, który nie jest zerem.

Najważniejszy przypadek to **dno studni potencjału**. W minimum x_0 energii potencjalnej $U'(x_0) = 0$, więc rozwinięcie zaczyna się od wyrazu kwadratowego:

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2.$$

z bliska każde minimum to parabola



To energia sprężyny o stałej $k = U''(x_0)$. Dlatego małe drgania wokół równowagi trwałej są harmoniczne, o ile $U''(x_0) > 0$ (dla $U \propto x^4$ już nie), niezależnie od tego, czy chodzi o wahadło, atom w kryształach czy most. Wzór $\omega^2 = k/m$ na częstość kołową, a więc i okres $T = 2\pi/\omega$, działa wszędzie, gdzie amplituda jest dostatecznie mała. Te drgania rozwiążemy w lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne.

Przykład 2.1

Jak daleko widać z wieży

Obserwator stoi na wieży o wysokości $h = 100$ m nad morzem. Jak daleko jest horyzont? Promień Ziemi $R = 6371$ km.

- 1 Linia wzroku jest styczna do kuli, więc z twierdzenia Pitagorasa $d^2 + R^2 = (R + h)^2$, czyli $d = \sqrt{2Rh + h^2} = \sqrt{2Rh} \left(1 + \frac{h}{2R}\right)^{1/2}$.
- 2 $\frac{h}{2R} \approx 7,8 \cdot 10^{-6}$, a $(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, więc poprawka to ok. $4 \cdot 10^{-6}$ względnie. Można ją pominąć: $d \approx \sqrt{2Rh}$.
- 3 $d \approx \sqrt{2 \cdot 6,371 \cdot 10^6 \cdot 100} \approx 35,7$ km.

Wynik: $d \approx \sqrt{2Rh} \approx 35,7$ km; zasięg rośnie jak pierwiastek z wysokości.

Sprawdzenie: wzór dokładny daje 35,696 km, przybliżony 35,696 km: różnica ok. 14 cm ✓. Cztery razy wyższa wieża daje tylko dwa razy dalszy horyzont. Pomijamy załamanie światła w atmosferze, które w praktyce wydłuża zasięg o kilka procent.

Przykład 2.2

Wahadło jako sprężyna

Energia potencjalna wahadła o długości l wychylonego o kąt θ to $U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$. Rozwiń ją wokół $\theta = 0$ i odczytaj „stałą sprężystości”. Jaki okres drgań wynika z wzoru $\omega^2 = k/I$, gdzie $I = ml^2$?

- 1 $1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \dots$, więc $U \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2$.
- 2 To energia sprężyny $\frac{1}{2}k\theta^2$ z $k = mgl$ (w zmiennej kątowej).
- 3 $\omega^2 = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}$, więc $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Wynik: $U \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2$; $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ dla małych wychyleń.

Sprawdzenie: następny wyraz, $-\theta^4/24$, jest względnie mały, gdy $\theta^2/12 \ll 1$. Przy $\theta = 0,3$ rad (ok. 17°) poprawka do energii to ok. 0,75%. Dokładny okres rośnie z amplitudą, bo potencjał jest „płytszy” od paraboli ✓

- 1 Oblicz $\cos 0,2$ z rozwinięcia do wyrazu x^4 . Ile cyfr jest poprawnych? (GS ćw. 5.3.5)
- 2 Oblicz $\sqrt{1,1}$ z rozwinięcia $(1+x)^{1/2}$ do wyrazu x^2 . O ile lepiej niż w przykładzie 1.1?
- 3 Ile wyrazów rozwinięcia $\ln(1+x)$ potrzeba, żeby obliczyć $\ln 1,2$ z błędem mniejszym niż 10^{-3} ?
- 4 Energia kinetyczna w teorii względności to $E_k = (\gamma - 1)mc^2$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$. Rozwiń E_k do wyrazu z β^4 , korzystając z rozwinięcia Feynmana z prologu. Przy jakiej prędkości wzór klasyczny $\frac{1}{2}mv^2$ zaniża energię kinetyczną o 1%?
- 5 Oddziaływanie atomów w cząsteczce opisuje potencjał Morse'a $U(x) = U_0 (e^{-2a(x-x_0)} - 2e^{-a(x-x_0)})$. Wykaż, że x_0 to położenie równowagi, i wyznacz stałą „sprężyny” $k = U''(x_0)$ dla małych drgań.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

Więcej zadań: GS ćw. 5.3.3–5.3.5 · Leitner §61–65.

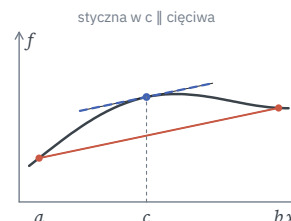
3 Wartość średnia i ekstrema

3.1 Twierdzenie Lagrange'a

Jeśli funkcja jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz, to gdzieś w środku nachylenie stycznej jest równe nachyleniu cięciwy:

Leitner tw. 57.2 · GS 5.1.4

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{dla pewnego } c \in (a, b).$$



Fizycznie: jeśli samochód przejechał 120 km w półtorej godziny, to w którejś chwili prędkościomierz pokazywał dokładnie 80 km/h. Szczególny przypadek $f(a) = f(b)$, z poziomą styczną gdzieś w środku, to twierdzenie Rolle'a. Leitner tw. 57.1 · GS 5.1.1

Z twierdzenia Lagrange'a wynikają rzeczy, które dotąd przyjmowaliśmy na wiarę: funkcja o dodatniej pochodnej na przedziale jest rosnąca, o ujemnej malejąca, a o zerowej stała. Dlatego dwie funkcje pierwotne na przedziale różnią się tylko o stałą. Leitner §58

3.2 Warunek konieczny: płaski szczyt

Jeśli funkcja różniczkowalna ma w punkcie wewnętrznym x_0 maksimum albo minimum lokalne, to $f'(x_0) = 0$ (twierdzenie Fermata). Na szczycie góry przez chwilę idzie się poziomo. Twierdzenie odwrotne jest fałszywe: x^3 ma w zerze poziomą styczną, a ekstremum nie ma.

Leitner tw. 56.2 · GS 6.1.7

Feynman podaje głębsze sformułowanie tej samej myśli. Promień światła wybiera drogę, dla której mała zmiana drogi nie zmienia czasu przejścia *w pierwszym rzędzie*, a jedynie w drugim. To właśnie znaczy $f'(x_0) = 0$: w rozwinięciu Taylora brakuje wyrazu liniowego. FLP I-26-5

WARUNKI WYSTARCZAJĄCE EKSTREMUM

(I) Jeśli f jest ciągła w x_0 , a f' zmienia znak w x_0 z $+$ na $-$, to w x_0 jest maksimum; z $-$ na $+$ minimum.

(II) Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to maksimum; jeśli $f''(x_0) > 0$, to minimum. Gdy $f''(x_0) = 0$, test nie rozstrzyga. Leitner tw. 58.7, 62.1 · GS 6.1.10, 6.1.13

Uzasadnienie (II) to znowu wzór Taylora: przy $f'(x_0) = 0$ mamy $f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$, a znak tego wyrazu jest taki sam po obu stronach x_0 .

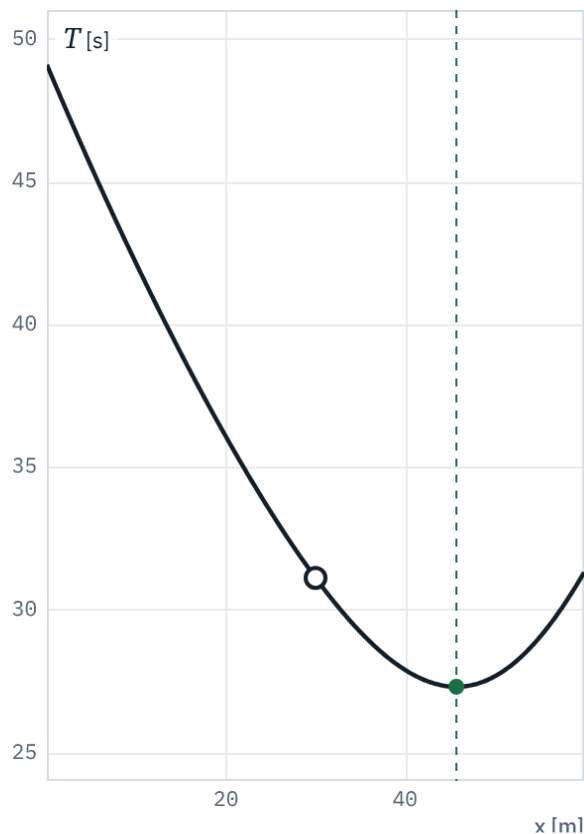
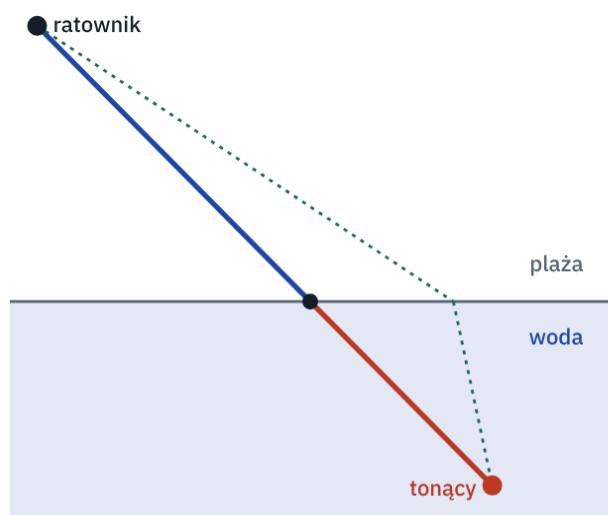
3.3 Największa wartość na przedziale

Maksimum lokalne to nie to samo co wartość największa. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym osiąga wartość największą i najmniejszą, ale mogą one leżeć na **końcach**, gdzie pochodna wcale nie musi się zerować. Przepis jest więc taki: (1) zapisz optymalizowaną wielkość jako funkcję jednej zmiennej, (2) znajdź punkty z $f' = 0$ oraz punkty, w których f' nie istnieje, (3) porównaj wartości w tych punktach i na końcach przedziału. Leitner §56

SYMULACJA 3

Ratownik Feynmana. Ratownik biegnie po plaży i płynie do tonącego.

Przesuwaj punkt wejścia do wody i obserwuj czas $T(x)$ na wykresie. W minimum styczna do $T(x)$ jest pozioma i zachodzi prawo Snella: $\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$. Zmień stosunek prędkości: im wolniej się płynie, tym dalej wzdłuż brzegu opłaca się biec.



— bieg (plaża) — pływanie (woda) — $T(x)$ — minimum

$T(x)$ 31,11 s

$T'(x)$ -0,424 s/m

$\sin \theta_1 / v_1$ 0,1414

$\sin \theta_2 / v_2$ 0,5657

minimum $x = 45,7$ m, $T = 27,30$ s

Stan na rysunku: $v_1/v_2 = 4,00$, $x = 30,0$ m, $T = 31,11$ s; minimum dla $x = 45,7$ m ($T = 27,30$ s).

Przykład 3.1

Ratownik, czyli prawo Snella

Ratownik stoi 30 m od brzegu. Tonący jest 20 m od brzegu w wodzie, 50 m dalej wzdłuż linii brzegu. Ratownik biegnie z prędkością $v_1 = 5$ m/s, a pływie z $v_2 = 1,25$ m/s. W którym miejscu powinien wejść do wody? (Ten sam problem Feynman stawia przy zasadzie Fermata.)

- 1 Niech x to odległość punktu wejścia od miejsca naprzeciw ratownika: $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 30^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(50 - x)^2 + 20^2}}{v_2}$.
- 2 $T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + 900}} - \frac{50 - x}{v_2 \sqrt{(50 - x)^2 + 400}} = 0$. Ułamki to $\sin \theta_1$ i $\sin \theta_2$ (kąty od normalnej do brzegu), więc $\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$.
- 3 Numerycznie: $x \approx 45,7$ m, $T \approx 27,3$ s. Dla porównania: po linii prostej do tonącego (wejście do wody przy $x = 30$ m) 31,1 s, wejście dokładnie naprzeciw tonącego ($x = 50$ m) 27,7 s.

Wynik: wejść do wody ok. 45,7 m wzdłuż brzegu; czas 27,3 s.

Sprawdzenie: $\sin \theta_1 / v_1 = \sin \theta_2 / v_2 \approx 0,167$ s/m ✓. $T''(x) > 0$, bo suma odległości jest funkcją wypukłą, więc to minimum ✓. Światło robi to samo na granicy powietrza i wody (FLP I-26-3).

Przykład 3.2

Najmocniejsza belka z okrągłego pnia

Wytrzymałość na zginanie belki o przekroju prostokątnym jest proporcjonalna do bh^2 (b to szerokość, h wysokość). Jakie wymiary powinna mieć najmocniejsza belka wycięta z pnia o średnicy d ?

- 1 Przekątna prostokąta to średnica pnia: $b^2 + h^2 = d^2$, więc $W(b) = b(d^2 - b^2)$ dla $0 < b < d$.
- 2 $W'(b) = d^2 - 3b^2 = 0$, więc $b = d/\sqrt{3}$, a $h = d\sqrt{2/3}$.
- 3 $W''(b) = -6b < 0$: maksimum. Na końcach przedziału $W = 0$, więc to wartość największa.

Wynik: $b = d/\sqrt{3} \approx 0,577d$, $h \approx 0,816d$, czyli $h : b = \sqrt{2} : 1$.

Sprawdzenie: belka jest wyższa niż szersza, zgodnie z intuicją budowlańców: wysokość wchodzi do wzoru w kwadracie ✓. Proporcję $\sqrt{2} : 1$ ma też arkusz papieru A4.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = x e^{-x}$. Jaka jest jej wartość największa i najmniejsza na przedziale $[0; 3]$? 
- 2 Pociąg przejechał 150 km w 2 godziny. Wyjaśnij twierdzeniem Lagrange'a, dlaczego w pewnej chwili jechał dokładnie 75 km/h. Jakie założenie o ruchu jest tu potrzebne? 
- 3 Z kwadratowego arkusza blachy 30×30 cm wycinamy w rogach kwadraty o boku x i zaginamy boki, tworząc otwarte pudełko. Dla jakiego x objętość jest największa? 
- 4 Dla $f(x) = x^4$ i $g(x) = x^3$ w zerze $f' = f'' = 0$ oraz $g' = g'' = 0$, więc test (II) nie rozstrzyga. Co jest w zerze w każdym przypadku? Jak to rozstrzyga pierwsza niezerowa pochodna? 
- 5 Światło biegnie z punktu $A = (0, a)$ do lustra leżącego na osi x i odbija się do punktu $B = (d, b)$, gdzie $a, b > 0$. Wykaż, minimalizując długość drogi, że punkt odbicia leży w $x = \frac{ad}{a+b}$ i że kąt padania jest równy kątowi odbicia. 

4 Pochodne cząstkowe i gradient

4.1 Różniczkujemy po jednej zmiennej naraz

Temperatura w pokoju, ciśnienie w atmosferze, energia potencjalna w polu grawitacyjnym zależą od kilku zmiennych. **Pochodna cząstkowa** $\frac{\partial f}{\partial x}$ to zwykła pochodna po x , gdy pozostałe zmienne traktujemy jak stałe. Dla $f = x^2y + e^{xy}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y e^{xy}$. (Leitner §67)

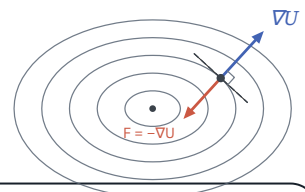
Feynman wyjaśnia, dlaczego zamiast d piszemy ∂ . Ma to być ostrzeżenie, że pozostałe zmienne trzymamy stałe. Dodaje półżartem, że ∂ powinno być w użyciu od początku rachunku, bo d zawsze chcemy skracać, a ∂ nigdy. (FLP I-14-5)

Pochodne mieszane nie zależą od kolejności, o ile są ciągłe: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (twierdzenie Schwarz'a). (Leitner tw. 67.1)

4.2 Gradient

Pochodne cząstkowe układamy w wektor, **gradient**:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$



WŁASNOŚCI GRADIENTU

Zmiana f przy przesunięciu o mały wektor $d\vec{r}$ to $df = \nabla f \cdot d\vec{r}$. Stąd:

- **pochodna kierunkowa** w kierunku wektora $\hat{u}$ to $\nabla f \cdot \hat{u}$;
- gradient wskazuje kierunek **najszybszego wzrostu** f , a jego długość to tempo tego wzrostu;
- gradient jest **prostopadły do poziomicy**, bo wzdłuż poziomicy $df = 0$.

(Leitner §72, §77, tw. 72.2)

gradient $\perp$ poziomica

Wszystkie trzy wynikają z iloczynu skalarnego (1.1 Wektory): $\nabla f \cdot \hat{u} = |\nabla f| \cos \varphi$ jest największe dla $\varphi = 0$ i zerowe dla $\varphi = 90^\circ$.

4.3 Siła z energii potencjalnej

W polu sił zachowawczych siła to minus gradient energii potencjalnej. Feynman wyprowadza to składowa po składowej: $F_x = -\partial U / \partial x$ i tak dalej. Potem wspomina „wspaniały nowy symbol” ∇ , wymyślony przez matematyków. Używa go, bo nie chce za każdym razem pisać trzech równań:

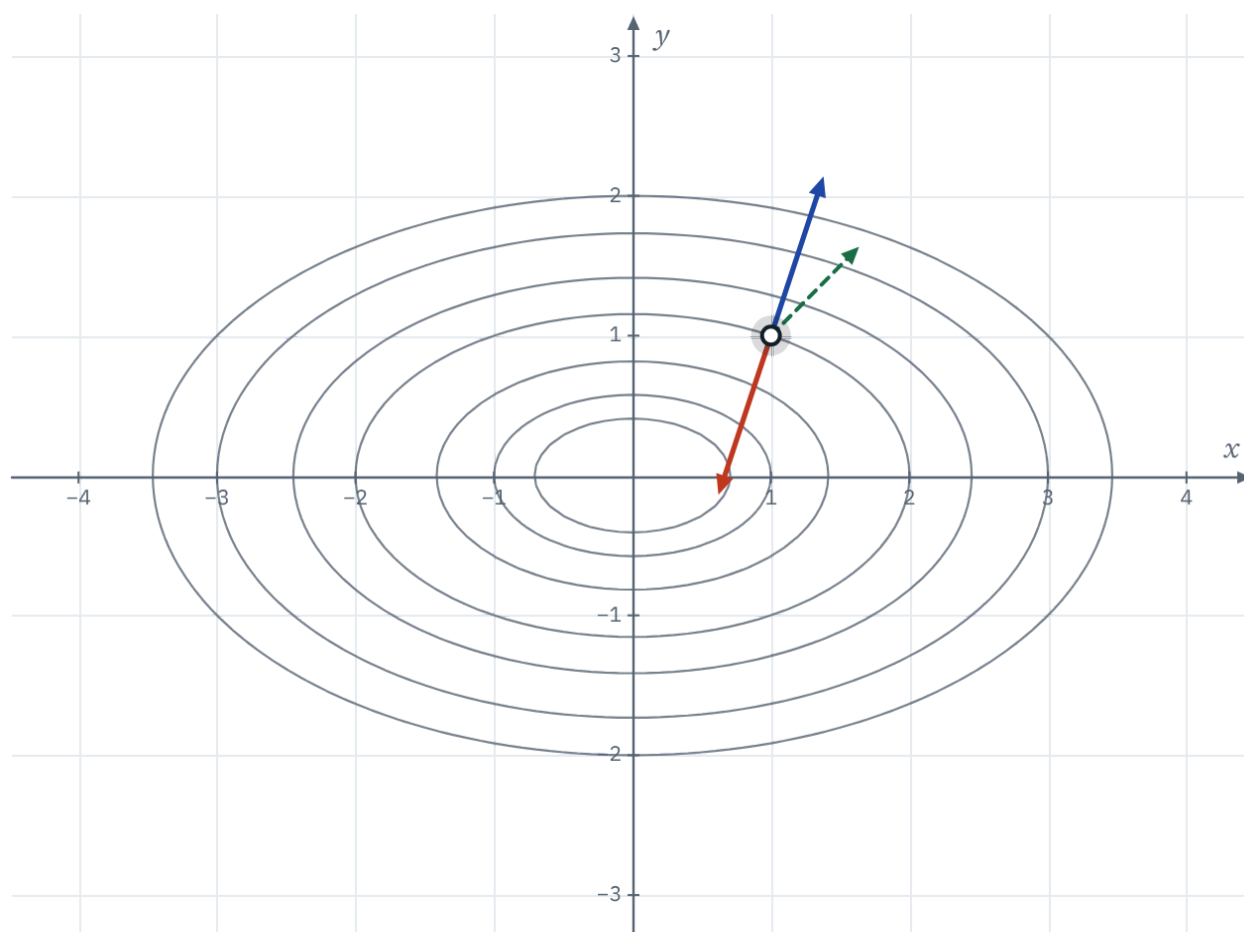
FLP I-14-5

$$\vec{F} = -\nabla U.$$

Siła pcha więc ciało w stronę najszybszego spadku energii i zawsze prostopadle do powierzchni stałej energii. Dla $U = mgz$ wychodzi $\vec{F} = [0, 0, -mg]$, a dla sprężyny $U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ wychodzi $\vec{F} = -k[x, y]$.

SYMULACJA 4

Mapa poziomicy i gradient. Przeciągnij punkt po mapie. Niebieska strzałka to gradient, prostopadły do poziomicy, a czerwona to siła $-\nabla U$. Obracaj kierunek $\hat{u}$ i obserwuj pochodną kierunkową $\nabla U \cdot \hat{u}$. Jest największa wzdłuż gradientu i zerowa wzdłuż poziomicy.



— poziomice U ∇U $F = -\nabla U$ kierunek $\hat{u}$

punkt (1,0; 1,0)

U 4,00

∇U [2,00; 6,00]

$|\nabla U|$ 6,32

$\nabla U \cdot \hat{u}$ 5,66

kąt(∇U , $\hat{u}$) 27°

Stan na rysunku: $U = x^2 + 3y^2$, punkt (1,0; 1,0), $\nabla U = [2,00; 6,00]$, kierunek $\hat{u} = 45^\circ$, $\nabla U \cdot \hat{u} = 5,66$.

Przykład 4.1

Gdzie najszybciej się ogrzać

Temperatura płyty to $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$ ($^{\circ}\text{C}$, metry). W którą stronę i jak szybko rośnie temperatura w punkcie $(3, 1)$? Ile wynosi pochodna kierunkowa w kierunku $[1, 1]$?

- 1 $\nabla T = [-2x, -4y]$, w punkcie $(3, 1)$: $\nabla T = [-6, -4]$ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$.
- 2 Najszybszy wzrost w kierunku $[-6, -4]$, mniej więcej w stronę najcieplejszego punktu $(0, 0)$, ale nie dokładnie, bo poziomice są elipsami, w tempie $|\nabla T| = \sqrt{52} \approx 7,2$ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$.
- 3 Wersor $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1]$: $\nabla T \cdot \hat{u} = \frac{-6 - 4}{\sqrt{2}} \approx -7,07$ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$. W tym kierunku temperatura spada.

Wynik: najszybszy wzrost w kierunku $[-3, -2]$, $7,2$ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$; w kierunku $[1, 1]$ spadek $7,07$ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$.

Sprawdzenie: $|\nabla T \cdot \hat{u}| \leq |\nabla T|$: $7,07 < 7,21$ ✓. Kierunek $[1, 1]$ jest prawie przeciwny do gradientu, więc spadek jest bliski maksymalnemu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji $f = x^3y^2 - 4xy + y$. Sprawdź, że pochodne mieszane są równe.
- 2 Wyznacz gradient $f = x^2 + y^2$ w punkcie $(1, 2)$. Narysuj poziomice przez ten punkt i sprawdź, że gradient jest do niej prostopadły.
- 3 Wyznacz siłę $\vec{F} = -\nabla U$ dla (a) $U = mgz$, (b) $U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$, (c) $U = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$ z $k_x \neq k_y$. W którym przypadku siła nie celuje w początek układu?
- 4 Wysokość terenu to $h(x, y) = 200 - 0,002x^2 - 0,001y^2$ (metry). Jak stromy jest stok w punkcie $(100, 200)$? Podaj kąt nachylenia. W którą stronę spłynie woda?
- 5 Wykres funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ to paraboloida. Napisz równanie płaszczyzny stycznej w punkcie nad $(1, 2)$, korzystając z różniczki zupełnej $f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + f_x dx + f_y dy$. Oszacuj nią $f(1,1; 1,9)$ i porównaj z wartością dokładną.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Różniczka zupełna i niepewności

5.1 Różniczka funkcji wielu zmiennych

Gdy wszystkie zmienne zmieniają się naraz, w pierwszym przybliżeniu zmiany od każdej z nich się sumują. To **różniczka zupełna**: Leitner §68, §74

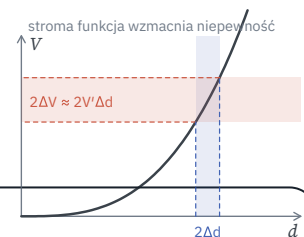
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

To ta sama „prosta z bliska” co w części 1, tylko w wielu wymiarach: wykres funkcji dwóch zmiennych z bliska wygląda jak płaszczyzna styczna.

5.2 Przenoszenie niepewności

Jeśli x, y, z zmierzono z niepewnościami $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, to różniczka mówi, jak duża jest niepewność wyniku $f(x, y, z)$. Są dwa przepisy:

GS 4.4.5 · Leitner przykł. 55.3, 68.1



🔧 NIEPEWNOŚĆ WIELKOŚCI ZŁOŻONEJ

$$\Delta f_{\max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots, \quad \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \dots}$$

Pierwszy wzór to oszacowanie najgorszego przypadku, gdy wszystkie błędy działają w tę samą stronę. Drugi, suma kwadratów, to standard w laboratorium, gdy błędy są niezależne i losowe, bo częściowo się znoszą. Dla iloczynu potęg $f = C x^a y^b$

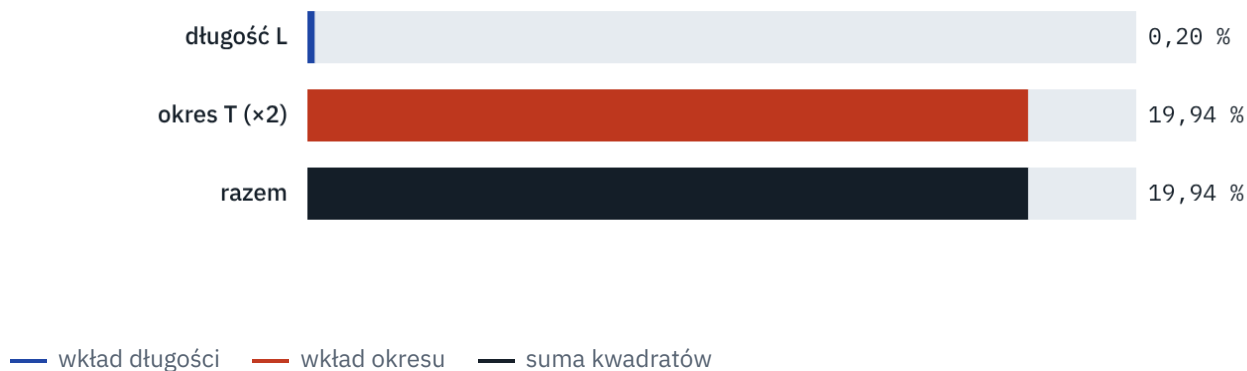
wygodniej liczyć niepewności względne: $\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \left(b \frac{\Delta y}{y} \right)^2}.$

Wzór z sumą kwadratów stosuje się do niepewności standardowych $u(x)$. Niepewność graniczną przyrządu Δx (na przykład działkę suwmiarki) zamienia się najpierw na $u(x) = \Delta x / \sqrt{3}$. W zadaniach tej lekcji podajemy oszacowanie maksymalne.

Wniosek praktyczny: wielkość w wysokiej potędze „wzmacnia” swoją niepewność, więc trzeba ją mierzyć najstaranniej. Niepewność wyniku podajemy z jedną albo dwiema cyframi znaczącymi, a wynik zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego.

SYMULACJA 5

Skąd bierze się niepewność g . Wahadło: $g = 4\pi^2 L/T^2$. Zmieniaj niepewności długości i okresu oraz liczbę mierzonych wahań. Paski pokazują wkład każdego pomiaru. Okres wchodzi w kwadracie, więc zwykle dominuje, dopóki nie zmierzysz czasu wielu wahań naraz.



g 9,811 m/s²

Δg (suma kwadratów) 1,956 m/s²

Δg maks. 1,976 m/s²

udział okresu w Δg^2 100 %

Stan na rysunku: $\Delta L = 2,0$ mm, $\Delta t = 0,20$ s, $N = 1$; $g = 9,811 \pm 1,956$ m/s².

Przykład 5.1**Gęstość kulki**

Kulka ma masę $m = (100,0 \pm 0,1)$ g i średnicę $d = (2,90 \pm 0,01)$ cm. Oblicz jej gęstość z niepewnością. Z jakiego materiału może być?

- $\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{6}d^3} = \frac{6 \cdot 100,0}{\pi \cdot 2,90^3} \approx 7,83$ g/cm³.
- $\rho \propto m^1 d^{-3}$. Niepewności względne: $\frac{0,1}{100} = 0,10\%$ i $3 \cdot \frac{0,01}{2,90} = 1,03\%$.
- Suma kwadratów: $\sqrt{0,10^2 + 1,03^2} \% \approx 1,04\%$, czyli $\Delta \rho \approx 0,08$ g/cm³. Oszacowanie maksymalne: 1,13%, czyli 0,09 g/cm³.

Wynik: $\rho = (7,83 \pm 0,08)$ g/cm³; pasuje do stali (ok. 7,85 g/cm³).

Sprawdzenie: niepewność prawie w całości pochodzi ze średnicy, bo wchodzi do wzoru w trzeciej potęgze. Waga jest dziesięć razy dokładniejsza, niż potrzeba ✓

Przykład 5.2

Pułapka różnicy

Grubość płytki wyznaczamy jako różnicę dwóch odczytów suwmiarki: $L_1 = (105,3 \pm 0,1) \text{ mm}$ i $L_2 = (104,8 \pm 0,1) \text{ mm}$. Jaka jest grubość i jej niepewność względna?

- 1 $d = L_1 - L_2 = 0,5 \text{ mm}$. Pochodne cząstkowe to ± 1 .
- 2 $\Delta d = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} \approx 0,14 \text{ mm}$, czyli 28% (oszacowanie maksymalne 0,2 mm, 40%).

Wynik: $d = (0,50 \pm 0,14) \text{ mm}$: niepewność ok. 30%, choć każdy odczyt miał niepewność 0,1%.

Sprawdzenie: niepewności bezwzględne nie maleją przy odejmowaniu (dodają się kwadratowo), a sama różnica jest mała. Wniosek: małych wielkości nie mierzy się jako różnicy dużych. Grubość lepiej zmierzyć bezpośrednio śrubą mikrometryczną ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Prostokąt ma boki $a = (20,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ i $b = (10,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. Oblicz pole z niepewnością obiema metodami.
- 2 Ciśnienie wyznaczamy jako $p = \frac{F}{\pi d^2/4}$. Siłę zmierzono z niepewnością względną 0,5%, a średnicę tłoka 1%. Jaka jest niepewność względna ciśnienia (suma kwadratów)?
- 3 Prędkość dźwięku mierzymy echem: $v = 2L/t$, gdzie $L = (170,0 \pm 0,5) \text{ m}$, $t = (1,00 \pm 0,02) \text{ s}$. Oblicz v z niepewnością. Co trzeba poprawić, żeby wynik był dokładniejszy?
- 4 Współczynnik załamania $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ wyznaczono z kątów $\alpha = 40^\circ \pm 1^\circ$, $\beta = 25^\circ \pm 1^\circ$. Oblicz n i jego niepewność maksymalną.
- 5 W wahadle $g = 4\pi^2 L/T^2$. Długość mierzymy z niepewnością względną ε_L . Z jaką niepewnością względną trzeba zmierzyć okres, żeby oba pomiary wносиły tyle samo? Okres (czas jednego pełnego wachnięcia) wynosi ok. 2 s i mierzymy go stoperem z niepewnością 0,2 s (czas reakcji). Ile wachnięć trzeba zmierzyć naraz, żeby $\varepsilon_T = 0,1\%$?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

× „Przybliżenie liniowe działa, gdy zmiana jest mała.”

Mała w porównaniu z czym? Liczy się dx w porównaniu ze skalą, na której funkcja odchyła się od stycznej. Dla $\sin x$ przy zerze następny wyraz to $x^3/6$, więc $\sin x \approx x$ wymaga $x^2 \ll 6$: działa dla $x = 0,1$ rad, ale nie dla $x = 5$.

× „ $f'(x_0) = 0$, więc w x_0 jest ekstremum.”

To tylko warunek konieczny. x^3 ma w zerze poziomą styczną i nie ma ekstremum (część 3.2).

× „Wartość największa jest tam, gdzie $f' = 0$.”

Może leżeć na końcu przedziału, gdzie pochodna nie znika. Zawsze porównuj z wartościami na końcach (część 3.3).

× „Szereg Taylora zawsze zbiega do funkcji, wystarczy wziąć dość wyrazów.”

$\ln(1+x)$ i $(1+x)^{-1/2}$ rozwinięte wokół zera nie zbiegają dla $x > 1$, choćby wziąć dowolnie wiele wyrazów (symulacja 2). Rozwinięcie ma promień zbieżności.

× „Siła z potencjału zawsze celuje w minimum.”

Siła jest prostopadła do poziomicy. Gdy poziomice są elipsami, a nie okręgami, siła nie celuje w środek (zadanie 3 w części 4).

× „Niepewności zawsze się sumuje.”

Suma wartości bezwzględnych to oszacowanie najgorszego przypadku. Dla niezależnych błędów losowych standardem jest suma kwadratów, która daje mniej (część 5.2).

× „Każdy pomiar trzeba robić tak samo dokładnie.”

Wysiłek opłaca się tam, gdzie wkład do niepewności jest największy: przy wielkościach w wysokich potęgach i przy małych różnicach dużych liczb (przykłady 5.1 i 5.2).

Sprawdź się

- 1 Bok kwadratu rośnie o 1%. O ile procent rośnie pole?

O ok. 2%, bo pole to bok do kwadratu. Dokładnie $1,01^2 = 1,0201$.

- 2 Ile wynosi $\sin 0,01$ z dokładnością do siedmiu miejsc po przecinku, bez kalkulatora?

$$0,01 - \frac{10^{-6}}{6} \approx 0,00999998.$$

- 3 Dlaczego małe drgania wokół każdego minimum energii są harmoniczne?

Bo w minimum $U' = 0$, więc pierwszy niezerowy wyraz Taylora jest kwadratowy, $\frac{1}{2}U''x^2$ (gdy $U'' \neq 0$), a to energia sprężyny.

- 4 Funkcja ma w punkcie $f' = 0$ i $f'' > 0$. Co tam jest?

Minimum lokalne właściwe: wykres jest wypukły jak dno miski.

- 5 Stoisz na zboczu. W którą stronę iść, żeby wysokość się nie zmieniała?

Prostopadle do gradientu, czyli wzdłuż poziomicy.

- 6 Masę zmierzono z niepewnością 1%, a prędkość z niepewnością 1%. Jaka jest niepewność energii kinetycznej (suma kwadratów)?

$$\sqrt{1^2 + 2^2} \% \approx 2,2\%.$$

- 7 Czy funkcja ciągła na przedziale otwartym $(0; 1)$ musi mieć wartość największą?

Nie. $f(x) = x$ na $(0; 1)$ dąży do 1, ale jej nie osiąga. Gwarancja istnieje tylko dla przedziału domkniętego.

JEDNA ZMIENNA

$$df = f'(x) dx, \quad f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$\frac{df}{f} = n \frac{dx}{x} \text{ dla } f = x^n; \quad (1+x)^a \approx 1 + ax$$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k < n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad \sin x \approx x -$$

$$\frac{1}{6}x^3, \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{Lagrange: } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ekstremum: $f' = 0$; $f'' < 0$ maks., $f'' > 0$ min.; sprawdź końce

WIELE ZMIENNYCH

$$\nabla f = [f_x, f_y, f_z], \quad df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

pochodna kierunkowa: $\nabla f \cdot \hat{u}$; $\nabla f \perp$ poziomice

$$\vec{F} = -\nabla U; \quad U(r) \Rightarrow \vec{F} = -U'(r) \hat{r}$$

$$U \approx U_0 + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2, \quad k = U''(x_0)$$

$$\Delta f_{\max} = \sum |f_{x_i}| \Delta x_i$$

$$\Delta f = \sqrt{\sum (f_{x_i} \Delta x_i)^2}$$

$$f = Cx^a y^b: \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 26-3...26-5 (zasada Fermata: ratownik, minimum i „brak zmiany pierwszego rzędu”), 14-5 (potencjał, pochodne cząstkowe, gradient).
- **Dla chętnych:** koniec 15-8 i 15-9 (rozwiązanie masy relatywistycznej i $E = mc^2$).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **R. Leitner**, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych*, cz. I: §55 (przyrosty i różniczki), §56–58 (ekstrema, twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a, monotoniczność), §61–65 (wzór i szereg Taylora), §67–68 (pochodne cząstkowe, różniczka zupełna), §72 i §77 (pochodna kierunkowa, gradient).
- **M. Gewert, Z. Skoczylas**, *Analiza matematyczna 1*: 4.4 (różniczka, szacowanie błędów), 5.1 (twierdzenia o wartości średniej), 5.3 (wzór Taylora), rozdz. 6 (ekstrema, wypukłość). Funkcje wielu zmiennych są w części 2 skryptu.

Następna lekcja to całki (1.5 Całki). Przybliżenie liniowe wróci w pełni w równaniach różniczkowych (4.1 Równania różniczkowe zwyczajne), opartych na podręczniku Boyce'a i DiPrimy. Prawa fizyki prawie zawsze mówią, jak szybko coś się zmienia, a nie ile wynosi. Zobaczmy, jak z takiej informacji odtworzyć cały ruch.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $x_0 = 16$, $dx = -0,04$: $4 - \frac{0,04}{8} = 3,995$. Dokładnie 3,994997 (różnica $3 \cdot 10^{-6}$).
2. $(\arctan)'(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,05 \approx 0,8104$. Dokładnie 0,8098.
3. $a = 2$ cm, $dV = 3a^2 da$, więc $da = \frac{-0,3}{12} = -0,025$ cm.
4. $\Delta l = \alpha l \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 40 = 0,012$ m, czyli 12 mm. Objętość $\propto a^3$, więc $\frac{\Delta V}{V} \approx 3\alpha \Delta T = 0,144\%$.
5. $f'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f''(9) = -\frac{1}{108}$, więc $r \approx -\frac{1}{216}(dx)^2 = -3,75 \cdot 10^{-5}$. Prawdziwy błąd: $3,0149627 - 3,015 = -3,73 \cdot 10^{-5} \checkmark$.

Zadania • część 2

1. $1 - 0,02 + \frac{0,0016}{24} = 0,9800667$. Dokładnie 0,98006658; błąd ok. $9 \cdot 10^{-8}$, więc sześć cyfr po przecinku jest poprawnych.
2. $1 + \frac{0,1}{2} - \frac{0,01}{8} = 1,04875$. Błąd $6 \cdot 10^{-5}$ zamiast $1,2 \cdot 10^{-3}$, czyli ok. 20 razy mniejszy.
3. Dwa wyrazy: $0,2 - 0,02 = 0,18$, błąd $2,3 \cdot 10^{-3}$. Trzy: $0,18 + \frac{0,008}{3} = 0,18267$, błąd $3,5 \cdot 10^{-4}$. Wystarczą trzy. W szeregu naprzemiennym o malejących wyrazach błąd jest mniejszy od pierwszego pominiętego wyrazu: $\frac{0,2^4}{4} = 4 \cdot 10^{-4}$.
4. $E_k = mc^2 (\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4) = \frac{1}{2}mv^2 (1 + \frac{3}{4}\beta^2)$. $\frac{3}{4}\beta^2 = 0,01$, $\beta \approx 0,115$, $v \approx 3,5 \cdot 10^4$ km/s. Dokładny rachunek daje przy tej prędkości 1,01%.
5. $U' = U_0 (-2ae^{-2a(x-x_0)} + 2ae^{-a(x-x_0)}) = 0$ dla $x = x_0$. $U'' = U_0 (4a^2e^{-2a(x-x_0)} - 2a^2e^{-a(x-x_0)})$, w x_0 : $k = 2a^2U_0$. Minimum, bo $k > 0$.

Zadania • część 3

1. $f' = (1-x)e^{-x} = 0$ dla $x = 1$; f' zmienia znak z + na -, więc maksimum $f(1) = 1/e \approx 0,368$. Na $[0; 3]$: największa $1/e$, najmniejsza $f(0) = 0$, na końcu przedziału.
2. $x(t)$ jest ciągła i różniczkowalna, więc istnieje c , dla którego $v(c) = \frac{x(2) - x(0)}{2} = 75$ km/h. Potrzebna jest różniczkowalność położenia, czyli istnienie prędkości w każdej chwili. Dla prawdziwego pociągu jest to spełnione.
3. $V = x(30 - 2x)^2$, $V' = (30 - 2x)(30 - 6x) = 0$: $x = 5$ cm (drugi pierwiastek $x = 15$ daje $V = 0$). $V_{\max} = 5 \cdot 20^2 = 2000$ cm³.
4. x^4 ma minimum (pierwsza niezerowa pochodna $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, rzędu parzystego). x^3 nie ma ekstremum, tylko punkt przegięcia (pierwsza niezerowa $g'''(0) = 6$, rzędu nieparzystego). Ogólnie: ekstremum jest wtedy, gdy rząd pierwszej niezerowej pochodnej jest parzysty (Leitner tw. 64.1).

5. $L(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$, $L' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0$, czyli $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$, więc kąty są równe. Wtedy $\frac{x}{a} = \frac{d-x}{b}$, czyli $x = \frac{ad}{a+b}$. Feynman dochodzi do tego samego geometrycznie, przez odbicie punktu B w lustrze (FLP I-26-3).

Zadania • część 4

1. $f_x = 3x^2y^2 - 4y$, $f_y = 2x^3y - 4x + 1$, $f_{xx} = 6xy^2$, $f_{yy} = 2x^3$, $f_{xy} = f_{yx} = 6x^2y - 4$.
2. $\nabla f = [2, 4]$, długość $\sqrt{20}$. Poziomica to okrąg $x^2 + y^2 = 5$, a gradient jest równoległy do promienia $[1, 2]$, więc prostopadły do okręgu $\checkmark$.
3. (a) $[0, 0, -mg]$; (b) $-k\vec{r}$, do środka; (c) $[-k_x x, -k_y y]$. W (c) siła nie jest równoległa do $\vec{r}$, z wyjątkiem punktów na osiach, bo poziomice są elipsami, a nie okręgami.
4. $\nabla h = [-0,004x, -0,002y] = [-0,4, -0,4]$, $|\nabla h| \approx 0,566$, kąt $\arctan 0,566 \approx 29,5^\circ$. Woda płynie w kierunku $-\nabla h = [0,4, 0,4]$, czyli od szczytu, wzdłuż kierunku $[1, 1]$.
5. $f(1, 2) = 5$, $f_x = 2$, $f_y = 4$: płaszczyzna $z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$. $f(1,1; 1,9) \approx 5 + 0,2 - 0,4 = 4,8$; dokładnie $1,21 + 3,61 = 4,82$. Różnica $0,02 = (dx)^2 + (dy)^2$, czyli dokładnie wyrazy drugiego rzędu.

Zadania • część 5

1. $P = 200 \text{ cm}^2$. Maksymalnie: $b \Delta a + a \Delta b = 1 + 2 = 3 \text{ cm}^2$. Suma kwadratów: $\sqrt{1+4} \approx 2,2 \text{ cm}^2$.
2. $\sqrt{0,5^2 + (2 \cdot 1)^2} \% \approx 2,1\%$. Dominuje średnica, bo wchodzi w kwadracie.
3. $v = 340 \text{ m/s}$. Względnie: $0,29\%$ i 2% ; suma kwadratów $2,02\%$, czyli $\pm 7 \text{ m/s}$ (maksymalnie ± 8). Trzeba poprawić pomiar czasu, na przykład większą odległością albo elektronicznym pomiarem.
4. $n \approx 1,52$. $\frac{\Delta n}{n} = (1,192 + 2,145) \cdot 0,01745 \approx 5,8\%$, więc $\Delta n \approx 0,09$: $n = 1,52 \pm 0,09$.
5. Wkłady: ε_L i $2\varepsilon_T$, więc $\varepsilon_T = \frac{1}{2}\varepsilon_L$. Mierzac N wahań, niepewność czasu pozostaje $0,2 \text{ s}$, a mierzony czas to $2N \text{ s}$: $\varepsilon_T = \frac{0,2}{2N} = 0,001$ dla $N = 100$.

Matematyka • Rachunek różniczkowy w praktyce. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 14-5, 15-8...15-9, 26-3...26-5; R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych*, cz. I, §55-77; M. Gewert, Z. Skoczył, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, rozdz. 4.4, 5, 6. Cytaty w tłumaczeniu własnym.