

Pochodne

Rachunek różniczkowy powstał po to, żeby opisać ruch, a jego pierwszym zadaniem było wyjaśnić, co znaczy prędkość „w tej chwili”. Zaczynamy od zegarka biegacza, który pokazuje dwie różne prędkości naraz. Z jednego pomysłu, czyli granicy ilorazu różnicowego, wynikają tabela pochodnych, reguły różniczkowania, prędkość i przyspieszenie, pochodna wektora i tempa powiązane.

CZAS

ok. 4 h teorii + 5 h
zadań

ZADANIA

38 zadań w treści,
z
podpowiedziami i
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 8; R.
Leitner, *Zarys*
matematyki
wyższej, cz. I, §47–
51, §60; M.
Gewert, Z.
Skoczylas,
Analiza
matematyczna 1,
rozdz. 4

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dwie prędkości na zegarku
- 1 Pochodna z definicji
- 2 Pochodne funkcji elementarnych
- 3 Reguły różniczkowania
- 4 Funkcja złożona i odwrotna
- 5 Pochodne po czasie
- 6 Pochodna wektora
- 7 Tempa powiązane
- 8 Błędne intuicje
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwie prędkości na zegarku

Biegaczka przebiegła 10 km w 50 minut. Zegarek sportowy pokazuje jej dwie liczby. Pierwsza to prędkość średnia: 10 km w 50 minut, czyli 12 km/h. Druga to prędkość „bieżąca”, która na podbiegu spadła do 9 km/h, a na zbiegu wzrosła do 15 km/h. Co właściwie znaczy, że w danej chwili biegła 15 km/h, skoro w żadnej chwili nie biegła przez całą godzinę?



$v = \lim \Delta s / \Delta t$, nie s/t

Zegarek liczy prędkość bieżącą z położeń GPS: bierze drogę przebytą w ostatnich kilku sekundach i dzieli ją przez ten czas. To nadal jest prędkość średnia, tylko na bardzo krótkim odcinku czasu. Gdyby zegarek brał dziesięć sekund, potem jedną, potem jeszcze mniej, wynik zbliżałby się do pewnej wartości. Tę wartość nazwiemy prędkością chwilową. Zegarek ją tylko przybliża, a sama prędkość istnieje niezależnie od przyrządu.

Rozwiązanie wygląda tak. Sprawdzamy, ile biegaczka przebiegła w bardzo krótkim czasie, i dzielimy drogę przez ten czas. Czas bierzemy coraz krótszy i patrzymy, do jakiej wartości zbliża się iloraz. Ta wartość graniczna to pochodna. Feynman podkreśla, że rachunek różniczkowy wymyślono właśnie po to, żeby opisać ruch, i od takiego pytania (u niego zadaje je policjant kierowcy) zaczyna rozdział o ruchu. FLP I-8-2

Rachunek różniczkowy wymyślono po to, żeby opisać ruch.

R. Feynman, FLP I-8-2 (tłum. własne)

Ta lekcja to matematyczna strona tego pomysłu. Fizyczną stronę (prędkość chwilowa, przyspieszenie, ruch po okręgu) znasz z fizyki (zob. Dział 1: Ruch i jego przyczyny, §1–3). Tu zobaczysz, jak liczyć pochodne sprawnie i dlaczego reguły działają.

Pochodna z definicji

1.1 Iloraz różnicowy

Weźmy funkcję f i punkt x_0 . Zmieniamy argument o mały **przyrost** h (piszemy też Δx). Wartość funkcji zmienia się wtedy o przyrost $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Stosunek tych przyrostów to **iloraz różnicowy**: Leitner §47 · GS 4.1

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Gdy f to położenie, a argument to czas, iloraz różnicowy jest prędkością średnią w przedziale od t_0 do $t_0 + h$. Na wykresie to nachylenie **siecznej**, czyli prostej przechodzącej przez dwa punkty wykresu.

Feynman ostrzega przed jednym nawykiem. Symbol Δ nie jest liczbą, przez którą się mnoży. Δs to „mały kawałek s ”, tak samo jak $\sin \theta$ nie oznacza $s \cdot i \cdot n \cdot \theta$. Nie wolno więc skracać $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ do $\frac{s}{t}$.

FLP I-8-3

1.2 Granica: od siecznej do stycznej

Teraz zmniejszamy h . Drugi punkt siecznej zbliża się do pierwszego, a sieczna obraca się i dąży do położenia granicznego. Tę graniczną prostą nazywamy **styczną**. Granicę funkcji i jej definicję poznaliśmy w lekcji 1.2 Ciągi, granice i ciągłość.

DEFINICJA · POCHODNA W PUNKCIE

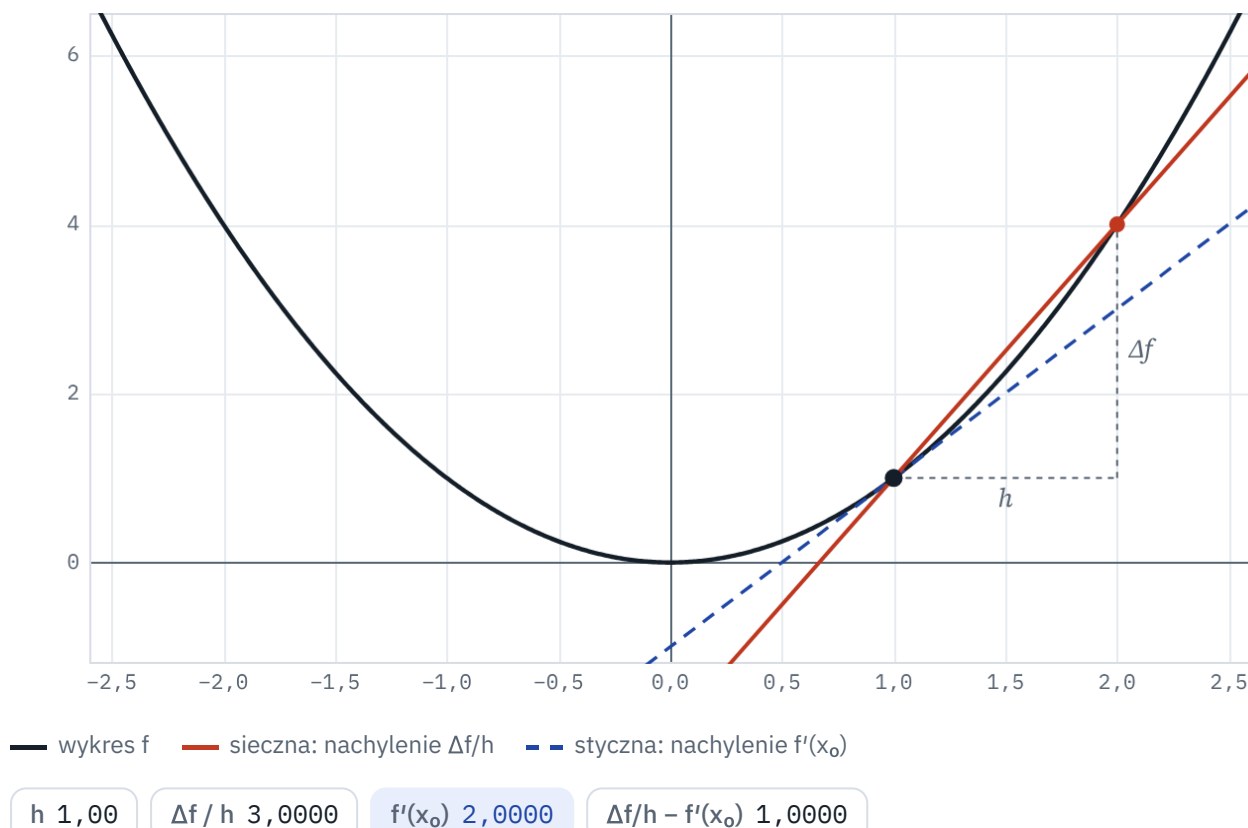
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o ile ta granica istnieje i jest skończona. Wtedy mówimy, że f jest **różniczkowalna** w x_0 . Geometrycznie $f'(x_0) = \tan \alpha$, gdzie α to kąt nachylenia stycznej do dodatniej półosi x (przy jednakowych jednostkach na osiach). Równanie stycznej w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

SYMULACJA 1

Sieczna dąży do stycznej. Wybierz funkcję, przesun punkt x_0 i zmniejszaj krok h . Iloraz różnicowy zbliża się do pochodnej. Przełącz znak kroku: dla funkcji z „ostrzem” sieczne z lewej i z prawej dążą do różnych prostych.



Stan na rysunku: $f(x) = x^2$, $x_0 = 1,00$, $h = 1,0000$, $\Delta f/h = 3,0000$, $f'(x_0) = 2,0000$.

Pochodna zależy od punktu, więc sama jest funkcją: $x \mapsto f'(x)$. Nazywamy ją **pochodną funkcji f** . Szukanie jej to **różniczkowanie**.

1.3 Trzy zapisy jednej rzeczy

- **Lagrange:** $f'(x)$, y' . Wygodny w matematyce, gdy wiadomo, po czym różniczkujemy.
- **Leibniz:** $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$. Przypomina, że to granica ilorazu przyrostów, i mówi, po jakiej zmiennej różniczkujemy. Wygląda jak ułamek, ale traktujemy go jako jeden symbol. Leitner §47
- **Newton:** $\dot{x}$, $\ddot{x}$. Kropka oznacza pochodną po czasie i tylko po czasie.

Fizycy lubią zapis Leibniza, bo pozwala mówić o przyrostach. Feynman pisze $ds = v dt$. Dla skończonego Δt wzór $\Delta s = v \Delta t$ jest tylko przybliżeniem, bo prędkość może się w tym czasie zmienić. Przybliżenie jest tym lepsze, im krótszy przedział. Symbole ds i dt nazywamy **różniczkami**. Dokładniej zajmiemy się nimi w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce.

FLP I-8-3

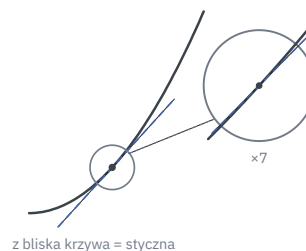
1.4 Chwyt Feynmana: wyrzucić wyższe potęgi

Policzmy pochodną $s(t) = At^3 + Bt + C$ tak jak Feynman. Zmieniamy t na $t + \Delta t$:

$$\Delta s = 3At^2 \Delta t + B \Delta t + 3At (\Delta t)^2 + A (\Delta t)^3.$$

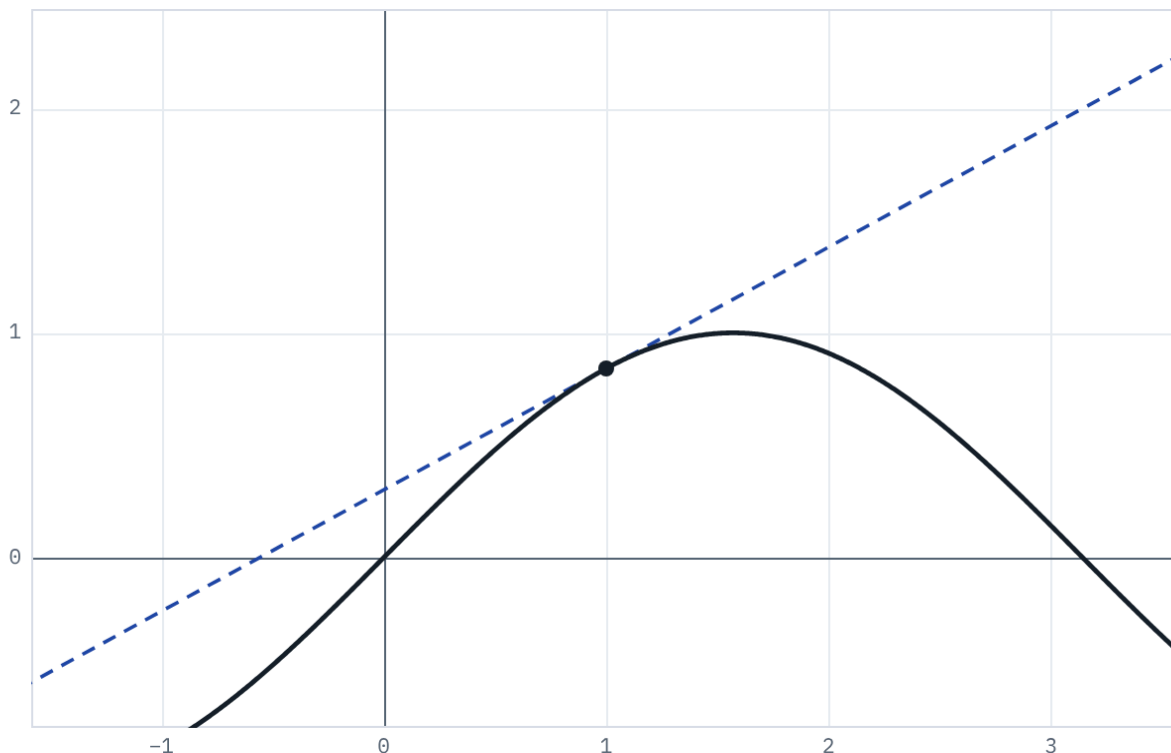
Dzielimy przez Δt i zostaje $3At^2 + B + 3At \Delta t + A (\Delta t)^2$. Przy $\Delta t \rightarrow 0$ dwa ostatnie wyrazy znikają, więc $\dot{s} = 3At^2 + B$. Feynman zauważa, że po krótkiej praktyce każdy wyraz z $(\Delta t)^2$ lub wyższą potęgą można wyrzucić od razu, bo i tak zniknie w granicy. FLP I-8-3

Ten chwyt ma ładny obraz. Gdy powiększasz wykres funkcji różniczkowalnej wokół jednego punktu, krzywa wygląda coraz bardziej jak prosta. Ta „prawie prosta” to styczna, a jej nachylenie to pochodna. Wyrazy z $(\Delta x)^2$ opisują właśnie to, o ile krzywa odchyła się od stycznej, a przy dużym powiększeniu tego odchylenia nie widać.



SYMULACJA 2

Lupa. Powiększaj wykres wokół wybranego punktu. Gładka krzywa prostuje się i zlewa ze styczną. Funkcja $|x|$ w zerze pozostaje ostrzem przy każdym powiększeniu, a $\sqrt[3]{x}$ prostuje się do prostej pionowej. W obu przypadkach pochodna (skończona) nie istnieje.



— wykres f - - - styczna

powiększenie $\times 1,0$

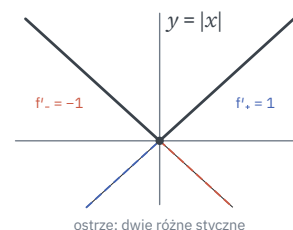
szerokość okna 5,170

odchylenie krzywej od stycznej: 83,3% wysokości okna

Stan na rysunku: $\sin x$ w $x_0 = 1$, powiększenie $\times 1$; odchylenie krzywej od stycznej: 83,3% wysokości okna.

1.5 Kiedy pochodnej nie ma

Granica w definicji pochodnej musi być taka sama, gdy $h \rightarrow 0$ z prawej i z lewej strony. Te dwie granice nazywamy **pochodnymi jednostronnymi** $f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0)$. Pochodna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie istnieją i są równe. GS 4.2



Klasyczny przykład to $f(x) = |x|$ w zerze. Iloraz różnicowy $\frac{|h|}{h}$

wynosi $+1$ dla $h > 0$ i -1 dla $h < 0$. Wykres ma tam ostrze, a styczne z lewej i z prawej mają różne nachylenia. Inny przypadek to $\sqrt[3]{x}$ w zerze. Iloraz $h^{1/3}/h = h^{-2/3}$ rośnie bez ograniczeń, styczna jest pionowa, a pochodna (skończona) nie istnieje.

🔊 TWIERDZENIE · RÓŻNICZKOWALNOŚĆ A CIĄGŁOŚĆ

Jeśli f ma pochodną w punkcie, to jest w nim ciągła. Twierdzenie odwrotne jest fałszywe: $|x|$ jest ciągła w zerze, a pochodnej tam nie ma. Leitner 50.1 · GS 4.1.15

Dowód zajmuje jedną linijkę: $\Delta f = \frac{\Delta f}{h} \cdot h \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$. W XIX wieku znaleziono nawet funkcje ciągłe na całej prostej, które w żadnym punkcie nie mają pochodnej. Jedną z pierwszych podał Bolzano, ale jej nie opublikował. Najbardziej znana jest funkcja Weierstrassa.

🔊 GDZIE TO JEST W FIZYCE

Ostrza na wykresach to zwykle znak idealizacji. Piłka odbijająca się od ściany w modelu „sprężystego odbicia w zerowym czasie” ma wykres $x(t)$ z ostrzem w chwili zderzenia. Prędkość skacze z $+v$ do $-v$, a pochodnej w tej chwili nie ma. Prawdziwa piłka odkształca się przez kilka milisekund i jej wykres jest gładki. Ostrze znika, gdy spojrzysz z wystarczająco bliska.

Przykład 1.1

Prędkość spadającej kulki, krok po kroku

Kulka spada swobodnie: $s(t) = 4,9 t^2$ (metry, sekundy). Oblicz prędkość średnią w przedziałach $[2; 2,1]$ i $[2; 2,001]$ s, a potem prędkość chwilową dla $t_0 = 2$ s. (Ten sam rachunek Feynman przeprowadza w stopach: $s = 16t^2$, $t_0 = 5$ s.)

- 1 $s(2) = 19,6$ m. Dla $h = 0,1$: $s(2,1) = 21,609$ m, więc $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,009}{0,1} = 20,09$ m/s.
- 2 Dla $h = 0,001$: $s(2,001) = 19,6196049$ m, więc $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 19,6049$ m/s.
- 3 Ogólnie: $\Delta s = 4,9 (2t_0 h + h^2)$, więc $\frac{\Delta s}{h} = 9,8 t_0 + 4,9 h$. Przy $h \rightarrow 0$ zostaje $9,8 t_0$.

Wynik: $v(t) = 9,8 t$ m/s, w chwili 2 s prędkość wynosi 19,6 m/s.

Sprawdzenie: błąd ilorazu różnicowego to dokładnie $4,9 h$: 0,49 dla $h = 0,1$ i 0,0049 dla $h = 0,001$ ✓. Prędkości średnie są większe od chwilowej, bo kulka przyspiesza.

Przykład 1.2

Styczna i normalna do wykresu pierwiastka

Wyznacz z definicji pochodną $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 4$. Napisz równanie stycznej i normalnej w punkcie $(4, 2)$. Użyj stycznej, żeby oszacować $\sqrt{4,1}$.

- 1 Mnożymy licznik i mianownik przez sumę pierwiastków: $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} \rightarrow \frac{1}{4}$.
- 2 Styczna: $y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$, czyli $y = \frac{1}{4}x + 1$.
- 3 Normalna to prosta prostopadła do stycznej w tym samym punkcie. Ma nachylenie $-1/f'(x_0) = -4$: $y = 2 - 4(x-4)$. Leitner 48.5
- 4 Szacunek: $\sqrt{4,1} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,1 = 2,025$.

Wynik: $f'(4) = \frac{1}{4}$; styczna $y = \frac{1}{4}x + 1$; normalna $y = -4x + 18$; $\sqrt{4,1} \approx 2,025$.

Sprawdzenie: kalkulator daje $\sqrt{4,1} = 2,02485$. Błąd 0,00015 jest rzędu h^2 , zgodnie z chwytem z części 1.4 ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz z definicji pochodną $f(x) = 2x^2 - 3x$ w punkcie $x_0 = 1$. Napisz równanie stycznej w tym punkcie. ■ ■ ■
- 2 Leitner podaje pomiary stygnącego ciała: w chwilach 0, 10, 20, 30 min temperatura wynosiła 100, 75, 59, 47 °C. Oszacuj tempo stygnięcia w chwili $t = 10$ min na trzy sposoby: ilorazem „do przodu” (10–20 min), „do tyłu” (0–10 min) i „symetrycznym” (0–20 min). Który szacunek jest najlepszy? ■ ■ ■
- 3 Napisz równanie stycznej do hiperboli $y = 1/x$ w punkcie o odciętej $a > 0$. Wykaż, że trójkąt odcięty przez tę styczną od pierwszej ćwiartki ma zawsze pole 2, niezależnie od a . ■ ■ ■
- 4 Zbadaj pochodne jednostronne w zerze funkcji (a) $f(x) = x|x|$, (b) $g(x) = |\sin x|$. Która z nich ma pochodną w zerze? Sprawdź odpowiedź w symulacji 2. ■ ■ ■

5

■■■

Dla $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 1$ porównaj iloraz „do przodu” $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ z ilorazem symetrycznym $\frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$. Wyznacz ich błędy względem $f'(1) = 3$ jako funkcje h i oblicz je dla $h = 0,1$. Dlaczego iloraz symetryczny jest dokładniejszy?

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ feynmanowskie

Więcej zadań: Leitner §47–50 · GS ćw. 4.1.4, 4.2.2.

2

Pochodne funkcji elementarnych

Z definicji wystarczy policzyć kilka pochodnych. Resztę dają reguły z części 3 i 4. Oto najważniejsze rachunki.

2.1 Potęgi

Dla $f(x) = x^n$ i naturalnego n rozwijamy dwumian Newtona:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n.$$

Po odjęciu x^n i podzieleniu przez h wszystkie wyrazy oprócz nx^{n-1} zawierają h i w granicy znikają. Zatem $(x^n)' = nx^{n-1}$. Wzór działa dla dowolnego wykładnika rzeczywistego r , $(x^r)' = rx^{r-1}$ dla $x > 0$. Dowód dla r ujemnych i niecałkowitych podamy w części 4. Leitner 47.6, 47.10

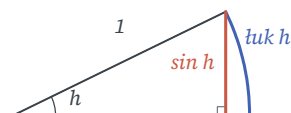
Dlatego pierwiastki i ułamki warto zapisywać jako potęgi: $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Na przykład $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, co zgadza się z przykładem 1.2.

2.2 Sinus i cosinus: dlaczego radiany

Ze wzoru na sinus sumy:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

mały kąt: $\sin h \approx h$ (radiany)



Potrzebne są dwie granice z lekcji 1.2 Ciągi, granice i ciągłość:

$\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ i $\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow 0$ (ta druga wynika z $\frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow \frac{1}{2}$). Pierwsza

mówi, że dla małego kąta łuk h i połowa cięciwy $\sin h$ są prawie równe. Dla $h = 0,1$ rad: $\frac{\sin h}{h} = 0,99833$, a $\frac{\cos h - 1}{h} = -0,04996$. Stąd

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Te wzory są prawdziwe tylko wtedy, gdy kąt mierzymy w **radianach**. Tylko wtedy łuk jednostkowego okręgu ma długość równą kątowi i $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$. Dla kąta w stopniach $(\sin x^\circ)' = \frac{\pi}{180} \cos x^\circ \approx 0,01745 \cos x^\circ$. Dlatego w fizyce i w rachunku różniczkowym kąty są zawsze w radianach. Leitner 47.12-47.13

2.3 Funkcja wykładnicza i liczba e

Dla $f(x) = a^x$ iloraz różnicowy rozkłada się na dwa czynniki:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}.$$

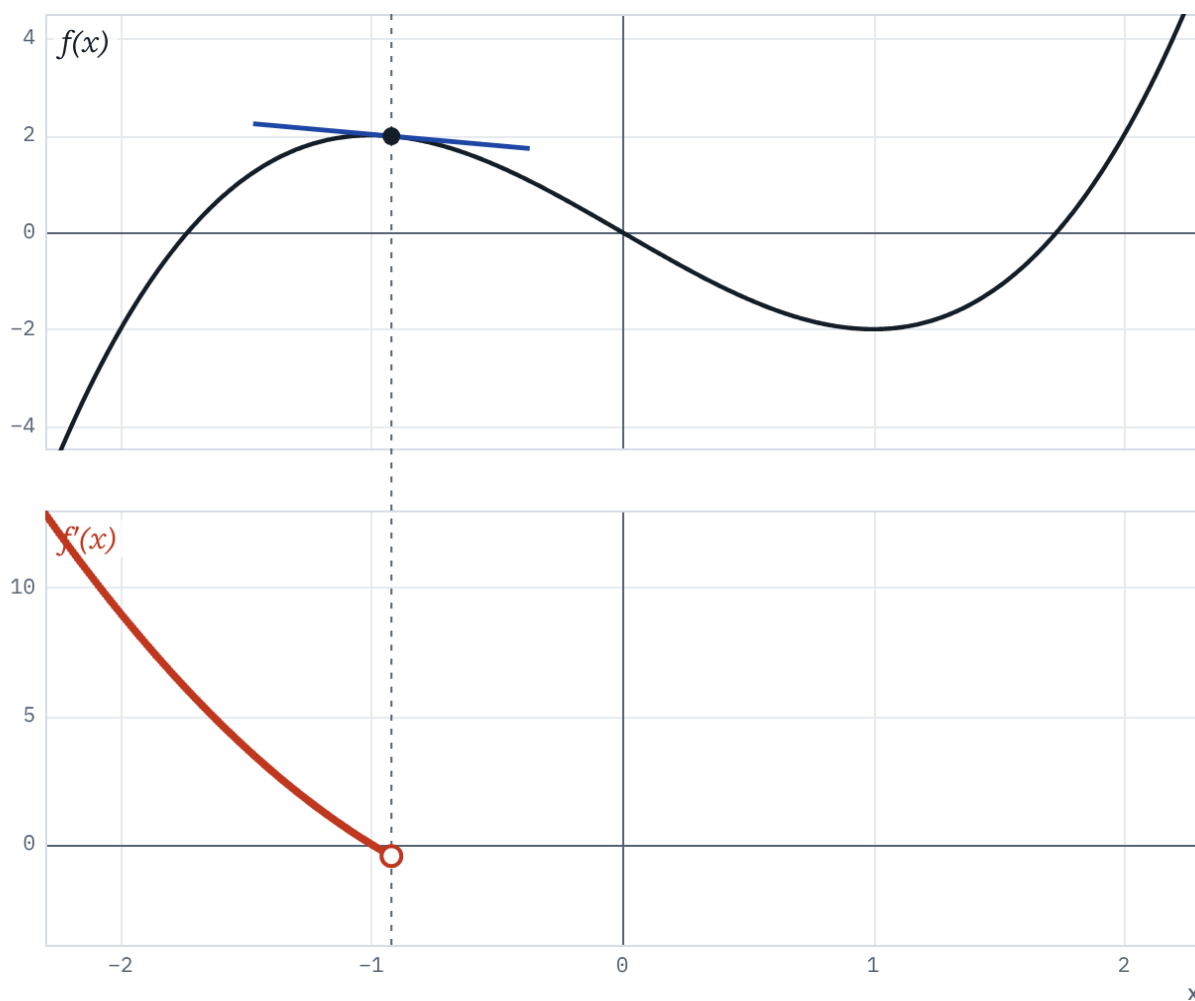
Pochodna jest więc proporcjonalna do samej funkcji. Współczynnik $C(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ zależy tylko od podstawy. Numerycznie $C(2) \approx 0,693$, a $C(3) \approx 1,099$. Istnieje dokładnie jedna podstawa, dla której $C = 1$. To liczba $e \approx 2,718$. Dla niej

$$(e^x)' = e^x.$$

Funkcja e^x jest swoją własną pochodną i właśnie dlatego pojawia się wszędzie tam, gdzie tempo zmian jest proporcjonalne do aktualnej wartości: rozpad promieniotwórczy, rozładowanie kondensatora, stygnięcie herbaty (tu chodzi o różnicę temperatur herbaty i otoczenia). Dla innych podstaw $(a^x)' = a^x \ln a$, czyli $C(a) = \ln a$ (część 4). Leitner wzory (51.9)-(51.10)

SYMULACJA 3

Wykres pochodnej rysuje się sam. Przesuwaj punkt po wykresie f (u góry). Nachylenie stycznej odkładamy jako wysokość na dolnym wykresie, który zostawia ślad. Zanim włączysz podgląd f' , zgadnij, jak wygląda pochodna.



— $f(x)$ — styczna — ślad nachyleń = $f'(x)$

x -0,92

$f(x)$ 1,981

nachylenie stycznej = $f'(x)$ -0,461

Stan na rysunku: $f(x) = x^3 - 3x$, $x = -0,92$, $f'(x) = -0,461$.

2.4 Tabela

Funkcja	Pochodna	Uwagi
c (stała)	0	stała się nie zmienia
x^r	$r x^{r-1}$	dla $x > 0$; dla całkowitego r wszędzie, gdzie x^r ma sens
$\sin x,$ $\cos x$	$\cos x, -\sin x$	kąt w radianach
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
e^x, a^x	$e^x, a^x \ln a$	$a > 0$
$\ln x,$ $\log_a x$	$\frac{1}{x}, \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	wszystkie x

Pochodne funkcji odwrotnych (logarytm, arcus) wyprowadzimy w części 4. Pełniejsza tabela, z funkcjami hiperbolicznymi, jest w GS 4.1 (ciąg dalszy w 4.3).

GS 4.1 · Leitner §51

Przykład 2.1

Rozpad promieniotwórczy: aktywność to pochodna

Liczba jąder izotopu maleje jak $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Aktywność A to liczba rozpadów na sekundę, czyli $A = -\dot{N}$. Wykaż, że $A = \lambda N$, i oblicz aktywność próbki zawierającej 10^{12} jąder węgla C-14 (czas połowicznego rozpadu $T_{1/2} = 5730$ lat).

- 1 Pochodna $e^{-\lambda t}$: na razie zgadujemy przez analogię do e^x , a w części 4 uzasadnimy regułą łańcuchową: $\dot{N} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N$. Zatem $A = \lambda N$.
- 2 Z warunku $N(T_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0$ mamy $e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$, więc $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ rok}^{-1}$.
- 3 Rok to $3,156 \cdot 10^7$ s, więc $\lambda = 3,83 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ i $A = 3,83 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{12} \approx 3,8$ rozpadu na sekundę.

Wynik: $A = \lambda N \approx 3,8 \text{ Bq}$.

Sprawdzenie: jednostka λ to s^{-1} , więc λN ma jednostkę „na sekundę” ✓. Tempo rozpadu jest proporcjonalne do liczby jąder, czyli do wartości funkcji. To właśnie własność e^x z części 2.3.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Oblicz pochodne: (a) x^5 , (b) $\sqrt[3]{x}$, (c) $\frac{1}{x^2}$, (d) 3^x , (e) $\log_{10} x$.
- 2 Wyprowadź wzór $(\cos x)' = -\sin x$ z definicji, tak jak w części 2.2 zrobiliśmy to dla sinusa.
- 3 Kalkulator ustawiony na stopnie liczy $g(x) = \sin x^\circ$. Ile wynosi $g'(30)$? Ile wynosi pochodna sinusa w tym samym punkcie, gdy kąt mierzymy w radianach? Dlaczego wyniki są różne, choć „to ten sam kąt”?
- 4 Kondensator rozładowuje się przez opornik: $q(t) = q_0 e^{-t/(RC)}$. Natężenie prądu to $I = -\dot{q}$. Wykaż, że $I = q/(RC)$, i oblicz prąd w chwili $t = RC$ dla $q_0 = 1 \text{ mC}$ i $RC = 2 \text{ ms}$.

- 5 Funkcje hiperboliczne to $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ i $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Wykaż, że $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ i $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. Łańcuch zwisający między dwoma słupami ma kształt $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ (krzywa łańcuchowa). Oblicz nachylenie łańcucha w punkcie $x = a$, korzystając z tego, że $(e^{x/a})' = \frac{1}{a}e^{x/a}$.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

Więcej zadań: Leitner §47, §52 · GS 4.1.

3 Reguły różniczkowania

3.1 Stała, suma, różnica

Przyrost sumy to suma przyrostów, więc $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Stały czynnik wychodzi przed pochodną: $(c f)' = c f'$. Razem oznacza to, że różniczkowanie jest **liniowe**. Wielomian różniczkujemy wyraz po wyrazie: $(3x^4 - 2x + 7)' = 12x^3 - 2$. Leitner tw. 51.1

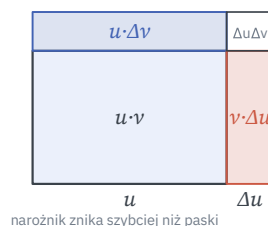
3.2 Iloczyn: pole prostokąta

Niech u i v to boki prostokąta, a uv jego pole. Gdy oba boki urosną o Δu i Δv , pole rośnie o dwa paski i mały narożnik:

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Dzielimy przez Δx . Narożnik daje $\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$, a to dąży do $u' \cdot 0 = 0$.

Narożnik jest „drugiego rzędu małości” i znika, tak jak wyrazy z $(\Delta t)^2$ u Feynmana. Zostają paski:



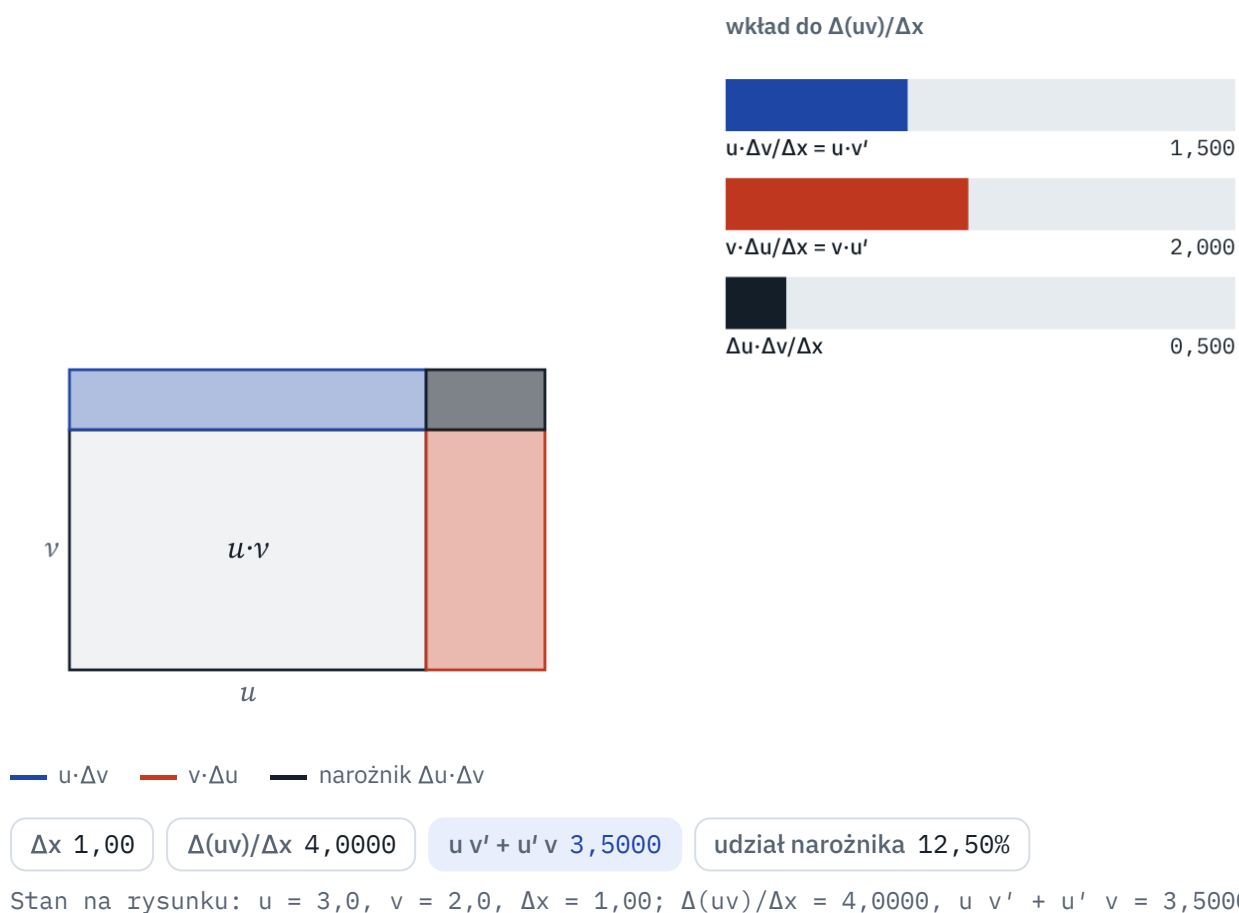
🔧 REGUŁY · ILOCZYN I ILORAZ

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Dla trzech czynników: $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$. Każdy czynnik różniczkujemy po kolei, a pozostałe zostawiamy bez zmian. Leitner wzory (51.3)–(51.4), (51.18)

SYMULACJA 4

Reguła iloczynu jako pole. Zmieniaj boki u , v i ich przyrosty. Paski $u \Delta v$ i $v \Delta u$ maleją razem z przyrostem, ale narożnik $\Delta u \Delta v$ maleje znacznie szybciej. Jego udział w przyroście pola dąży do zera.



Regułę ilorazu najłatwiej zapamiętać, wyprowadzając ją z reguły iloczynu (zadanie 5 w tej części). W liczniku jest minus, więc kolejność ma znaczenie: zaczynamy od pochodnej licznika.

⚠️ PUŁAPKA

Pochodna iloczynu *nie* jest iloczynem pochodnych. Sprawdzenie na $x \cdot x$: poprawnie $(x^2)' = 2x$, a „pochodna razy pochodna” daje $1 \cdot 1 = 1$. Na rysunku prostokąta „ $u'v'$ ” to sam narożnik, czyli dokładnie ta część, która w granicy znika.

3.3 Wzór Feynmana dla iloczynu potęg

W tabeli pochodnych Feynman podaje regułę, którą podręczniki matematyki zwykle chowają pod nazwą pochodnej logarytmicznej, a która w fizyce jest bardzo wygodna: FLP I-8-3, tab. 8-3

$$s = u^a v^b w^c \implies \frac{\dot{s}}{s} = a \frac{\dot{u}}{u} + b \frac{\dot{v}}{v} + c \frac{\dot{w}}{w}.$$

Słowami: względne tempo zmian iloczynu potęg to suma względnych temp zmian czynników, pomnożonych przez wykładniki. Dla małych zmian działa to też na procenty. Gdy prędkość rośnie o 1%, energia kinetyczna $\frac{1}{2}mv^2$ rośnie o ok. 2%. Wzór wynika z pochodnej logarytmu (część 4.4), bo $\ln s = a \ln u + b \ln v + c \ln w$ (dla $u, v, w > 0$).

Przykład 3.1

Dopasowanie obciążenia do źródła

Bateria o sile elektromotorycznej $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r = 2 \Omega$ zasila opornik R . Moc wydzielana w oporniku to $P(R) = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$. Przy jakim R moc jest największa?

- 1 Reguła ilorazu: $u = \mathcal{E}^2 R$, $u' = \mathcal{E}^2$; $v = (R+r)^2$, $v' = 2(R+r)$ (rozwiń kwadrat albo zajrzyj do części 4).
- 2
$$P'(R) = \frac{\mathcal{E}^2(R+r)^2 - \mathcal{E}^2 R \cdot 2(R+r)}{(R+r)^4} = \frac{\mathcal{E}^2(r-R)}{(R+r)^3}.$$
- 3 $P' > 0$ dla $R < r$ i $P' < 0$ dla $R > r$. Moc rośnie, a potem maleje, więc największa jest dla $R = r$.
- 4
$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{144}{8} = 18 \text{ W}.$$

Wynik: największą moc dostajemy, gdy opór obciążenia jest równy oporowi wewnętrznemu: $R = 2 \Omega$, $P_{\max} = 18 \text{ W}$.

Sprawdzenie: $P(1 \Omega) = 16 \text{ W}$ i $P(3 \Omega) = 17,28 \text{ W}$, obie mniejsze od 18 W ✓. Ekstrema zbadamy dokładniej w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce.

Przykład 3.2

Zegar wahadłowy w upale

Okres wahadła to $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Mosiężny pręt wahadła wydłuża się o $\alpha = 19 \cdot 10^{-6}$ swojej długości na każdy kelwin. Ile sekund na dobę spóźni się zegar, gdy temperatura wzrośnie o 10 K?

- 1 $T = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}$. Wzór Feynmana: $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$, a g się nie zmienia.
- 2 $\frac{\Delta l}{l} = 19 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 1,9 \cdot 10^{-4}$, więc $\frac{\Delta T}{T} \approx 0,95 \cdot 10^{-4}$.
- 3 Okres wydłuża się, więc zegar wykonuje mniej wahaniec w ciągu doby i się spóźnia:
 $86\,400 \text{ s} \cdot 0,95 \cdot 10^{-4} \approx 8,2 \text{ s}$.

Wynik: ok. 8 s na dobę.

Sprawdzenie: nie potrzebowaliśmy ani długości wahadła, ani g , tylko wykładnik $\frac{1}{2}$ ✓. 8 s na dobę to ponad 4 minuty na miesiąc. Dlatego zegary precyzyjne miały wahadła kompensowane, na przykład z prętów z dwóch różnych metali.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Oblicz pochodną $(x^2 - 1)(x^3 + 2)$ na dwa sposoby: regułą iloczynu i po wymnożeniu nawiasów. Porównaj wyniki.
- 2 Oblicz pochodne: (a) $x^3 \ln x$, (b) $\frac{x+1}{x^2+1}$.
- 3 Oblicz pochodną iloczynu trzech funkcji $x e^x \sin x$. Ile wynosi w $x = 0$?
- 4 Moc promieniowania ciała doskonale czarnego to $P = \sigma AT^4$ (prawo Stefana-Boltzmanna). O ile procent w przybliżeniu wzrośnie moc, gdy temperatura wzrośnie o 1%? A gdy jednocześnie pole powierzchni zmaleje o 2%?
- 5 Wyprowadź regułę ilorazu z reguły iloczynu. Przyjmij, że $q = u/v$ jest różniczkowalna, i zróżniczkuj równość $u = qv$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

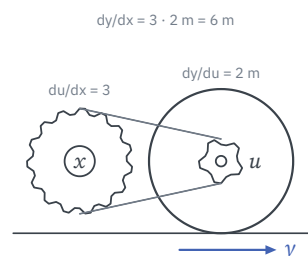
Więcej zadań: Leitner §51 · GS 4.3.

4.1 Reguła łańcuchowa: tempa się mnożą

Rower ma przekładnię. Gdy pedały obrócić się raz, koło zębate z tyłu obraca się 3 razy, a tylne koło obraca się razem z nim. Jeśli każdy obrót koła to 2 m drogi, to jeden obrót pedałów daje $3 \cdot 2 = 6$ m. Tempa zmian się mnożą. To cała reguła łańcuchowa.

Funkcja złożona $y = f(g(x))$ powstaje w dwóch krokach: $x \mapsto u = g(x) \mapsto y = f(u)$. Przyrost Δx wywołuje przyrost Δu , a ten przyrost Δy . Dla $\Delta u \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$



REGUŁA · FUNKCJA ZŁOŻONA (ŁAŃCUCHOWA)

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Pochodna funkcji zewnętrznej, obliczona w punkcie $u = g(x)$, razy pochodna funkcji wewnętrznej. Dla trzech ogniów: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

Leitner tw. 51.3, wzory (51.16)–(51.20)

Rachunek z ilorazami przyrostów nie jest jeszcze dowodem, bo Δu może być zerem dla niektórych Δx . Leitner obchodzi to, zapisując przyrost przez różniczkę, $\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha(\Delta u) \Delta u$, gdzie $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$ i $\alpha(0) = 0$. Dzięki temu wzór działa także wtedy, gdy $\Delta u = 0$, a wynik jest ten sam.

Najczęstsze przypadki w fizyce:

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d}{dt} e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (e^{kx})' = k e^{kx}, \quad ((ax + b)^n)' = n a (ax + b)^{n-1}.$$

W każdym z nich funkcja wewnętrzna jest liniowa, więc jej pochodna to po prostu współczynnik. Częstość kołowa (pulsacja) ω , w rad/s, mówi, jak szybko rośnie faza ωt , a stała czasowa τ (w sekundach) mówi, jak szybko zanika wykładnicza.

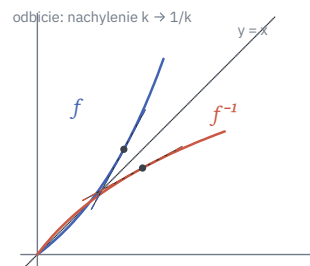
⚠ PUŁAPKA

Najczęstszy błąd to zapomnienie o pochodnej funkcji wewnętrznej: $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$, a nie $\cos 3x$. Drugi błąd to obliczenie pochodnej zewnętrznej w złym punkcie: $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x$, a nie $\frac{1}{x} \cdot 2x$.

4.2 Pochodna funkcji odwrotnej

Wykres funkcji odwrotnej to odbicie wykresu w prostej $y = x$. Odbicie zamienia miejscami przyrosty Δx i Δy , więc nachylenie przechodzi w swoją odwrotność: Leitner tw. 51.2

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}, \quad \text{o ile } \frac{dy}{dx} \neq 0.$$



Zakładamy, że f jest ciągła i ściśle monotoniczna na przedziale.

Wtedy funkcja odwrotna istnieje i jest ciągła, a wzór działa w punktach, w których $f' \neq 0$. Gdy styczna do f jest pozioma, styczna do funkcji odwrotnej jest pionowa i pochodna odwrotnej nie istnieje. Tak jest z $\sqrt[3]{x}$ w zerze: to odwrotność x^3 , a $(x^3)' = 0$ w zerze.

Przykład 4.1

Logarytm i arcus tangens z funkcji odwrotnej

Wyprowadź $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ i $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

- 1 $y = \ln x \iff x = e^y$. Stąd $\frac{dx}{dy} = e^y = x$, więc $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.
- 2 $y = \arctan x \iff x = \tan y$ dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Stąd $\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$.
- 3 Odwracamy: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Wynik: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$; $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ dla wszystkich x .

Sprawdzenie: $\arctan$ jest rosnąca, więc pochodna powinna być dodatnia ✓. Dla dużych $|x|$ wykres się spłaszcza (dąży do $\pm\frac{\pi}{2}$), więc pochodna powinna dążyć do zera ✓.

Teraz możemy też domknąć wzór na potęgę. Dla $x > 0$ zapisujemy $x^r = e^{r \ln x}$ i stosujemy regułę łańcuchową: $(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot \frac{r}{x} = r x^{r-1}$. Działa to dla każdego rzeczywistego r . Tak samo $a^x = e^{x \ln a}$ daje $(a^x)' = a^x \ln a$. Leitner §51

4.3 Różniczkowanie równania (funkcja uwikłana)

Okrąg $x^2 + y^2 = 25$ nie jest wykresem jednej funkcji, ale w pobliżu większości swoich punktów jest. Nie musimy wyliczać y . Wystarczy zróżniczkować całe równanie po x , pamiętając, że y zależy od x , więc $(y^2)' = 2y y'$ z reguły łańcuchowej:

$$2x + 2y y' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

W punkcie $(3, 4)$ nachylenie stycznej wynosi $-\frac{3}{4}$. Sprawdzenie wprost: $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y' = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{3}{4} \checkmark$. Styczna jest prostopadła do promienia o nachyleniu $\frac{4}{3}$, bo $(-\frac{3}{4}) \cdot \frac{4}{3} = -1$. Ten sam chwyt, zastosowany do równań, w których zmienne zależą od czasu, to tempa powiązane z części 7.

4.4 Pochodna logarytmiczna

Gdy funkcja jest iloczynem potęg albo ma zmienną w wykładniku, łatwiej najpierw ją zlogarytmować. Pochodna $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ to **pochodna logarytmiczna**, czyli względne tempo zmian.

Na przykład dla $y = x^x$ ($x > 0$): Leitner przykł. 51.5

$$\ln y = x \ln x \implies \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \implies (x^x)' = x^x (\ln x + 1).$$

Wzór Feynmana z części 3.3 to ten sam rachunek: $\ln(u^a v^b w^c) = a \ln u + b \ln v + c \ln w$, a potem różniczkujemy obie strony.

Przykład 4.2

Barometr w balonie

Ciśnienie atmosferyczne maleje z wysokością w przybliżeniu jak $p(h) = p_0 e^{-h/H}$, gdzie $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$, a $H \approx 8\text{ km}$. Balon wznosi się ze stałą prędkością 5 m/s . Jak szybko spada ciśnienie odczytywane na pokładzie tuż po starcie i na wysokości 8 km ?

- 1 Ciśnienie zależy od wysokości, a wysokość od czasu: $p(h(t))$. Reguła łańcuchowa:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}.$$
- 2 $\frac{dp}{dh} = -\frac{p}{H}$, a $\frac{dh}{dt} = 5\text{ m/s}$.
- 3 Przy ziemi: $-\frac{101\,325}{8000} \cdot 5 \approx -63\text{ Pa/s}$. Na wysokości H ciśnienie jest e razy mniejsze, więc tempo też: ok. -23 Pa/s .

Wynik: ok. 63 Pa/s przy starcie i ok. 23 Pa/s na wysokości 8 km .

Sprawdzenie: jednostki $\frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Pa/s}$ ✓. Gradient ciśnienia przy ziemi to ok. $12,7\text{ Pa na metr}$, czyli mniej więcej $1\text{ hPa na } 8\text{ m}$. Taka jest znana reguła z meteorologii ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Oblicz pochodne: (a) $\sin(3x^2)$, (b) e^{-t^2} (po t), (c) $\sqrt{1+4x}$, (d) $\ln(\cos x)$.
- 2 Wyprowadź $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej. Dlaczego w pierwiastku bierzemy znak plus?
- 3 Natężenie światła w wodzie maleje z głębokością jak $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, gdzie $\mu = 0,5\text{ m}^{-1}$. Oblicz $\frac{dI}{dx}$ na głębokości $x = 2\text{ m}$, jako ułamek I_0 . Nurek schodzi w dół z prędkością $0,3\text{ m/s}$. Jak szybko maleje natężenie, które widzi?
- 4 Wyznacz nachylenie stycznej do elipsy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ w punkcie $(2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, różniczkując równanie stronami.
- 5 Za pomocą pochodnej logarytmicznej oblicz $(x^x)'$. Dla jakiego $x > 0$ funkcja x^x ma poziomą styczną? Ile wynosi wtedy jej wartość?

- 6 Funkcja f jest rosnąca i różniczkowalna, $f(2) = 5$, $f'(2) = 4$. Ile wynosi $(f^{-1})'(5)$? Napisz równanie stycznej do wykresu f^{-1} w punkcie $(5, 2)$ i wyjaśnij geometrycznie, dlaczego jest to odbicie stycznej do f w punkcie $(2, 5)$.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

Więcej zadań: Leitner §51 · GS 4.3.

5 Pochodne po czasie

5.1 Położenie, prędkość, przyspieszenie

Ciało porusza się po prostej, a $x(t)$ to jego położenie. Prędkość to tempo zmian położenia, a przyspieszenie to tempo zmian prędkości. Pochodną pochodnej nazywamy **pochodną drugiego rzędu**: FLP I-8-5 · Leitner §49, §60

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad a = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

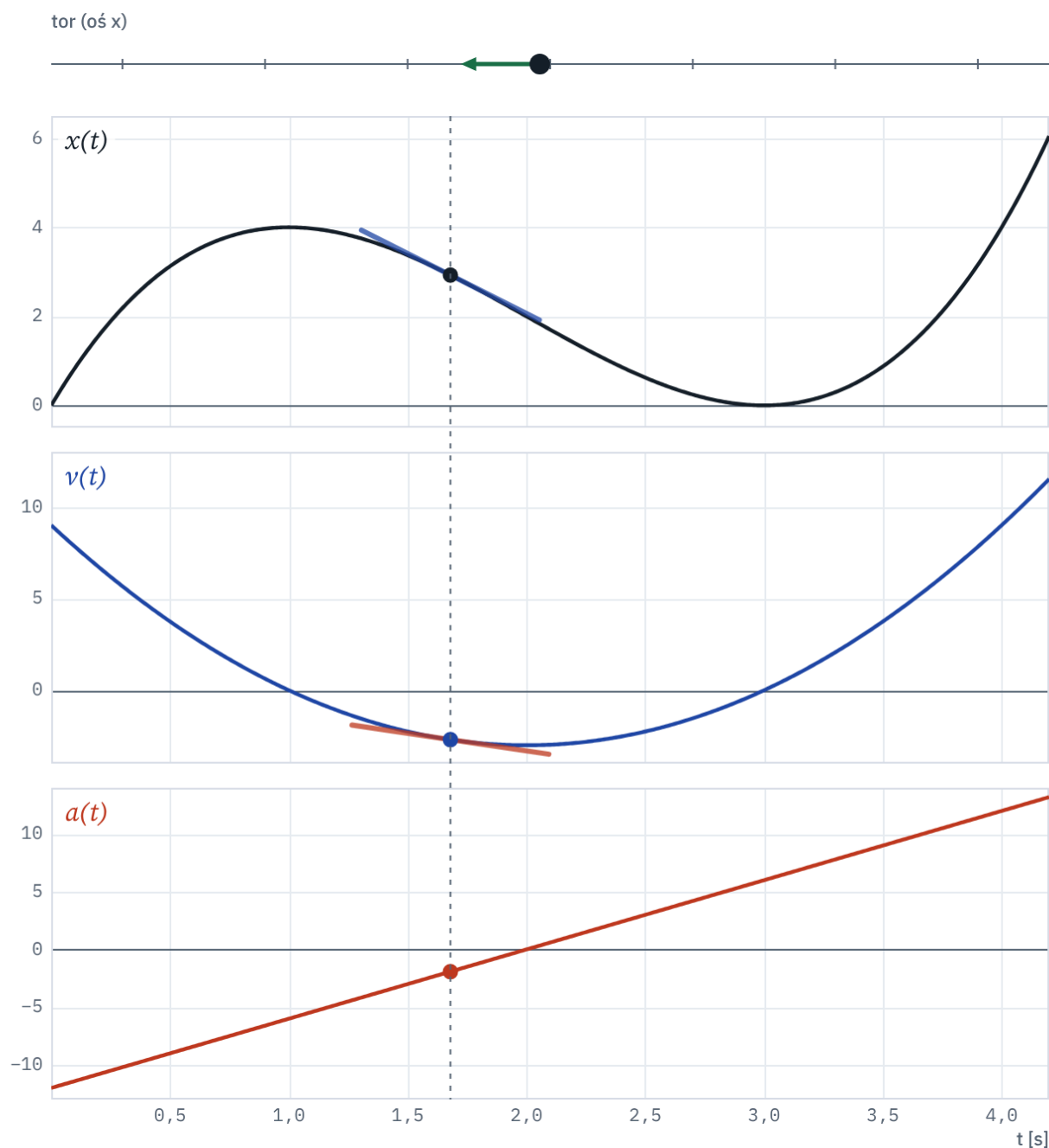
Zapis $\frac{d^2x}{dt^2}$ czytamy „d dwa x po d t kwadrat”. Pochodną trzeciego rzędu położenia, czyli tempo zmian przyspieszenia, inżynierowie nazywają *zrywem* (ang. *jerk*). Projektanci wind i torów kolejowych dbają, żeby był mały, bo nagła zmiana przyspieszenia jest dla pasażerów nieprzyjemna.

Z wykresu $x(t)$ odczytasz wszystko jakościowo:

- **Znak v** to kierunek ruchu. Ciało stoi (chwilowo), gdy $v = 0$: styczna do $x(t)$ jest pozioma.
- **Znak a** mówi, w którą stronę wykres $x(t)$ się wygina: do góry, gdy $a > 0$, w dół, gdy $a < 0$.
- **Ciało przyspiesza**, gdy v i a mają ten sam znak, a **hamuje**, gdy przeciwne. Ujemne przyspieszenie nie zawsze oznacza hamowanie.

SYMULACJA 5

Trzy wykresy jednego ruchu. Wybierz ruch i przesuвай chwilę t (albo włącz animację). Na torze u góry strzałka prędkości jest zielona, gdy ciało przyspiesza, i czerwona, gdy hamuje. Porównaj: gdzie $x(t)$ ma poziomą styczną, a gdzie $v(t)$?



— $x(t)$ — $v(t)$ — $a(t)$ — przyspiesza — hamuje

t 1,68 s

x 2,93 m

$v = \dot{x}$ -2,69 m/s

$a = \dot{v}$ -1,92 m/s²

przyspiesza

Stan na rysunku: ruch „ $t^3 - 6t^2 + 9t$ ”, $t = 1,68$ s, $x = 2,93$ m, $v = -2,69$ m/s, $a = -1,92$ m/s² (przyspiesza). Krótkie odcinki to styczne do $x(t)$ (nachylenie v) i do $v(t)$ (nachylenie a).

5.2 Droga to nie to samo co przemieszczenie

Przemieszczenie w przedziale czasu to $x(t_2) - x(t_1)$. Droga to suma długości wszystkich odcinków, które ciało przebyło. Jeśli ciało w międzyczasie zawraca (czyli v zmienia znak), droga jest większa od wartości przemieszczenia. Żeby ją policzyć, trzeba znaleźć chwile, w których $v = 0$, i dodać wartości bezwzględne przemieszczeń w każdym kawałku.

Przykład 5.1

Ruch, który dwa razy zawraca

Położenie ciała to $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (SI). Wyznacz $v(t)$ i $a(t)$. Kiedy ciało stoi? Kiedy przyspiesza, a kiedy hamuje? Oblicz przemieszczenie i drogę w przedziale $[0; 4]$ s.

- 1 $v = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$, $a = 6t - 12$.
- 2 $v = 0$ dla $t = 1$ s i $t = 3$ s. Ruch w przód dla $t < 1$ i $t > 3$, wstecz dla $1 < t < 3$. Zmiana znaku a w $t = 2$ s.
- 3 Znaki: $(0; 1)$: $v > 0$, $a < 0$, hamuje; $(1; 2)$: $v < 0$, $a < 0$, przyspiesza (wstecz); $(2; 3)$: $v < 0$, $a > 0$, hamuje; $t > 3$: $v > 0$, $a > 0$, przyspiesza.
- 4 $x(0) = 0$, $x(1) = 4$, $x(3) = 0$, $x(4) = 4$ m. Przemieszczenie $x(4) - x(0) = 4$ m. Droga $4 + 4 + 4 = 12$ m.

Wynik: ciało stoi w chwilach 1 s i 3 s; przemieszczenie 4 m, droga 12 m.

Sprawdzenie: największa prędkość wstecz jest wtedy, gdy $a = 0$, czyli w $t = 2$ s: $v(2) = -3$ m/s. Ten ruch jest pierwszym wariantem w symulacji 5 ✓

Przykład 5.2

Membrana głośnika

Membrana głośnika drga jak $x(t) = A \cos \omega t$ z amplitudą $A = 0,1 \text{ mm}$ przy częstotliwości $f = 1 \text{ kHz}$. Wyznacz $v(t)$, $a(t)$ i ich największe wartości. Porównaj przyspieszenie z g .

- 1 Reguła łańcuchowa: $v = -A\omega \sin \omega t$, $a = -A\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$.
- 2 $\omega = 2\pi f \approx 6283 \text{ s}^{-1}$. $v_{\max} = A\omega \approx 0,63 \text{ m/s}$.
- 3 $a_{\max} = A\omega^2 = 10^{-4} \cdot 6283^2 \approx 3950 \text{ m/s}^2 \approx 400 g$.

Wynik: $v_{\max} \approx 0,63 \text{ m/s}$, $a_{\max} \approx 3,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$, czyli ok. 400 g .

Sprawdzenie: każde różniczkowanie dokłada czynnik ω . Przy dużej częstotliwości nawet bardzo mała amplituda daje ogromne przyspieszenie. Dlatego membrany głośników, zwłaszcza wysokotonowych, muszą być bardzo lekkie ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 40 min

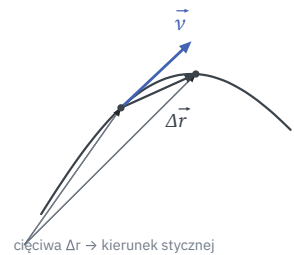
- 1 $x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ (SI). Wyznacz chwile, w których ciało stoi, i chwilę, w której przyspieszenie jest zerowe.
- 2 Piłkę rzucono pionowo w górę: $h(t) = 15t - 5t^2$ (SI, przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$). Kiedy osiągnie największą wysokość i jaką? Z jaką prędkością spadnie na ziemię? Ile wynosi przyspieszenie w najwyższym punkcie?
- 3 Kulka spada w powietrzu. Przyjmij prosty model oporu proporcjonalnego do prędkości: $v(t) = v_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})$. Oblicz $a(t)$. Na początku kulka spada swobodnie, więc $a(0) = g$. Wyznacz stąd τ dla $v_{\infty} = 50 \text{ m/s}$ i $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Po jakim czasie przyspieszenie spadnie do $g/2$ i jaka jest wtedy prędkość?
- 4 Czasem znamy prędkość jako funkcję położenia, a nie czasu. Wykaż regułą łańcuchową, że wtedy $a = v \frac{dv}{dx}$. Sprawdź wzór na spadku swobodnym z zerową prędkością początkową, gdzie $v = \sqrt{2gx}$ (x mierzymy w dół).
- 5 Wykaż, że w ruchu ze stałym przyspieszeniem, $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, prędkość średnia w dowolnym przedziale $[t_1; t_2]$ jest równa prędkości chwilowej w środku przedziału. Czy to prawda dla $x(t) = t^3$?

6 Pochodna wektora

6.1 Różniczkujemy po składowych

Wektor położenia $\vec{r}(t)$ zmienia się w czasie. Prędkość to granica $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, a wektory odejmujemy i dzielimy przez liczbę po składowych. Dlatego pochodną wektora liczymy po składowych: FLP I-9-2...9-3

$$\vec{r} = [x, y, z] \implies \vec{v} = \dot{\vec{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}].$$



Wersory osi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są stałe, więc ich pochodne są zerowe. Wektor $\Delta \vec{r}$ to cięciwa toru, a przy $\Delta t \rightarrow 0$ jej kierunek dąży do kierunku stycznej. Prędkość jest zawsze **styczna do toru**. Szybkość to długość (wartość) wektora prędkości, $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Reguły iloczynu działają tak samo dla iloczynów wektorów. Dowód to reguła iloczynu zastosowana do każdej składowej:

$$\frac{d}{dt}(f \vec{a}) = \dot{f} \vec{a} + f \dot{\vec{a}}, \quad \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}, \quad \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}.$$

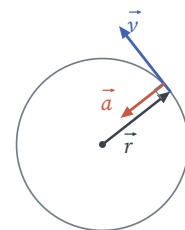
W iloczynie wektorowym trzeba zachować kolejność czynników, bo zamiana zmienia znak.

6.2 Wektor o stałej długości jest prostopadły do swojej pochodnej

To fakt zapowiedziany na końcu lekcji o wektorach (1.1 Wektory).

Jeśli $|\vec{u}(t)|$ jest stała, to $\vec{u} \cdot \vec{u} = \text{const}$. Różniczkujemy:

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2 \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} \implies \vec{u} \perp \dot{\vec{u}}.$$



Wektor stałej długości może się tylko obracać, a jego zmiana jest prostopadła do niego samego. Dwa zastosowania wynikają od razu:

- **Ruch po okręgu:** $|\vec{r}| = R$, więc prędkość jest prostopadła do promienia.
- **Ruch ze stałą szybkością po dowolnym torze:** $|\vec{v}| = \text{const}$, więc przyspieszenie jest prostopadłe do prędkości. Ciało skręca, ale nie rozpędza się ani nie zwalnia.

W ruchu jednostajnym po okręgu $\vec{r} = R [\cos \omega t, \sin \omega t]$ dostajemy $\vec{v} = R\omega [-\sin \omega t, \cos \omega t]$ i $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$. Przyspieszenie jest skierowane do środka i ma wartość $\omega^2 R = v^2/R$. Tak wygląda przyspieszenie dośrodkowe (zob. Dział 1: Ruch i jego przyczyny, §3), wyprowadzone w trzech liniijkach.

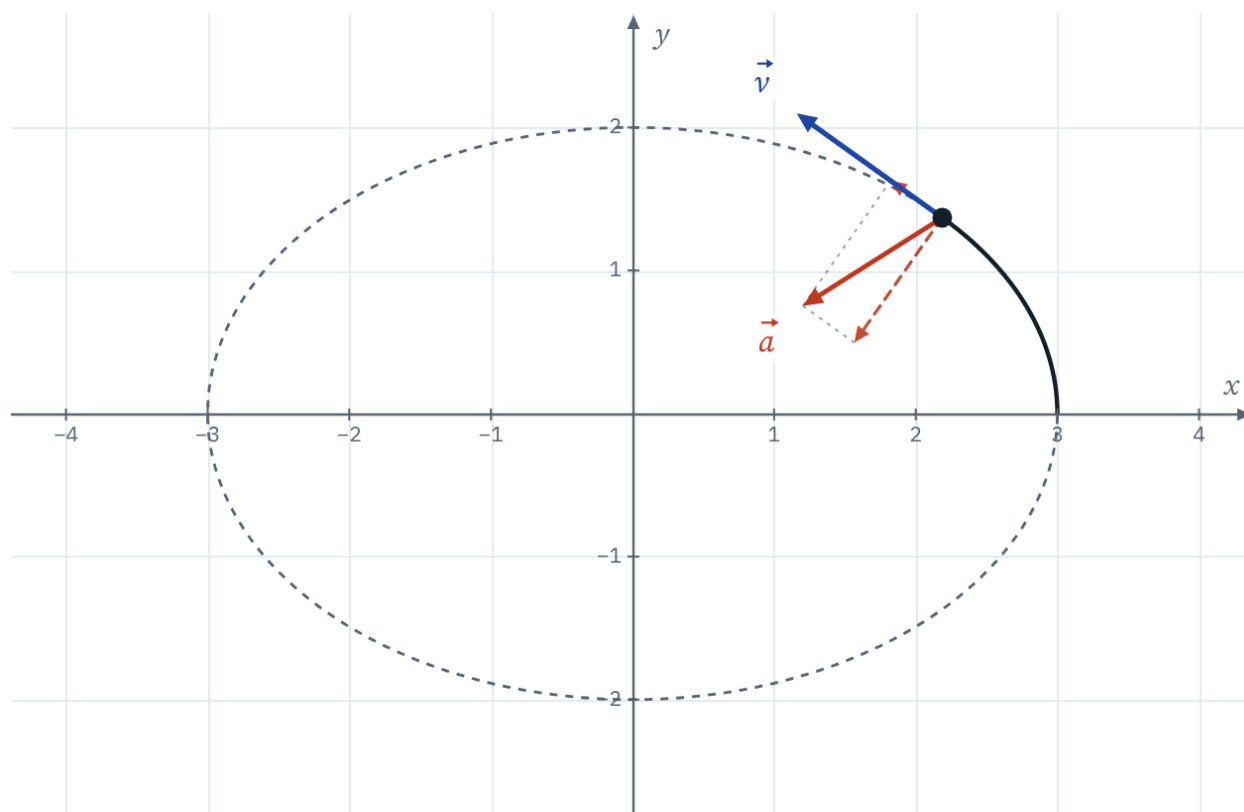
6.3 Przyspieszenie styczne i normalne

W ogólnym ruchu przyspieszenie rozkładamy na dwie części. Składowa wzdłuż prędkości, czyli **przyspieszenie styczne**, zmienia szybkość. Składowa prostopadła, czyli **przyspieszenie normalne**, zmienia kierunek ruchu:

$$a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}, \quad a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Tu ρ to **promień krzywizny**, czyli promień okręgu ściśle stycznego do toru (okręgu krzywizny) w danym punkcie. Wzór $a_t = d|\vec{v}|/dt$ wynika z $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$.

SYMULACJA 6 Wektory w ruchu po krzywej. Wybierz tor i przesuwaj chwilę t . Prędkość (niebieska) jest zawsze styczna. Przyspieszenie (czerwone) rozkłada się na część styczną i normalną. Na okręgu część styczna znika, a w rzucie ukośnym w najwyższym punkcie przyspieszenie jest prostopadłe do prędkości.



— tor — prędkość v — przyspieszenie a - - - składowe a_t i a_n

t 0,75

$|v|$ 2,52

$|a|$ 2,58

$a_t = d|v|/dt$ 0,99

$a_n = v^2/\rho$ 2,38

ρ 2,66

Stan na rysunku: tor „elipsa”, $t = 0,75$, $|v| = 2,52$, $|a| = 2,58$, $a_t = 0,99$, $a_n = 2,38$.

Przykład 6.1

Punkt na obręczy toczącego się koła

Koło o promieniu $R = 0,3 \text{ m}$ toczy się bez poślizgu, a jego oś porusza się z prędkością 10 m/s . Punkt na obręczy zakreśla cykloidę $\vec{r}(t) = R[\omega t - \sin \omega t, 1 - \cos \omega t]$, gdzie $\omega = v/R$. Wyznacz prędkość i przyspieszenie tego punktu. Ile wynosi szybkość w najniższym i w najwyższym punkcie?

1 $\omega = \frac{10}{0,3} \approx 33,3 \text{ rad/s}$. Różniczkujemy po składowych:

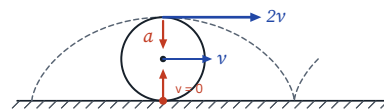
$$\vec{v} = R\omega[1 - \cos \omega t, \sin \omega t].$$

2 $|\vec{v}|^2 = R^2\omega^2(2 - 2\cos \omega t) = 4R^2\omega^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}$, więc $|\vec{v}| = 2R\omega \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|$.

3 Na dole ($\omega t = 0$): $|\vec{v}| = 0$. Na górze ($\omega t = \pi$): $|\vec{v}| = 2R\omega = 20 \text{ m/s}$.

4 $\vec{a} = R\omega^2[\sin \omega t, \cos \omega t]$, $|\vec{a}| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \approx 333 \text{ m/s}^2$. Oś koła jest w punkcie $[R\omega t, R]$, więc $\vec{r} - \vec{r}_{\text{os}} = -R[\sin \omega t, \cos \omega t]$, a przyspieszenie wskazuje zawsze na oś.

cykloida



Punkt obręczy: w dole stoi, u góry jedzie dwa razy szybciej niż oś

Wynik: na dole punkt chwilowo stoi, u góry ma prędkość 20 m/s . Przyspieszenie ma stałą wartość ok. 333 m/s^2 (ok. $34 g$) i jest skierowane do osi koła.

Sprawdzenie: w układzie związanym z osią koła punkt krąży ruchem jednostajnym, a oś jedzie ze stałą prędkością. Przyspieszenie musi więc być dośrodkowe, $v^2/R \checkmark$. Na dole $\vec{a}$ wskazuje w górę, choć prędkość jest zerowa. Zero prędkości nie oznacza zera przyspieszenia.

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

6 zadań · ok. 50 min

1 $\vec{r}(t) = [2t, t^2, 1 - t]$ (SI). Wyznacz $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ i szybkość w chwili $t = 1 \text{ s}$.

2 Wirówka o promieniu $0,5 \text{ m}$ wykonuje 120 obrotów na minutę. Oblicz ω , szybkość próbki na brzegu i jej przyspieszenie dośrodkowe.

3 Ciało porusza się po elipsie $\vec{r} = [3 \cos t, 2 \sin t]$. W których punktach szybkość jest największa, a w których najmniejsza? Gdzie przyspieszenie ma największą wartość? Sprawdź w symulacji 6.

- 4  Kamień rzucono z prędkością $v_0 = 20 \text{ m/s}$ pod kątem 60° do poziomu ($g = 10 \text{ m/s}^2$).
Zapisz $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ i znajdź chwilę, w której szybkość jest najmniejsza. Ile wtedy wynosi?
-
- 5  Dla kamienia z poprzedniego zadania oblicz przyspieszenie styczne i normalne tuż po wyrzuceniu oraz promień krzywizny toru w punkcie wyrzutu i w najwyższym punkcie.
-
- 6  Wykaż, że $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{a}$. Wywnioskuj, że jeśli siła działająca na ciało jest zawsze skierowana do jednego punktu (siła centralna, np. grawitacja Słońca), to moment pędu $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$ jest stały.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

7 Tempa powiązane

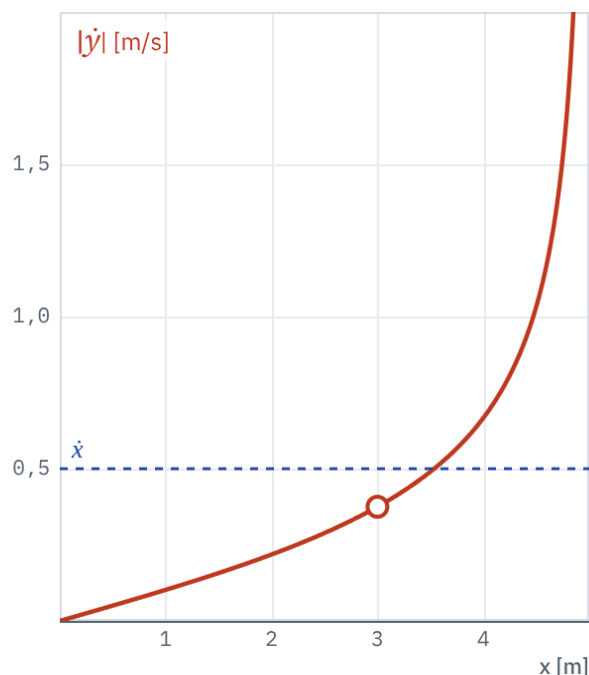
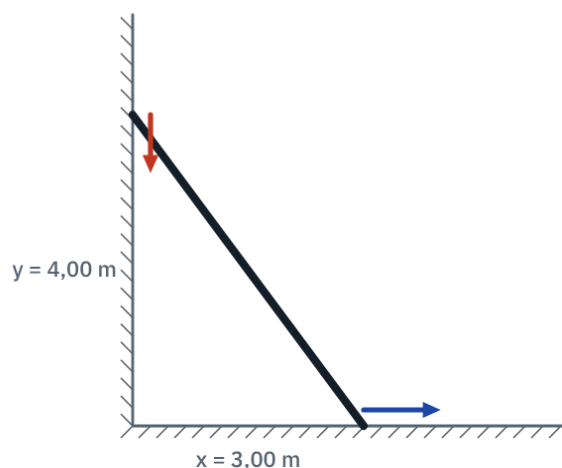
Tak nazywamy zadania o powiązanych szybkościach zmian. Często dwie wielkości są związane równaniem i obie zmieniają się w czasie. Znamy tempo zmian jednej, a szukamy tempa drugiej. Przepis jest zawsze taki sam:

1. Zapisz **równanie wiążące** wielkości, które się zmieniają. Najczęściej daje je geometria: twierdzenie Pitagorasa, trójkąty podobne, wzór na objętość.
2. **Zróżnicz** całe równanie **po czasie**, regułą łańcuchową, jak w części 4.3. Na przykład $\frac{d}{dt}(x^2) = 2x \dot{x}$.
3. Dopiero teraz **wstaw liczby** i wylicz szukane tempo.

Kolejność kroków 2 i 3 jest ważna. Gdy wstawisz liczby przed różniczkowaniem, „zamroziś” zmienne i pochodna wyjdzie zero.

SYMULACJA 7

Zsuwająca się drabina o długości 5 m. Dolny koniec odsuwasz od ściany ze stałą prędkością $\dot{x}$. Górny koniec opada z prędkością $\dot{y} = -\frac{x}{y} \dot{x}$. Ta prędkość rośnie bez ograniczeń, gdy $y \rightarrow 0$, więc model przestaje wtedy działać.



— drabina — prędkość dołu $\dot{x}$ — prędkość góry $\dot{y}$

x 3,00 m

y = $\sqrt{25 - x^2}$ 4,00 m

$\dot{y} = -(x/y) \cdot \dot{x}$ -0,375 m/s

$|\dot{y}| / \dot{x}$ 0,75

Stan na rysunku: x = 3,00 m, y = 4,00 m, $\dot{x} = 0,50$ m/s, $\dot{y} = -0,375$ m/s.

Przykład 7.1

Napełnianie zbiornika w kształcie stożka

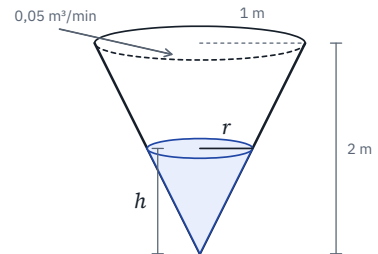
Zbiornik ma kształt stożka ustawionego wierzchołkiem w dół: promień podstawy 1 m, wysokość 2 m. Woda wpływa z wydatkiem $0,05 \text{ m}^3/\text{min}$. Jak szybko podnosi się lustro wody, gdy głębokość wynosi 1 m?

- 1 Z trójkątów podobnych promień lustra to $r = \frac{1}{2}h$.

$$\text{Objętość wody } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{12}.$$

- 2 Różniczkujemy po czasie: $\dot{V} = \frac{\pi h^2}{4} \dot{h}$.

- 3 Wstawiamy: $\dot{h} = \frac{4\dot{V}}{\pi h^2} = \frac{4 \cdot 0,05}{\pi \cdot 1} \approx 0,064 \text{ m/min}$.



Woda w stożku: promień lustra jest proporcjonalny do głębokości

Wynik: lustro podnosi się o ok. 6,4 cm na minutę.

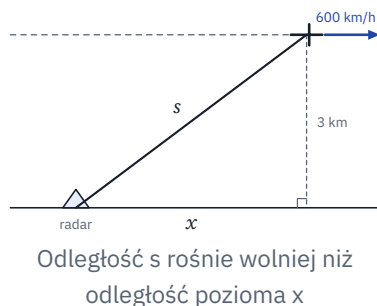
Sprawdzenie: $\dot{V} = (\text{pole lustra}) \cdot \dot{h}$, a pole lustra przy $h = 1 \text{ m}$ to $\pi \cdot 0,5^2 \approx 0,785 \text{ m}^2$. $0,05/0,785 \approx 0,064 \checkmark$. Im wyżej woda, tym szersze lustro i tym wolniej rośnie poziom.

Przykład 7.2

Samolot na radarze

Samolot leci poziomo na wysokości 3 km z prędkością 600 km/h. Jego trasa przechodzi dokładnie nad radarem. Jak szybko rośnie odległość samolotu od radaru, gdy wynosi ona 5 km, a samolot już minął radar?

- 1 x to odległość pozioma od radaru, s to odległość w linii prostej: $s^2 = x^2 + 3^2$.
- 2 Różniczkujemy: $2s \dot{s} = 2x \dot{x}$, więc $\dot{s} = \frac{x}{s} \dot{x}$.
- 3 Dla $s = 5$ km: $x = 4$ km, $\dot{s} = \frac{4}{5} \cdot 600 = 480$ km/h.



Wynik: odległość rośnie w tempie 480 km/h.

Sprawdzenie: $x/s = \cos \theta$, gdzie θ to kąt między trasą a linią widzenia. Radar mierzy tylko składową prędkości wzdłuż linii widzenia: $\vec{v} \cdot \hat{s}$. Tuż nad radarem ($x = 0$) odległość chwilowo się nie zmienia, a daleko $\dot{s} \rightarrow 600$ km/h ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 7

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Kula śnieżna topnieje, tracąc 10 cm^3 objętości na minutę i pozostając kulą. Jak szybko maleje jej promień, gdy wynosi 5 cm?
- 2 Na wodzie rozchodzi się kolista fala, której promień rośnie w tempie $0,3 \text{ m/s}$. Jak szybko rośnie pole koła, gdy promień wynosi 2 m?
- 3 Samochód jedzie od skrzyżowania na północ z prędkością 20 m/s , a pociąg oddala się od tego samego skrzyżowania na wschód z prędkością 30 m/s . Jak szybko rośnie odległość między nimi, gdy samochód jest 60 m, a pociąg 80 m od skrzyżowania?
- 4 Przedmiot zbliża się do soczewki skupiającej o ogniskowej $f = 10 \text{ cm}$ z prędkością 2 cm/s . Odległości przedmiotu x i obrazu y od soczewki spełniają równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$. Jak szybko i w którą stronę przesuwa się obraz, gdy $x = 30 \text{ cm}$?

- 5 Gaz sprężamy adiabatycznie, czyli tak, że $pV^\gamma = \text{const}$, gdzie $\gamma = 1,4$. Przy $p = 100 \text{ kPa}$ i $V = 2 \text{ L}$ objętość maleje w tempie $0,1 \text{ L/s}$. Jak szybko rośnie ciśnienie? Porównaj z przemianą izotermiczną ($pV = \text{const}$).

- 6 Drabina o długości 5 m zsuwa się tak, że dolny koniec oddala się od ściany z prędkością $0,5 \text{ m/s}$. Jak szybko maleje kąt θ między drabiną a podłogą, gdy dolny koniec jest 3 m od ściany? Odpowiedz w rad/s i w stopniach na sekundę.

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

8 Błędne intuicje

Większość błędów przy pochodnych nie bierze się z nieznajomości tabeli, tylko z fałszywego obrazu. Oto najczęstsze.

× „Pochodna iloczynu to iloczyn pochodnych.”

$(uv)' = u'v + uv'$. Iloczyn pochodnych $u'v'$ odpowiada narożnikowi $\Delta u \Delta v$ na rysunku prostokąta, czyli dokładnie tej części, która w granicy znika (część 3.2).

× „Skoro prędkość jest zerowa, przyspieszenie też jest zerowe.”

W najwyższym punkcie rzutu w górę $v = 0$, a $a = -g$. Punkt obręczy toczącego się koła na dole stoi, a jego przyspieszenie wynosi v^2/R (przykład 6.1). Zero wartości nie oznacza zera tempa zmian.

× „Ujemne przyspieszenie to hamowanie.”

Hamowanie oznacza, że v i a mają przeciwne znaki. Ciało jadące wstecz ($v < 0$) z $a < 0$ przyspiesza (przykład 5.1).

× „ $(\sin x)' = \cos x$ niezależnie od jednostek kąta.”

Tylko w radianach. Dla kąta w stopniach pojawia się czynnik $\pi/180$ (część 2.2).

× „Funkcja ciągła ma pochodną.”

Na odwrót: funkcja z pochodną jest ciągła. Funkcja $|x|$ jest ciągła w zerze, a pochodnej tam nie ma. Istnieją nawet funkcje ciągłe, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie.

× „Styczna ma z wykresem tylko jeden punkt wspólny i go nie przecina.”

Styczna do $y = x^3$ w zerze to oś x , a wykres ją przecina. Styczna do sinusoidy w punkcie $(\frac{\pi}{2}, 1)$ dotyka wykresu nieskończenie wiele razy. Z kolei prosta pionowa przecina parabolę $y = x^2$ w jednym punkcie, ale nie jest do niej styczna. Styczna to graniczne położenie siecznych (GS 4.1.8).

× „ $\frac{dy}{dx}$ to zwykły ułamek, więc wolno go dowolnie skracać.”

To jeden symbol oznaczający granicę. W regule łańcuchowej i we wzorze na funkcję odwrotną zachowuje się jak ułamek i właśnie dlatego zapis Leibniza jest tak wygodny.

Ale $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nie skraca się do $\frac{s}{t}$, bo Δ nie jest czynnikiem (FLP I-8-3).

× „W ruchu po krzywej przyspieszenie jest zawsze prostopadłe do prędkości.”

Tylko gdy szybkość jest stała. W ogólności przyspieszenie ma też część styczną, która zmienia szybkość (część 6.3, symulacja 6).

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź. Żadne z tych pytań nie wymaga długiego liczenia.

1 Biegaczka przebiegła 10 km w 50 minut. Czy w którejś chwili biegła dokładnie 12 km/h?

Musiała. Średnio biegła dokładnie 12 km/h, a prędkość zmienia się w sposób ciągły, więc w którejś chwili była dokładnie równa średniej. To twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (Leitner §57, GS rozdz. 5).

2 Ile wynosi pochodna funkcji, której wykres jest poziomą prostą? A ukośną prostą $y = 3x - 7$?

Zero i 3. Pochodna to nachylenie stycznej, a styczna do prostej to ta sama prosta.

3 $f'(x_0) = 0$. Czy f ma w x_0 maksimum albo minimum?

Niekoniecznie. x^3 ma w zerze poziomą styczną, ale jest rosnąca. Pochodna zerowa to warunek konieczny ekstremum funkcji różniczkowalnej, ale nie wystarczający (1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce).

4 Jaka funkcja jest równa swojej pochodnej?

e^x , a ogólniej $C e^x$ dla dowolnej stałej C . Na przedziale tylko takie: jeśli $f' = f$, to $(f e^{-x})' = (f' - f)e^{-x} = 0$, więc $f e^{-x}$ jest stała.

5 Dlaczego $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, a nie e^{3x} ?

Reguła łańcuchowa: funkcja wewnętrzna $3x$ rośnie trzy razy szybciej niż x , więc całość też zmienia się trzy razy szybciej.

6 Ciało porusza się po okręgu, a jego szybkość rośnie. Czy przyspieszenie jest skierowane do środka?

Nie. Ma część dośrodkową v^2/R i część styczną $d|\vec{v}|/dt$ skierowaną do przodu. Wypadkowa jest odchylona od promienia w stronę ruchu.

7 Wektor jednostkowy $\hat{u}(t)$ obraca się. Jaki kąt tworzy z nim $\dot{\hat{u}}$?

Kąt prosty, bo $|\hat{u}| = 1$ jest stała, więc $\hat{u} \cdot \dot{\hat{u}} = 0$ (część 6.2).

8 W zadaniu o drabinie ktoś najpierw wstawił $x = 3, y = 4$ do równania $x^2 + y^2 = 25$, a potem zrózniczkował po czasie. Co dostał?

$0 = 0$, czyli nic. Po wstawieniu liczb równanie przestaje zależeć od czasu. Najpierw różniczkujemy, potem wstawiamy.

DEFINICJA I REGUŁY

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{styczna: } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(cf)' = cf', \quad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\text{odwrotna: } \frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx}$$

$$\text{logarytmiczna: } \frac{y'}{y} = (\ln y)'; \quad s = u^a v^b \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{s}}{s} = a \frac{\dot{u}}{u} + b \frac{\dot{v}}{v}$$

TABELA I RUCH

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

(radiany)

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' =$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$v = \dot{x}, \quad a = \dot{v} = \ddot{x}, \quad a = v \frac{dv}{dx}$$

$$\vec{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}], \quad |\vec{u}| = \text{const} \Rightarrow \vec{u} \perp \dot{\vec{u}}$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \text{ okrąg: } \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 8 (całość, szczególnie 8-2 i 8-3: problem policjanta i prędkość jako pochodna).
- **Dla chętnych:** 8-5 (przyspieszenie, pochodne drugiego rzędu), 9-2...9-3 (prędkość jako wektor, składowe), 9-6...9-7 (rozwiązywanie równań ruchu krok po kroku).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **R. Leitner**, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych*, cz. I: §47 (definicja, pochodne z definicji), §48 (styczna, normalna, różniczkowanie graficzne), §49 (fizyczny sens pochodnej), §50 (ciągłość a różniczkowalność), §51 (reguły, funkcja odwrotna i złożona, pochodna logarytmiczna).
- **M. Gewert, Z. Skoczylas**, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, rozdz. 4: precyzyjne definicje, pochodne jednostronne, tabela pochodnych i dużo ćwiczeń.

Po przybliżeniach i ekstremach (1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce) przyjdą całki (1.5 Całki). Feynman stawia tam odwrotne pytanie: znamy prędkość w każdej chwili, ile wynosi droga? Odpowiedź to suma wielu iloczynów $v \Delta t$, a związek z pochodną okaże się najważniejszym twierdzeniem całego rachunku.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h + 2h^2}{h} = 1 + 2h \rightarrow 1$. $f(1) = -1$, styczna $y = -1 + (x - 1) = x - 2$.
- Do przodu: $\frac{59 - 75}{10} = -1,6^\circ\text{C/min}$. Do tyłu: $\frac{75 - 100}{10} = -2,5^\circ\text{C/min}$. Symetrycznie: $\frac{59 - 100}{20} = -2,05^\circ\text{C/min}$. Najlepszy jest symetryczny, bo $t = 10$ leży w środku przedziału (zadanie 5 w tej części pokazuje dlaczego). Stygnięcie zwalnia, więc szacunek „do tyłu” zawyża tempo, a „do przodu” je zaniża.
- $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, styczna $y = \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2} = \frac{2}{a} - \frac{x}{a^2}$. Przecina osie w $x = 2a$ i $y = \frac{2}{a}$, więc pole $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2$.
- (a) $\frac{h|h|}{h} = |h| \rightarrow 0$ z obu stron, więc $f'(0) = 0$. (b) $\frac{|\sin h|}{h} \rightarrow +1$ dla $h \rightarrow 0^+$ i -1 dla $h \rightarrow 0^-$, więc $g'(0)$ nie istnieje. Wykres $|\sin x|$ ma w zerze ostrze, a $x|x|$ jest tam gładki.
- Do przodu: $3 + 3h + h^2$, błąd $3h + h^2 = 0,31$ (wynik 3,31). Symetrycznie: $\frac{6h + 2h^3}{2h} = 3 + h^2$, błąd $h^2 = 0,01$ (wynik 3,01). W ilorazie symetrycznym wyraz h^2 z rozwinięcia wchodzi raz z plusem i raz z minusem, więc błąd jest rzędu h^2 , a nie h . Ten sam pomysł stoi za metodą połowy kroku w fizyce (zob. Dział 1: Ruch i jego przyczyny, §6.2).

Zadania • część 2

- (a) $5x^4$; (b) $\frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; (c) $-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$; (d) $3^x \ln 3$; (e) $\frac{1}{x \ln 10}$.
- $\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$.
- $g(x) = \sin \frac{\pi x}{180}$, więc $g'(30) = \frac{\pi}{180} \cos 30^\circ \approx 0,0151$ na stopień. W radianach $(\sin)'(\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \approx 0,866$ na radian. Pochodna to tempo zmian *na jednostkę argumentu*. Jeden radian to ok. $57,3^\circ$, więc tempa różnią się o ten czynnik: $0,866/57,3 \approx 0,0151$.
- $\dot{q} = -\frac{1}{RC}q_0 e^{-t/(RC)} = -\frac{q}{RC}$, więc $I = \frac{q}{RC}$. W chwili $t = RC$: $q = q_0/e \approx 0,368 \text{ mC}$, $I \approx \frac{0,368 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,184 \text{ A}$.
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$, więc $(\text{sh } x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ch } x$ i $(\text{ch } x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh } x$. Dla łańcucha $y' = \text{sh}(x/a)$, w punkcie $x = a$: $\text{sh } 1 \approx 1,175$, czyli kąt ok. $49,6^\circ$ z poziomem.

Zadania • część 3

- Regułą: $2x(x^3 + 2) + (x^2 - 1) \cdot 3x^2 = 5x^4 - 3x^2 + 4x$. Po wymnożeniu: $(x^5 - x^3 + 2x^2 - 2)' = 5x^4 - 3x^2 + 4x \checkmark$.
- (a) $3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$; (b) $\frac{(x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- $e^x \sin x + x e^x \sin x + x e^x \cos x$. W zerze każdy wyraz zawiera $\sin 0 = 0$ albo czynnik $x = 0$, więc pochodna wynosi 0.

4. Wzorem Feynmana: $\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\Delta A}{A} + 4 \frac{\Delta T}{T}$. Przy samej temperaturze: o 4%. Z polem: $-2\% + 4\% = 2\%$.
(Dokładnie $1,01^4 \approx 1,0406$, a $0,98 \cdot 1,01^4 \approx 1,0198$, więc przybliżenie jest dobre dla małych zmian.)
5. $u' = q'v + qv'$, więc $q' = \frac{u' - qv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v}v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Założenie, że q jest różniczkowalna, też da się udowodnić (Leitner §51 robi to wprost z definicji).

Zadania • część 4

1. (a) $6x \cos(3x^2)$; (b) $-2t e^{-t^2}$; (c) $\frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = \frac{2}{\sqrt{1+4x}}$; (d) $\frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
2. $x = \sin y$ dla $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Znak plus, bo na tym przedziale $\cos y \geq 0$. Wzór działa dla $|x| < 1$. Na końcach przedziału styczna do arcsin jest pionowa.
3. $\frac{dI}{dx} = -\mu I_0 e^{-\mu x} = -0,5 e^{-1} I_0 \approx -0,184 I_0$ na metr. Dla nurka: $\dot{I} = \frac{dI}{dx} \cdot \dot{x} \approx -0,184 \cdot 0,3 \approx -0,055 I_0$ na sekundę.
4. $\frac{2x}{16} + \frac{2y y'}{9} = 0$, więc $y' = -\frac{9x}{16y} = -\frac{18}{24\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0,433$.
5. $(x^x)' = x^x(\ln x + 1) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = 1/e \approx 0,368$. Wartość $e^{-1/e} \approx 0,692$. To najmniejsza wartość x^x dla $x > 0$.
6. $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$. Styczna: $y = 2 + \frac{1}{4}(x - 5)$. Styczna do f to $y = 5 + 4(x - 2)$. Zamiana $x \leftrightarrow y$ daje $x = 5 + 4(y - 2)$, czyli $y = 2 + \frac{1}{4}(x - 5)$. Odbicie w prostej $y = x$ zamienia role osi, więc styczne też się odbijają, a nachylenie przechodzi w odwrotność.

Zadania • część 5

1. $v = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t - 1)(t - 2)$: ciało stoi w $t = 1$ s i $t = 2$ s. $a = 12t - 18 = 0$ dla $t = 1,5$ s.
2. $v = 15 - 10t = 0$ dla $t = 1,5$ s, $h_{\max} = 11,25$ m. Upadek w $t = 3$ s, $v = -15$ m/s. Przyspieszenie wynosi -10 m/s² przez cały czas, także w najwyższym punkcie.
3. $a = \frac{v_\infty}{\tau} e^{-t/\tau}$, $a(0) = \frac{v_\infty}{\tau} = g$, więc $\tau = \frac{v_\infty}{g} \approx 5,1$ s. $a = g/2$ dla $e^{-t/\tau} = \frac{1}{2}$, czyli $t = \tau \ln 2 \approx 3,5$ s. Wtedy $v = v_\infty/2 = 25$ m/s.
4. $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$. Dla $v = \sqrt{2gx}$: $\frac{dv}{dx} = \frac{2g}{2\sqrt{2gx}}$, więc $a = \sqrt{2gx} \cdot \frac{g}{\sqrt{2gx}} = g \checkmark$.
5. $\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_0 + \frac{1}{2}a(t_1 + t_2) = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$. Dla t^3 nie: w przedziale $[0; 2]$ prędkość średnia to $\frac{8}{2} = 4$, a $v(1) = 3$. Przy stałym przyspieszeniu wykres $v(t)$ jest prostą, więc średnia równa się wartości w środku. To uzasadnia metodę połowy kroku (zob. Dział 1: Ruch i jego przyczyny, §6.2).

Zadania • część 6

1. $\vec{v} = [2, 2t, -1]$, $\vec{a} = [0, 2, 0]$. W $t = 1$: $|\vec{v}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ m/s.
2. $\omega = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12,57$ rad/s, $v = \omega R \approx 6,28$ m/s, $a = \omega^2 R \approx 79$ m/s² $\approx 8g$.
3. $\vec{v} = [-3 \sin t, 2 \cos t]$, $|\vec{v}|^2 = 9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t$. Największa szybkość 3 w punktach $(0, \pm 2)$, najmniejsza 2 w punktach $(\pm 3, 0)$. $\vec{a} = -\vec{r}$, więc $|\vec{a}|$ jest największe (równe 3) w punktach $(\pm 3, 0)$, czyli tam, gdzie

ciało jest najwolniejsze, a tor najbardziej zakrzywiony.

4. $\vec{r} = [10t, 10\sqrt{3}t - 5t^2]$, $\vec{v} = [10, 10\sqrt{3} - 10t]$. $|\vec{v}|^2 = 100 + (10\sqrt{3} - 10t)^2$ jest najmniejsze dla $t = \sqrt{3} \approx 1,73$ s (najwyższy punkt). Szybkość wynosi wtedy 10 m/s.

5. Na starcie $\hat{v} = [\cos 60^\circ, \sin 60^\circ]$: $a_t = \vec{a} \cdot \hat{v} = -10 \sin 60^\circ \approx -8,66$ m/s² (kamień zwalnia), $a_n = 10 \cos 60^\circ = 5$ m/s², $\rho = \frac{400}{5} = 80$ m. W najwyższym punkcie $a_t = 0$, $a_n = 10$ m/s², $\rho = \frac{100}{10} = 10$ m. Tor jest tam zakrzywiony najsilniej.

6. $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a}$, bo $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$. Dla siły centralnej $\vec{a} \parallel \vec{r}$, więc $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0}$ i $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. Stąd ruch planety odbywa się w jednej płaszczyźnie i obowiązuje drugie prawo Keplera.

Zadania · część 7

1. $\dot{V} = 4\pi r^2 \dot{r}$, więc $\dot{r} = \frac{-10}{4\pi \cdot 25} \approx -0,032$ cm/min.

2. $\dot{P} = 2\pi r \dot{r} = 2\pi \cdot 2 \cdot 0,3 \approx 3,77$ m²/s. To obwód razy prędkość brzegu.

3. $s^2 = x^2 + y^2$, $s = 100$ m, $\dot{s} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{s} = \frac{80 \cdot 30 + 60 \cdot 20}{100} = 36$ m/s.

4. $y = 15$ cm. Różniczkujemy: $-\frac{\dot{x}}{x^2} - \frac{\dot{y}}{y^2} = 0$, więc $\dot{y} = -\frac{y^2}{x^2}\dot{x} = -\frac{225}{900} \cdot (-2) = +0,5$ cm/s. Obraz oddala się od soczewki z prędkością 0,5 cm/s.

5. $\dot{p}V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1}\dot{V} = 0$, więc $\dot{p} = -\gamma \frac{p}{V}\dot{V} = 1,4 \cdot \frac{100}{2} \cdot 0,1 = 7$ kPa/s. W przemianie izotermicznej 5 kPa/s, czyli γ razy mniej.

6. $\cos \theta = x/5$, więc $-\sin \theta \dot{\theta} = \dot{x}/5$. Dla $x = 3$: $\sin \theta = 0,8$, $\dot{\theta} = -\frac{0,5}{5 \cdot 0,8} = -0,125$ rad/s $\approx -7,2^\circ$ /s.

Matematyka · Pochodne. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 8; R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych*, cz. I, §47–51, §60; M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, rozdz. 4. Cytaty w tłumaczeniu własnym, odnośniki do Feynmana w formacie tom–rozdział–podrozdział.