

Ciągi, granice i ciągłość

Zenon twierdził, że Achilles nigdy nie dogoni żółwia, bo zanim dobiegnie tam, gdzie żółw był, ten zdąży się przesunąć.

Odpowiedź na ten paradoks to pojęcie granicy: nieskończenie wiele kroków może dać skończony wynik. Na granicy stoi cała analiza: pochodna, całka, szeregi. Ta lekcja buduje ją od ciągów liczb, przez granice funkcji, do ciągłości i metody bisekcji, która z samej ciągłości robi algorytm rozwiązywania równań.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

27 zadań w treści, z
podpowiedziami i
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, 8-2, 22-4; K. A.
Stroud,
Engineering
Mathematics

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Achilles i żółw
- 1 Ciągi
- 2 Granica ciągu
- 3 Liczba e i procent składany
- 4 Granica funkcji
- 5 Ciągłość i bisekcja
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Achilles i żółw

Feynman przytacza paradoks Zenona. Achilles biegnie dziesięć razy szybciej niż żółw, który startuje 100 m przed nim. Gdy Achilles przebiegnie te 100 m, żółw jest 10 m dalej. Gdy Achilles przebiegnie 10 m, żółw jest metr dalej, potem 10 cm dalej i tak bez końca. Wniosek Zenona: żółw zawsze jest z przodu. Feynman odpowiada, że skończony odcinek czasu da się podzielić na nieskończenie wiele kawałków, tak jak odcinek dzieli się wciąż na pół. Nieskończenie wiele kroków w rozumowaniu nie oznacza nieskończenie długiego czasu. FLP I-8-2

Policzmy to. Achilles przebiega kolejno 100, 10, 1, 0,1, ... metrów. Po kolejnych krokach ma za sobą

100, 110, 111, 111,1, 111,11, ...

Te liczby rosną z każdym krokiem, ale nigdy nie przekraczają $111,\bar{1} = 1000/9$ m (to suma ciągu geometrycznego, lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste) i zbliżają się do tej wartości dowolnie blisko. Właśnie tam Achilles dogania żółwia. To samo daje prosty rachunek: przy prędkościach 10 m/s i 1 m/s z równania $10t = 100 + t$ wychodzi $t = 100/9$ s, czyli $1000/9$ m.

Pytanie na start. Co dokładnie znaczy „zbliżają się dowolnie blisko”? Jak to sprawdzić, nie wypisując nieskończenie wielu liczb? Odpowiedź w części 2.

Ciągi

Ciąg to ponumerowana lista liczb $a_1, a_2, a_3, \dots$, czyli funkcja, która numerowi n przypisuje liczbę a_n (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne). Ciąg można podać na dwa sposoby:

- **Wzorem ogólnym**, np. $a_n = \frac{1}{n}$: od razu policzysz dowolny wyraz.
- **Rekurencyjnie**: pierwszy wyraz i przepis na następny z poprzedniego, np. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$. Tak działa większość algorytmów numerycznych.

Dwa ciągi spotkasz wszędzie. **Arytmetyczny** ma stałą różnicę r : $a_n = a_1 + (n-1)r$. **Geometryczny** ma stały iloraz q : $a_n = a_1 q^{n-1}$. Odległości Achilleśa to ciąg geometryczny z $q = 0,1$, a wysokości odbić piłki, która za każdym razem traci tę samą część energii, też.

Ciąg jest **rosnący**, gdy $a_{n+1} > a_n$ dla każdego n , i **malejący**, gdy $a_{n+1} < a_n$. Jest **ograniczony**, gdy wszystkie wyrazy mieszczą się w jakimś przedziale $[m; M]$.

Przykład 1.1

Jak policzyć

$$\sqrt{2}$$

samym dzieleniem?

Znany od starożytności przepis (metoda Herona, zwana babilońską; jej odmiany działają dziś w bibliotekach numerycznych) to $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ z $a_1 = 1$. Policz kilka wyrazów i porównaj z $\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\dots$

- 1 Pomysł: jeśli a_n jest za duże, to $2/a_n$ jest za małe, więc średnia jest bliżej $\sqrt{2}$.
- 2 $a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2) = 1,5$; $a_3 = \frac{1}{2}(1,5 + 1,333\dots) = 1,416\,67$; $a_4 = 1,414\,215\,7$; $a_5 = 1,414\,213\,562\,37$.

Wynik: po czterech krokach 12 poprawnych cyfr. Błędy: $9 \cdot 10^{-2}$, $2 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-6}$, $2 \cdot 10^{-12}$. Liczba poprawnych cyfr mniej więcej podwaja się w każdym kroku.

Sprawdzenie: $1,414\,213\,562\,37^2 = 2,000\,000\,000\,0 \checkmark$. To przypadek metody Newtona, którą poznasz w lekcji 6.2 Metody numeryczne: Python i C++.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 20 min

- 1 Wypisz pięć pierwszych wyrazów ciągów $a_n = \frac{n}{n+1}$ i $b_n = (-1)^n$. Który jest monotoniczny, a który ograniczony?
- 2 Piłka spada z 2 m, a każde odbicie wynosi ją na 60% poprzedniej wysokości. Zapisz wzór na wysokość po n -tym odbiciu. Po którym odbiciu wysokość spadnie poniżej 1 cm?
- 3 Policz trzy kroki przepisu z przykładu 1.1 dla $\sqrt{10}$: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{10}{a_n} \right)$, $a_1 = 3$.
- 4 Ciąg Fibonacciego: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Policz F_{10} i ilorazy F_{n+1}/F_n dla $n = 5, \dots, 10$. Do czego się zbliżają?

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

Liczba g jest **granica** ciągu, gdy wyrazy zbliżają się do niej dowolnie blisko i już tak zostają. „Dowolnie blisko” zapisujemy tak: dla każdej, nawet bardzo małej odległości $\varepsilon > 0$ od pewnego miejsca wszystkie wyrazy leżą w odległości mniejszej niż ε od g :

🔑 DEFINICJA GRANICY CIĄGU

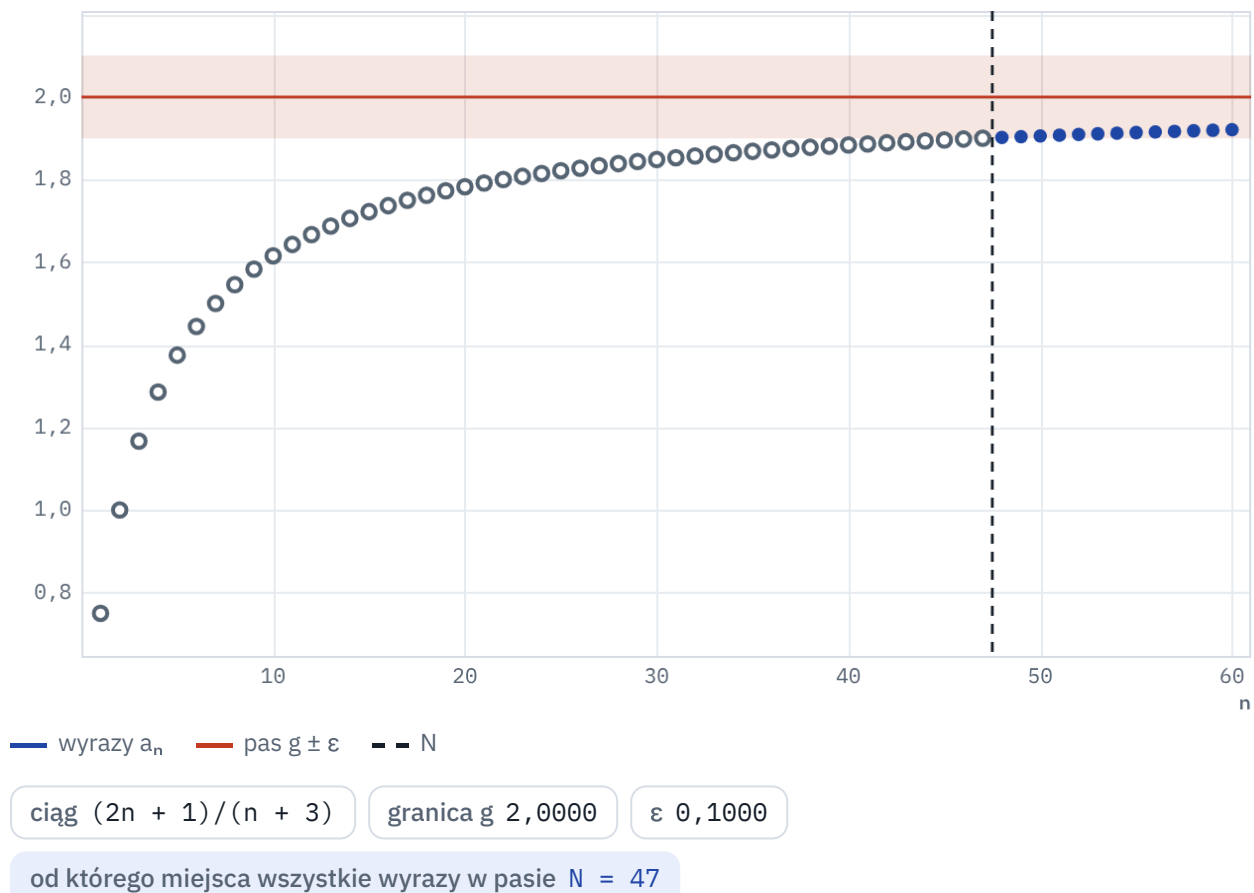
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \iff$ dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że $|a_n - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$.

Wartość bezwzględna mierzy tu odległość (lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste). Definicję czyta się jak grę: przeciwnik podaje ε , ty musisz wskazać N . Jeśli dla każdego ε potrafisz, granica wynosi g . Gdy przy ciągu piszemy samo $\lim$, chodzi o $n \rightarrow \infty$. Ciąg, który ma skończoną granicę, nazywamy **zbieżnym**, a pozostałe **rozbieżnymi**.

Dla $a_n = 1/n$ i $g = 0$: $|1/n| < \varepsilon$, gdy $n > 1/\varepsilon$. Dla $\varepsilon = 0,01$ wystarczy $N = 100$, dla $\varepsilon = 10^{-6}$ wystarczy $N = 10^6$. Zawsze się da, więc $1/n \rightarrow 0$. W paradoksie Zenona odległość Achillesa od 1000/9 m po n krokach to $\frac{1000}{9} \cdot 10^{-n}$, więc też dąży do zera.

SYMULACJA 1

Gra w ε i N . Wybierz ciąg i szerokość pasa $g \pm \varepsilon$. Program szuka miejsca N , od którego wszystkie narysowane wyrazy są w pasie. Zmniejszaj ε : dla ciągu zbieżnego N rośnie, ale zawsze istnieje. Dla $(-1)^n$ żadne N nie wystarcza.



Stan na rysunku: ciąg $(2n + 1)/(n + 3)$, $\varepsilon = 0,1000$; $N = 47$.

2.1 Granice, które warto znać

- $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ dla $k > 0$.
- $q^n \rightarrow 0$ dla $|q| < 1$; $q^n \rightarrow \infty$ dla $q > 1$; dla $q = 1$ ciąg jest stały; dla $q = -1$ skacze między -1 a 1 , a dla $q < -1$ skacze z rosnącą amplitudą; w obu przypadkach nie ma granicy.
- $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ dla $a > 0$, $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (bez dowodu).
- $\frac{n^k}{b^n} \rightarrow 0$ dla $b > 1$: funkcja wykładnicza w końcu pokonuje każdą potęgę (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne; bez dowodu).

Ciąg może też dążyć do nieskończoności: $a_n \rightarrow \infty$, gdy wyrazy przekraczają każdą liczbę i już nad nią zostają, np. n^2 albo 2^n . To nie jest skończona granica: taki ciąg jest rozbieżny.

2.2 Działania na granicach

Jeśli $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$ (skończone), to $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$, $a_n b_n \rightarrow ab$ i $a_n/b_n \rightarrow a/b$ dla $b \neq 0$. Dzięki temu granice ułamków liczy się, dzieląc licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n :

$$\frac{3n^2 - n}{2n^2 + 5} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n^2}} \rightarrow \frac{3 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}.$$

Reguły nie obejmują **wyrażeń nieoznaczonych**: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Ich wynik zależy od tego, jak szybko poszczególne części rosną lub maleją. Trzeba je najpierw przekształcić, jak wyżej.

2.3 Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ od pewnego miejsca, a skrajne ciągi mają tę samą granicę g , to środkowy też dąży do g . Ciąg „ściśnięty” między dwoma zbieżnymi do tej samej liczby nie ma wyboru.

Przykład: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$, więc $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$, choć $\sin n$ skacze nieregularnie.

Drugie ważne twierdzenie: **ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny**. Sumy Achillesa rosną i nie przekraczają $1000/9$, więc muszą mieć granicę, nawet zanim ją policzymy.

Przykład 2.1

Różnica dwóch dużych liczb

Oblicz granicę $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$. To przypadek $\infty - \infty$.

- 1 Mnożymy i dzielimy przez sumę $\sqrt{n^2 + n} + n$ (tzw. wyrażenie sprzężone): $\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}$.
- 2 Dzielimy licznik i mianownik przez n : $\frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.

Wynik: $\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie: dla $n = 1000$: $\sqrt{1\,001\,000} - 1000 \approx 0,49988 \checkmark$. Ten sam chwyt ratuje też obliczenia numeryczne przed utratą cyfr (lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste, pierwiastki równania kwadratowego).

1 Oblicz granice: $\frac{5n+2}{3n-1}$; $\frac{n^2+1}{n^3}$; $\frac{2n^3}{n^2+4}$; $0,99^n$.

2 Dla $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ i $g = 2$ znajdź N dla $\varepsilon = 0,01$.

3 Od którego n zachodzi $0,9^n < 0,001$? Użyj logarytmu (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne).

4 Oblicz $\lim (\sqrt{n^2+4n} - n)$ i $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

5 Pokaż twierdzeniem o trzech ciągach, że $\frac{\cos n + 2}{n} \rightarrow 0$.

6 Wyłumacz, dlaczego 1^∞ jest wyrażeniem nieoznaczonym. Wskaż dwa ciągi postaci $(1 + x_n)^n$ z $x_n \rightarrow 0$, które mają różne granice.

podstawowe średnie feynmanowskie

3 Liczba e i procent składany

W lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne zapisaliśmy $e = \lim (1 + \frac{1}{n})^n$. Teraz widać, dlaczego ta granica jest ciekawa: to przypadek nieoznaczony 1^∞ . Najprościej zrozumieć ją przez **procent składany**. Bank daje 100% rocznie. Jeśli dopisze odsetki raz na rok, 1 zł zmienia się w 2 zł. Jeśli dwa razy po 50%, to $1,5^2 = 2,25$ zł. Dopisując n razy po $\frac{100\%}{n}$, dostajesz $(1 + \frac{1}{n})^n$:

kapitalizacja	raz	co pół roku	co miesiąc	co tydzień	codziennie	co godzinę
$(1 + \frac{1}{n})^n$	2	2,25	2,613	2,693	2,7146	2,71813

Można pokazać (ze wzoru dwumianowego Newtona), że ciąg rośnie i nigdy nie przekracza 3. Jest monotoniczny i ograniczony, więc ma granicę: $e = 2,71828 \dots$. Częstsze dopisywanie odsetek nie daje nieograniczonego zysku, tylko dąży do **kapitalizacji ciągłej**. Ogólniej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Feynman dochodzi do e inną drogą, przez $10^\varepsilon \approx 1 + 2,3026 \varepsilon$ dla małych ε (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne). Obie drogi prowadzą do tej samej liczby (pokażemy to w części 4): e to podstawa, dla której $e^h \approx 1 + h$ przy małym h . FLP I-22-4

- 1 Lokata 10 000 zł na 6% rocznie przez 10 lat. Przy kapitalizacji ciągłej daje $10\,000 e^{0,6} \approx 18\,221$ zł. Ile razy w roku trzeba dopisywać odsetki, żeby wynik różnił się od tego o mniej niż 1 zł?
- 2 Oblicz $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ i $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$.
- 3 Losowanie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$ wygranej powtarzamy n razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie wygramy ani razu, dla dużego n ?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Granica funkcji

Granica funkcji w punkcie a mówi, do czego zbliża się $f(x)$, gdy x zbliża się do a . Wartość $f(a)$ nie gra roli; funkcja może nawet nie być w a określona. Najprościej zdefiniować to przez ciągi:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, gdy dla każdego ciągu $x_n \rightarrow a$ o wyrazach z dziedziny f i $x_n \neq a$ mamy $f(x_n) \rightarrow g$. Równoważna definicja w stylu ε : dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $|f(x) - g| < \varepsilon$, gdy $0 < |x - a| < \delta$.

Gdy x zbliża się do a tylko z prawej lub tylko z lewej, mówimy o **granicach jednostronnych** $\lim_{x \rightarrow a^+}$ i $\lim_{x \rightarrow a^-}$. Granica istnieje, gdy obie jednostronne istnieją i są równe. Dla $f(x) = \frac{1}{x}$ w zerze są nieskończone i różne: $+\infty$ z prawej, $-\infty$ z lewej. To pionowa asymptota, biegun z lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste.

4.1 Przypadek $\frac{0}{0}$: skróć, zanim podstawisz

Funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ nie jest określona w $x = 1$. Ale dla $x \neq 1$ mamy $f(x) = x + 1$, więc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Wykres to prosta z „dziurką” w punkcie (1; 2). To najczęstsza sytuacja przy liczeniu pochodnych: iloraz różnicowy funkcji ciągłej w granicy $h \rightarrow 0$ daje $\frac{0}{0}$ (lekcja 1.3 Pochodne).

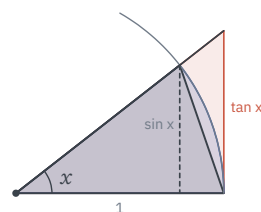
4.2 Trzy granice, na których stoi rachunek różniczkowy

WAŻNE GRANICE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

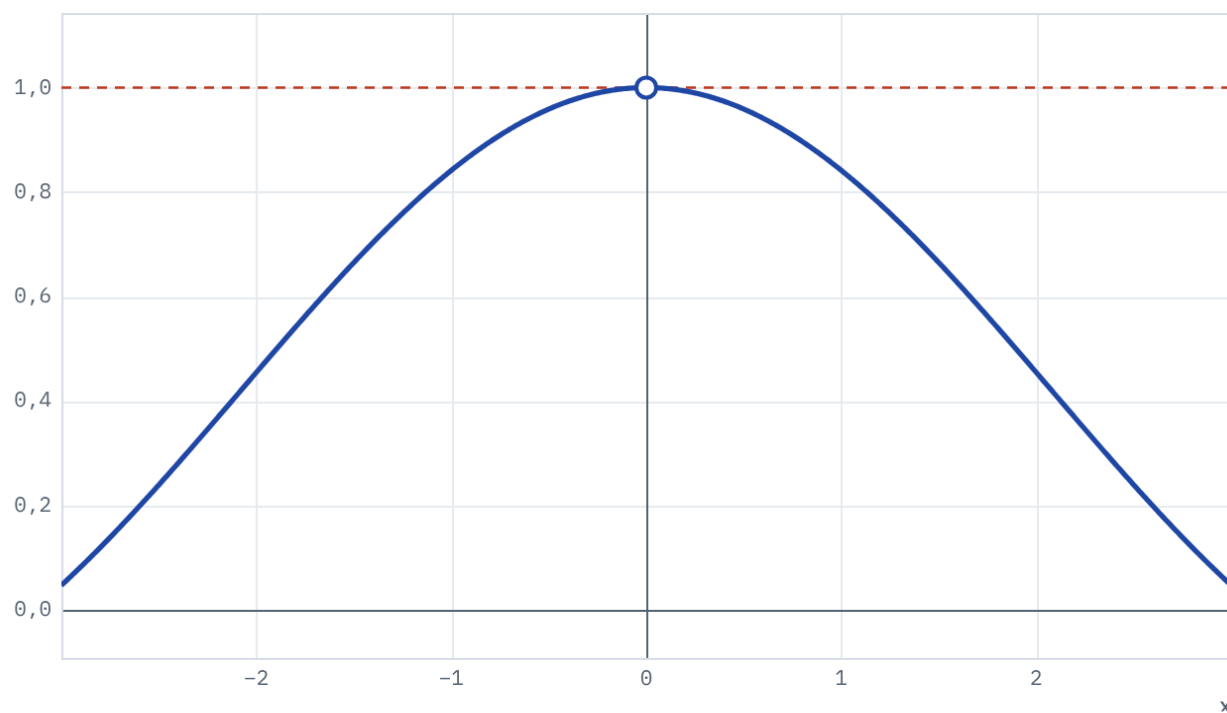
Kąt x w radianach (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne).

Pierwszą pokazuje rysunek. Na okręgu jednostkowym dla kąta $0 < x < \frac{\pi}{2}$ porównujemy trzy pola: trójkąt o wierzchołkach w środku okręgu, w punkcie $(1; 0)$ i w punkcie na okręgu $(\frac{1}{2} \sin x)$, wycinek koła $(\frac{1}{2}x)$, lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne) i trójkąt z bokiem na stycznej $(\frac{1}{2} \tan x)$. Każde zawiera poprzednie, więc $\sin x < x < \tan x$. Dzieląc przez $\sin x$ i odwracając: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Gdy $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1$ (ciągłość cosinusa, część 5), więc z twierdzenia o trzech ciągach (zastosowanego do dowolnego ciągu $x_n \rightarrow 0$, zgodnie z definicją przez ciągi) $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. Dla ujemnych x wynik jest ten sam, bo $\frac{\sin x}{x}$ jest funkcją parzystą.



Drugą wyprowadzamy z trzeciej. Podstawiamy $t = e^x - 1$, czyli $x = \ln(1 + t)$, a $t \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow 0$. Wtedy $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(1 + t)} = \frac{1}{\ln(1 + t)^{1/t}} \rightarrow \frac{1}{\ln e} = 1$ (korzystamy z ciągłości logarytmu, część 5). To jest dokładnie przybliżenie $e^x \approx 1 + x$ z lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne. Dla $x = \frac{1}{n}$ trzecia granica to dokładnie ciąg z części 3. Że ten sam wynik wychodzi dla dowolnego $x \rightarrow 0$, także ujemnego, przyjmujemy tu bez dowodu.

SYMULACJA 2 Przybliżanie do punktu. Wybierz funkcję i powiększaj okolicę punktu a . Funkcja w samym punkcie może nie istnieć (pusta kropka), a mimo to jej wartości obok zbliżają się do jednej liczby. Tabela pokazuje $f(a \pm h)$ dla coraz mniejszych h .



funkcja $\sin x / x$

punkt a 0

granica 1,00

$f(a+h)$ $h = 0,100$: 0,998334; $h = 0,010$: 0,999983; $h = 0,001$: 1,000000

Stan na rysunku: $\sin x / x$, powiększenie $\times 1$; granica w 0 równa 1,00.

Przykład 4.1

Dwie granice z sinusem i cosinusem

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

1 $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$ (podstawiamy $u = 3x \rightarrow 0$).

2 $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Wynik: 3 i $\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie: dla $x = 0,01$: $\sin 0,03/0,01 = 2,99955 \checkmark$ i $(1 - \cos 0,01)/10^{-4} = 0,499996 \checkmark$. Druga granica uzasadnia przybliżenie $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

7 zadań · ok. 45 min

1 Oblicz: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$.

2 Podaj granice jednostronne $f(x) = \frac{|x|}{x}$ w zerze. Czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

3 Wahadło o długości l wychylone o kąt θ podnosi ciężarek o $h = l(1 - \cos \theta)$. Korzystając z przykładu 4.1, pokaż, że dla małych kątów $h \approx \frac{1}{2}l\theta^2$. Policz h dokładnie i w przybliżeniu dla $l = 1$ m i $\theta = 10^\circ$.

4 Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

5 Jakie asymptoty ma $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$? Policz odpowiednie granice.

6 Kalkulator w trybie stopni liczy $\frac{\sin x}{x}$ dla $x = 0,001$. Co pokaże i dlaczego to nie jest 1?

7 Czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$? A $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$? Uzasadnij przez ciągi lub twierdzenie o trzech ciągach.

5 Ciągłość i bisekcja

Funkcja jest **ciągła w punkcie a** , gdy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$: granica istnieje, wartość istnieje i są równe. Intuicyjnie: wykres w tym miejscu można narysować bez odrywania ołówka. Wszystkie funkcje elementarne z lekcji 0.1–0.3 (wielomiany, wykładnicza, logarytm, sinus, cosinus) są ciągłe w swoich dziedzinach. Ciągłe są też ich sumy, iloczyny, ilorazy (poza zerami mianownika) i złożenia.

Najczęściej spotkasz trzy rodzaje nieciągłości (bywają też inne, np. oscylacja $\sin \frac{1}{x}$ w zerze z zadania 4.7). Formalnie o ciągłości mówimy w punktach dziedziny; $\frac{1}{x}$ i $\frac{\sin x}{x}$ są ciągłe w swoich dziedzinach, a zero do nich nie należy. Mówimy wtedy potocznie, że wykres „rwie się” w tym punkcie:



- **Skok:** granice jednostronne istnieją, ale są różne, np. napięcie po włączeniu przełącznika albo $\frac{|x|}{x}$ w zerze.
- **Dziurka (nieciągłość usuwalna):** granica istnieje, ale wartości nie ma albo jest inna, np. $\frac{\sin x}{x}$ w zerze. Wystarczy dopisać $f(0) = 1$, żeby funkcja stała się ciągła.
- **Nieskończoność:** funkcja ucieka do $\pm\infty$, np. $\frac{1}{x}$ w zerze.

Ciągłość to coś słabszego niż różniczkowalność: $|x|$ jest ciągła w zerze, ale ma tam ostrze i nie ma pochodnej (lekcja 1.3 Pochodne).

5.1 Własność Darboux i bisekcja

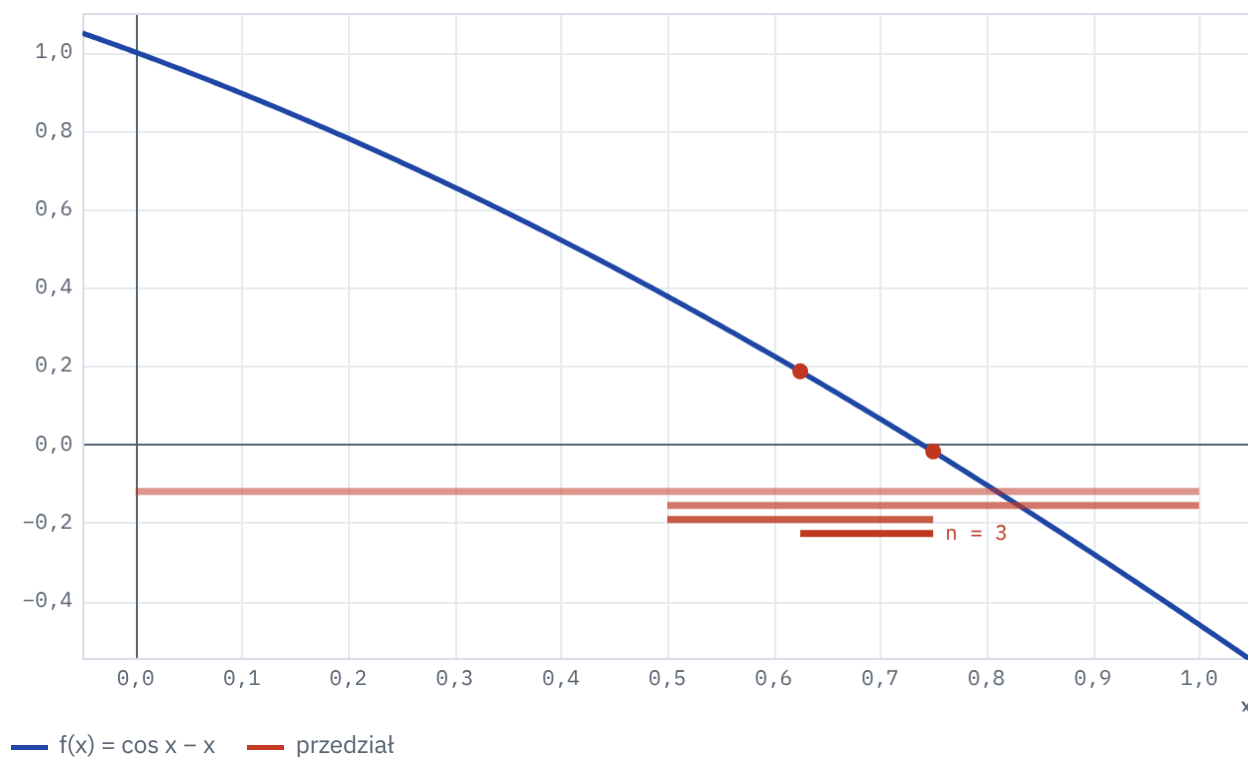
Funkcja ciągła na przedziale $[a; b]$ przyjmuje każdą wartość pośrednią między $f(a)$ a $f(b)$. W szczególności: jeśli $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki, to gdzieś między a a b jest miejsce zerowe. To **własność Darboux**. Z niej wynika prosty i niezawodny algorytm, **bisekcja**:

1. Weź przedział, na którego końcach f ma różne znaki.
2. Policz f w środku przedziału. Jeśli wyjdzie zero, koniec.
3. Zostaw tę połowę, na której końcach znaki są nadal różne. Wróć do kroku 2.

Po n krokach przedział ma szerokość $(b - a)/2^n$, więc ciąg środków dąży do miejsca zerowego. Każdy krok daje jeden bit dokładności: z przedziału o szerokości 1 na 6 cyfr po przecinku trzeba ok. 20 kroków, bo $2^{20} \approx 10^6$.

SYMULACJA 3

Bisekcja dla równania $\cos x = x$, czyli miejsca zerowego $f(x) = \cos x - x$ na $[0; 1]$. Każdy krok połowi przedział, który na pewno zawiera rozwiązanie. Porównaj szerokość przedziału z 2^{-n} .

przedział $[0,625000; 0,750000]$ szerokość = 2^{-n} 0,1250000

środek 0,687500

 $f(\text{środek})$ 0,085335Stan na rysunku: $n = 3$; przedział $[0,625000; 0,750000]$, szerokość 0,1250000.

Przykład 5.1

Rozwiązanie równania, którego nie da się rozwiązać wzorem

Równanie $\cos x = x$ nie ma rozwiązania w postaci wzoru. Pokaż, że ma rozwiązanie w $[0; 1]$, i znajdź je bisekcją z dokładnością do 0,001.

- 1 $f(x) = \cos x - x$ jest ciągła; $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = \cos 1 - 1 \approx -0,46 < 0$. Z własności Darboux jest miejsce zerowe.
- 2 $f(0,5) \approx 0,38 > 0$, więc $[0,5; 1]$. $f(0,75) \approx -0,018 < 0$, więc $[0,5; 0,75]$. $f(0,625) > 0$, więc $[0,625; 0,75]$, i tak dalej.
- 3 Szerokość $2^{-n} < 0,001$ dla $n = 10$. Po 10 krokach przedział to $[0,738\ 28; 0,739\ 26]$.

Wynik: $x \approx 0,739$ (dokładniej 0,739 085).

Sprawdzenie: $\cos 0,739\ 085 = 0,739\ 085 \checkmark$. Wpisz dowolną liczbę do kalkulatora w trybie radianów i naciskaj „cos”: po ok. 35 naciśnięciach wynik ustali się na 6 cyfrach. To ciąg rekurencyjny $x_{n+1} = \cos x_n$. Jego granica spełnia $x = \cos x$, czyli jest **punktem stałym** cosinusa, a taka metoda to iteracja punktu stałego.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

7 zadań · ok. 45 min

- 1 Dla jakiej wartości c funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ dla $x \neq 3$ i $f(3) = c$ jest ciągła?
- 2 Jakiego rodzaju nieciągłości mają: $\frac{1}{(x-2)^2}$ w $x = 2$; $\lfloor x \rfloor$ (największa liczba całkowita nie większa niż x) w $x = 1$; $\frac{\sin x}{x}$ w zerze?
- 3 Pokaż, że równanie $x^3 - x - 1 = 0$ ma pierwiastek w $[1; 2]$. Wykonaj trzy kroki bisekcji.
- 4 Ile kroków bisekcji trzeba, żeby z przedziału o szerokości 10 dojść do dokładności 10^{-9} ?
- 5 O 6:00 turysta wychodzi z dołu na szczyt i dochodzi tam o 18:00. Następnego dnia o 6:00 schodzi tą samą ścieżką i jest na dole przed 18:00. Pokaż, że jest takie miejsce na ścieżce, w którym był o tej samej godzinie w oba dni.
- 6 Pokaż, że wielomian stopnia nieparzystego zawsze ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

- 7 Bisekcja daje jeden bit na krok, a przepis z przykładu 1.1 podwaja liczbę cyfr. Czemu w ogóle używa się bisekcji?

▯▯▯ podstawowe ▯▯▯ średnie ▯▯▯ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

- × „Ciąg rosnący dąży do nieskończoności.”

Nie musi: $\frac{n}{n+1}$ rośnie i dąży do 1. Sumy Achillesa rosną i dążą do $1000/9$.

- × „Granica to wartość, którą ciąg w końcu osiąga.”

Nie musi jej osiągać: $\frac{1}{n}$ nigdy nie jest zerem. Granica mówi, do czego ciąg zbliża się dowolnie blisko.

- × „ $1^\infty = 1$, $\infty - \infty = 0$, $\frac{0}{0} = 1$.”

To wyrażenia nieoznaczone: wynik zależy od szczegółów. $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, a nie 1.

- × „Granica funkcji w punkcie to po prostu jej wartość.”

Tylko dla funkcji ciągłej. $\frac{x^2-1}{x-1}$ w $x = 1$ nie ma wartości, a granica wynosi 2.

- × „Funkcja ciągła ma pochodną.”

$|x|$ jest ciągła, a w zerze pochodnej nie ma. Istnieją nawet funkcje ciągłe wszędzie i nigdzie nieróżniczkowalne.

- × „Nieskończenie wiele kroków to nieskończenie długo.”

Paradoks Zenona: kroki coraz krótsze mogą się sumować do skończonej wartości. Kiedy dokładnie tak jest, powie lekcja o szeregach (1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe).

7 Sprawdź się

- 1 Ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+7}$?

2.

2 Czy ciąg $(-1)^n$ ma granicę?

Nie: wyrazy skaczą między -1 a 1 .

3 Do czego dąży $(1 + \frac{1}{n})^n$?

Do $e \approx 2,718$.

4 Ile wynosi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ i dlaczego tylko w radianach?

1. W stopniach $\sin x \approx \frac{\pi}{180}x$, więc granica to $\frac{\pi}{180}$.

5 Kiedy funkcja jest ciągła w punkcie a ?

Gdy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

6 O ile zwęża się przedział w jednym kroku bisekcji?

Dwa razy.

7 Gdzie Achilles dogania żółwia w przykładzie Zenona?

Po $1000/9 \approx 111,1$ m.

CIĄGI

$a_n \rightarrow g$: dla każdego $\varepsilon > 0$ jest N , że $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n > N$

arytmetyczny $a_1 + (n-1)r$;

geometryczny $a_1 q^{n-1}$

$\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$; $q^n \rightarrow 0$ dla $|q| < 1$; $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$;
 $\frac{n^k}{b^n} \rightarrow 0$ ($b > 1$)

ułamki: dziel przez najwyższą potęgę;

$\infty - \infty$: mnoż i dziel przez sumę
 pierwiastków

trzy ciągi; monotoniczny i ograniczony $\Rightarrow$
 zbieżny

$(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$

nieoznaczone: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 ,
 ∞^0

FUNKCJE

$\lim_{x \rightarrow a} f = g$: $f(x_n) \rightarrow g$ dla każdego $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, x_n z dziedziny

granica istnieje $\Leftrightarrow$ obie jednostronne
 istnieją i są równe

$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$, $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$,
 $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ (przy $x \rightarrow 0$)

ciągłość: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

nieciągłości: skok, usuwalna,
 nieskończona

Darboux: f ciągła na $[a; b]$ i zmiana znaku
 $\Rightarrow$ miejsce zerowe; bisekcja: szerokość
 $(b-a)/2^n$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 8-2 (paradoks Zenona i problem z definicją prędkości; prowadzi wprost do pochodnej).
- **Dla chętnych:** 22-4 (skąd się bierze e , przez kolejne pierwiastki z 10).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: rozdziały o ciągach, szeregach i granicach.
- Dowolny podręcznik analizy matematycznej dla pierwszego roku studiów: definicja granicy w języku ε - δ z dowodami.

Granica ilorazu różnicowego to pochodna (1.3 Pochodne): tam ważne granice z części 4 dadzą pochodne sinusa i funkcji wykładniczej. Granica sum to całka (1.5 Całki), a granica sum częściowych to szereg (1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe), który dokończy rachunek Zenona.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$: rosnący i ograniczony (między 0 a 1). $-1, 1, -1, 1, -1$: ograniczony, nie jest monotoniczny.
2. $h_n = 2 \cdot 0,6^n$ m. $0,6^n < 0,005$ dla $n > \frac{\ln 0,005}{\ln 0,6} \approx 10,4$: po 11. odbiciu.
3. $a_2 = 3,166\ 67$, $a_3 = 3,162\ 28$, $a_4 = 3,162\ 277\ 7$; $\sqrt{10} = 3,162\ 277\ 66$.
4. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89; $F_{10} = 55$. Ilorazy: 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,618; 1,618 $\rightarrow$ złota liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Zadania • część 2

1. $\frac{5}{3}$; 0; ∞ (rozbieżny); 0.
2. $|a_n - 2| = \frac{5}{n+3} < 0,01$ dla $n > 497$, więc $N = 497$.
3. $n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,9} \approx 65,6$, czyli od $n = 66$. Uwaga: dzieląc przez $\ln 0,9 < 0$, odwracamy nierówność.
4. 2 (tym samym chwytem: $\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n+n}}$); $0 (\frac{1}{\sqrt{n+1+\sqrt{n}}})$.
5. $1 \leq \cos n + 2 \leq 3$, więc $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{3}{n}$, a oba skrajne dążą do 0.
6. Podstawa dąży do 1, ale wykładnik rośnie, i wynik zależy od tego, które dzieje się „szybciej”.
 $(1 + \frac{1}{n^2})^n \rightarrow 1$, bo $1 < (1 + \frac{1}{n^2})^n = \left[(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} \right]^{1/n} < 3^{1/n} \rightarrow 1$. A $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ (część 3).

Zadania • część 3

1. $n = 12$: brakuje 27 zł; $n = 52$: 6,30 zł; $n = 365$: 0,90 zł. Granica 1 zł wypada przy ok. $n = 330$, czyli prawie przy kapitalizacji dziennej. Zbieżność jest powolna: różnica maleje mniej więcej jak $\frac{1}{n}$.
2. $e^{-1} \approx 0,368$; $\left[(1 + \frac{3}{n})^n \right]^2 \rightarrow (e^3)^2 = e^6$.
3. $(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow e^{-1} \approx 0,37$. Na przykład przy szansie 1 na milion i milionie prób zostaje 37% szans na brak wygranej.

Zadania • część 4

1. 4; 2; $\frac{5}{2}$.
2. Z prawej 1, z lewej -1 . Są różne, więc granica nie istnieje.
3. $1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2}$. $\theta = 0,1745$ rad: dokładnie $1 - \cos 10^\circ = 0,015\ 19$ m, przybliżenie 0,015 23 m. Różnica ok. 0,25%.
4. $2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \rightarrow 2$; $\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$.
5. Pionowa $x = 3$ ($\lim_{x \rightarrow 3^\pm} = \pm\infty$), pozioma $y = 2$ ($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 2$).

6. $\sin 0,001^\circ / 0,001 \approx 0,017\,453 = \frac{\pi}{180}$. Granica równa 1 zachodzi tylko dla kąta w radianach; w stopniach $\sin x \approx \frac{\pi}{180}x$.
7. Pierwsza nie: dla $x_n = \frac{1}{n\pi}$ wartości to 0, dla $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ wartości to 1, a oba ciągi dążą do 0. Druga tak: $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$, więc granica to 0.

Zadania · część 5

1. $c = 6$, bo $\frac{x^2-9}{x-3} = x+3 \rightarrow 6$.
2. Nieskończona; skok; usuwalna.
3. $f(1) = -1$, $f(2) = 5$. $f(1,5) = 0,875 > 0$: $[1; 1,5]$. $f(1,25) \approx -0,30$: $[1,25; 1,5]$. $f(1,375) \approx 0,22$: $[1,25; 1,375]$. Pierwiastek: 1,3247.
4. $10/2^n < 10^{-9}$, czyli $2^n > 10^{10}$, $n > 10 \log_2 10 \approx 33,2$: 34 kroki.
5. $d(6:00) = 0 - L < 0$ i $d(18:00) = L - 0 > 0$, gdzie L to długość ścieżki (drugiego dnia turysta jest o 18:00 już na dole). Funkcja d jest ciągła, więc ma miejsce zerowe: o tej godzinie turysta był w obu dniach w tym samym miejscu ścieżki. Sama równa wysokość by nie wystarczyła, bo ścieżka może iść w górę i w dół.
6. Dla dużych $|x|$ decyduje wyraz $a_n x^n$ (lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste), a przy nieparzystym n ma on różne znaki dla $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$. Wielomian jest ciągły, więc z własności Darboux przechodzi przez zero.
7. Bisekcja zawsze działa dla funkcji ciągłej ze zmianą znaku i daje gwarantowany przedział. Szybkie metody (Newton) potrzebują pochodnej (lekcja 1.3 Pochodne) i dobrego punktu startu; mogą się rozbiec. W praktyce łączy się obie: bisekcja zawęży przedział, Newton kończy (lekcja 6.2 Metody numeryczne: Python i C++).

Matematyka · Ciągi, granice i ciągłość. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 8-2 i 22-4; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.