

Rachunek wektorowy

Wektory poznajesz tak, jak wprowadza je Feynman. Nie zaczynamy od „strzałek ze zwrotem”, tylko od pytania, co zostaje takie samo, gdy obrócisz układ współrzędnych. Z tej jednej myśli wynikają dodawanie wektorów, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy i to, dlaczego prawa fizyki zapisujemy właśnie w ten sposób.

CZAS

ok. 3,5 h teorii + 4 h zadań

ZADANIA

33 zadania w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, rozdz. 11, 20-1, 52-4...52-6; R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej*, cz. I, rozdz. 4

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: co się nie zmienia
- 1 Wektor to trzy liczby
- 2 Dodawanie, odejmowanie, rozkład
- 3 Iloczyn skalarny
- 4 Iloczyn wektorowy
- 5 Iloczyn mieszany i objętość
- 6 Wektory w ruchu
- 7 Błędne intuicje
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Prolog: co się nie zmienia

Przeprowadź doświadczenie z wahadłem w laboratorium, a potem obróć cały stół o 30° wokół osi pionowej i powtórz je. Wynik się nie zmieni. Przenieś aparaturę do sąsiedniej sali: znowu to samo. Ta zwyczajna obserwacja jest jednym z najgłębszych faktów fizyki. W przestrzeni nie ma wyróżnionego miejsca ani wyróżnionego kierunku, o ile obracamy wszystko, co ma znaczenie. Dla wahadła oznacza to także Ziemię: zegar wahadłowy przechylony na bok przestaje chodzić poprawnie, bo kierunek pionu wyznacza Ziemia, a nie przestrzeń. Feynman otwiera tę obserwacją rozdział 11 i podkreśla, że to w istocie rozdział o *symetrii praw fizyki*, a rachunek wektorowy to tylko technika, która tę symetrię wykorzystuje. (FLP I-11-1...4)

Problem jest praktyczny. Współrzędne punktu zależą od tego, gdzie postawisz początek układu i jak skierujesz osie. Gdyby prawa fizyki zapisywać zwykłymi liczbami x, y, z , każde prawo trzeba by sprawdzać osobno w każdym obróconym układzie. Wektory rozwiązują to raz na zawsze. Jeśli prawo jest równością dwóch wektorów i jest prawdziwe w jednym układzie, to jest prawdziwe w każdym.

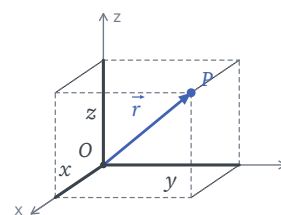
Cała ta lekcja to rozwinięcie jednego pytania: **które wielkości zmieniają się przy obrocie osi, a które nie?** Składowe się zmieniają. Długość wektora, kąt między dwoma wektorami i objętość bryły rozpiętej na trzech wektorach się nie zmieniają. Te niezmienniki dają: iloczyn skalarny (długość i kąt), długość iloczynu wektorowego (pole) i iloczyn mieszany (objętość).

Wektor to trzy liczby

1.1 Skalary i wektory

Niektóre wielkości są po prostu liczbami: temperatura, masa, energia, liczba ziemniaków w worku. Nazywamy je **skalarami**. Inne mają kierunek: przesunięcie, prędkość, siła, pęd. Żeby opisać krok z początku układu do punktu P , potrzeba trzech liczb (x, y, z) .

Feynman oznacza je jednym symbolem $\vec{r}$ i mówi wprost, że to trzy liczby naraz. (FLP I-11-4)



wektor = trzy liczby (x, y, z)

Wektor to trzy liczby.

R. Feynman, FLP I-11-4 (tłum. własne)

Te trzy liczby to **składowe** wektora w danym układzie osi. Zapisujemy je w nawiasie albo przez wersory osi, czyli wektory jednostkowe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ skierowane wzdłuż x, y, z :

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

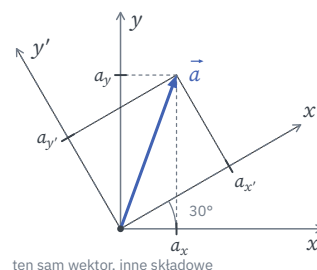
Wektor przesunięcia od punktu A do punktu B to różnica współrzędnych „koniec minus początek”: $\vec{AB} = B - A$.

1.2 Ale nie każde trzy liczby

Tu jest sedno. Jaś mierzy współrzędne względem swoich osi, a Małgosia od osi obróconych o kąt θ . Ten sam krok w przestrzeni ma u nich różne składowe. Dla obrotu wokół osi z związek jest taki:

FLP I-11-3

$$a_{x'} = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \quad a_{y'} = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta, \quad a_{z'} = a_z.$$



Wektorem nazywamy *każdą* trójkę liczb, która przy obrocie osi zmienia się dokładnie według tej reguły, czyli tak jak składowe kroku w przestrzeni. Prędkość jest wektorem, bo jest ilorazem przesunięcia przez czas. Siła jest wektorem, co sprawdzamy doświadczalnie. Za to trójka „temperatura w Warszawie, w Krakowie i w Gdańsku” wektorem nie jest, bo obrót osi nie ma na nią żadnego wpływu.

🔧 DEFINICJA · WEKTOR

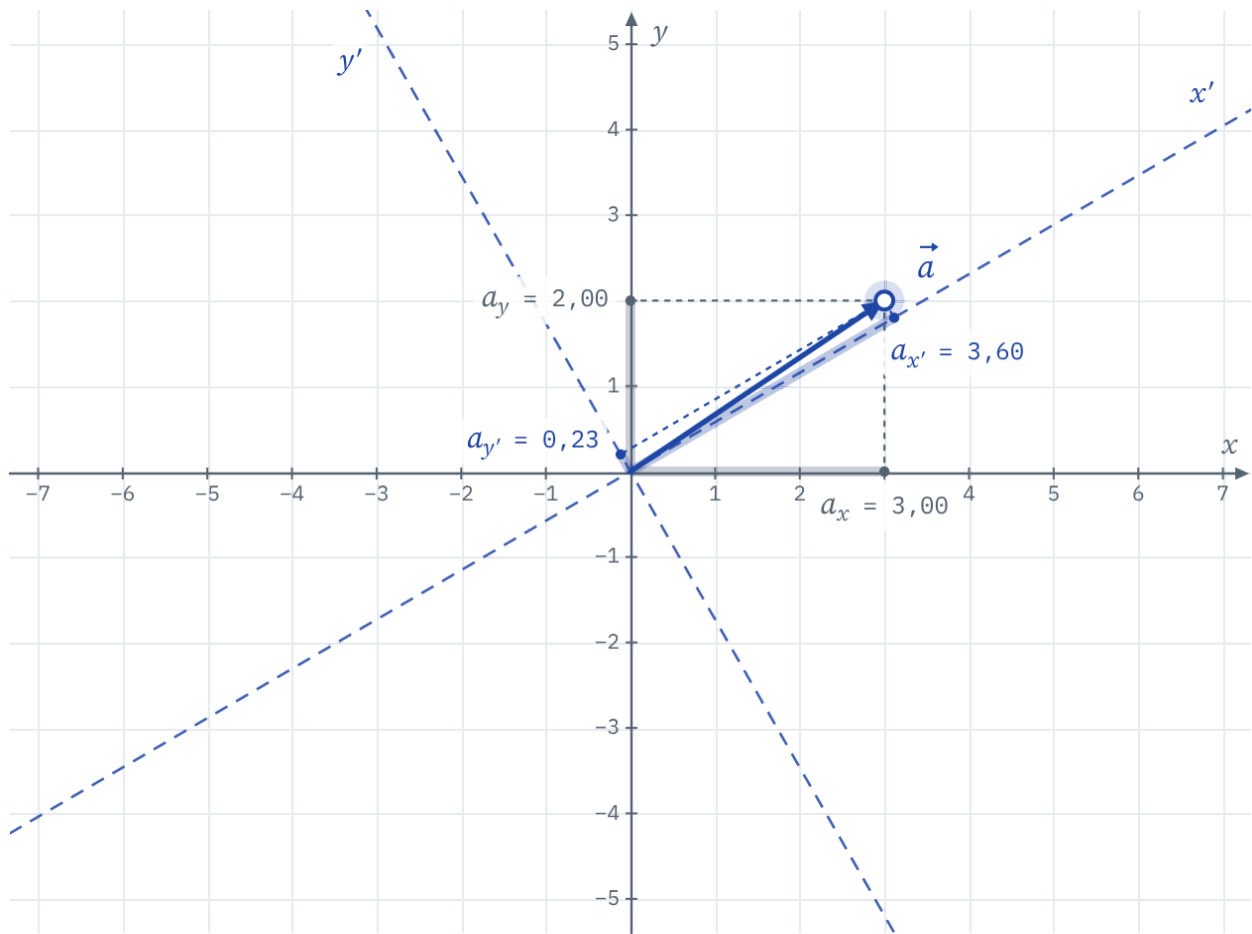
Wektor to wielkość opisana w każdym układzie osi trzema liczbami, które przy obrocie osi przekształcają się tak jak współrzędne przesunięcia. Długość wektora

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

jest w każdym układzie taka sama. Wersor kierunku $\vec{a}$ to $\hat{a} = \vec{a}/|\vec{a}|$, wektor o długości 1.

SYMULACJA 1

Składowe zależą od osi, długość nie. Przeciągnij koniec wektora $\vec{a}$ i obracaj osie Małgosi. Jej składowe się zmieniają, a suma ich kwadratów zostaje taka sama jak u Jasia.



— wektor a — osie Jasia x, y - - - osie Małgosi x', y'

u Jasia $[3,00; 2,00]$

u Małgosi $[3,60; 0,23]$

$|a|$ 3,61

$a_x^2 + a_y^2$ 13,00

$a_{x'}^2 + a_{y'}^2$ 13,00

Stan na rysunku: $a = [3,00; 2,00]$ w osiach Jasia, osie Małgosi obrócone o $\theta = 30^\circ$, w nich $a = [3,60; 0,23]$; $|a| = 3,61$ w obu układach.

Zysk z tej definicji jest ogromny. Jeśli prawo fizyki zapiszesz jako równość wektorów, na przykład $\vec{F} = m\vec{a}$, to w każdym układzie oznacza ono trzy równania na składowe. Obie strony przekształcają się przy obrocie tak samo, więc równość, prawdziwa u Jasia, jest automatycznie prawdziwa u Małgosi. Zapis wektorowy wbudowuje symetrię przestrzeni w samo równanie.

FLP I-11-6

1.3 To samo po szkolnemu: odcinek skierowany

Na wykładzie i na kolokwium spotkasz definicję geometryczną. Obie definicje się uzupełniają: odcinek skierowany ma punkt zaczepienia, a trójka składowych go nie ma. Zobaczysz niżej, kiedy

🔑 DEFINICJA · JAK NA KOŁOKWIUM

Wektor $\vec{AB}$ to uporządkowana para punktów: **początek** (punkt zaczepienia) A i **koniec** B . Wektor niezerowy ma trzy cechy:

- **moduł** (długość): długość odcinka AB ,
- **kierunek**: kierunek prostej, na której leży, czyli jego linii działania,
- **zwrot**: od A do B .

Wektor zerowy $\vec{0}$ (początek pokrywa się z końcem) nie ma kierunku ani zwrotu. Umawiamy się jednak, że wektor zerowy jest równoległy i prostopadły do każdego wektora. Dwa wektory niezerowe są **równe**, gdy mają ten sam kierunek, zwrot i moduł. Punkty zaczepienia mogą być różne. Wszystkie wektory zerowe są sobie równe.

Czy dwa równe wektory zaczepione w różnych punktach są w danym zagadnieniu „tym samym”? To zależy od fizyki. Leitner rozróżnia trzy przypadki (przykład z przesunięciem jest nasz):

- **Wektory umiejscowione**: liczy się punkt zaczepienia. Przykłady: wektor położenia $\vec{r} = \vec{OM}$ oraz siła działająca na ciało sprężyste, bo przyłożona gdzie indziej odkształci je inaczej.
- **Wektory ślizgające się**: można je przesuwąć wzdłuż linii działania, ale nie poza nią. Przykład: siła w statyce ciała sztywnego. Przesunięta wzdłuż linii działania nie zmienia równowagi, a przesunięta w bok zmienia, bo zmienia się jej moment. Drugi przykład: prędkość kątowa bryły obracającej się wokół ustalonej osi, czyli wektor leżący na osi, zaczepiony w dowolnym jej punkcie.
- **Wektory swobodne**: punkt zaczepienia nie ma znaczenia. Przykłady: przesunięcie oraz moment pary sił w statyce ciała sztywnego.

Rachunek na składowych z części 1.1–1.2 opisuje wektor swobodny. Wszystkie równe odcinki skierowane mają te same składowe $B - A$, a przy obrocie osi składowe zmieniają się według reguły z części 1.2. Gdy punkt zaczepienia ma znaczenie, zapamiętujemy go osobno. Tak robimy na przykład przy momencie siły w części 4.

Przykład 1.1

Kiedy trzy liczby nie są wektorem

Wektor $\vec{a}$ ma u Jasia składowe $[2, 1]$. Osie Małgosi są obrócone o 90° . (a) Oblicz składowe $\vec{a}$ u Małgosi. (b) Ktoś twierdzi, że para $\vec{q} = [a_x^2, a_y]$ też jest wektorem. Sprawdź to.

- 1 Dla $\theta = 90^\circ$: $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$, więc $a_{x'} = a_y = 1$, $a_{y'} = -a_x = -2$. U Małgosi $\vec{a} = [1, -2]$. Długość u obojga wynosi $\sqrt{5}$.
- 2 U Jasia $\vec{q} = [2^2, 1] = [4, 1]$. Gdyby $\vec{q}$ było wektorem, u Małgosi miałyby składowe z tej samej reguły obrotu: $[q_y, -q_x] = [1, -4]$.
- 3 Małgosia liczy jednak $\vec{q}$ ze swoich składowych $\vec{a}$: $[a_x^2, a_y] = [1, -2]$. To nie jest $[1, -4]$.

Wynik: (a) $[1, -2]$; (b) $\vec{q}$ nie jest wektorem. Jego „składowe” zależą od tego, kto liczy, w sposób niezgodny z regułą obrotu.

Sprawdzenie: dla prawdziwego wektora oba sposoby muszą dać to samo. Dla $2\vec{a}$ wychodzi $[2, -4]$ jednym i drugim sposobem ✓

Przykład 1.2

Siła o zadanej wartości i kierunku

Lina ciągnie hak w punkcie $A(1, 2, 0)$ w stronę punktu zaczepienia $B(4, 6, 12)$ (metry) siłą o wartości 26 N. Zapisz siłę jako wektor.

- 1 Kierunek liny: $\vec{AB} = B - A = [3, 4, 12]$ m, długość $\sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ m.
- 2 Wersor kierunku: $\hat{u} = \frac{1}{13}[3, 4, 12]$.
- 3 Siła to wartość razy wersor: $\vec{F} = 26 \text{ N} \cdot \hat{u} = [6, 8, 24]$ N.

Wynik: $\vec{F} = [6, 8, 24]$ N.

Sprawdzenie: $\sqrt{36 + 64 + 576} = \sqrt{676} = 26 \text{ N} \checkmark$. Wektor $\vec{F}$ jest równoległy do $\vec{AB}$, bo $\vec{F} = 2 \text{ N/m} \cdot \vec{AB} \checkmark$

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

6 zadań · ok. 35 min

- 1 Oblicz długość wektora $\vec{a} = [3, -4, 12]$ i jego wersor.



- 2 Dane są punkty $P(-1, 4, 2)$ i $Q(5, -4, 2)$. Wyznacz $\vec{PQ}$, jego długość i środek odcinka PQ .
- 3 U Jasia $\vec{a} = [2, 2]$. Oblicz składowe u Małgosi, której osie są obrócone o 30° . O jaki kąt Małgosia musiałaby obrócić osie, żeby wektor miał u niej tylko składową x' ?
- 4 W płaszczyźnie xy z wektora prędkości $\vec{v} = [v_x, v_y]$ tworzymy parę $\vec{w} = [v_y, -v_x]$. Czy $\vec{w}$ jest wektorem? Sprawdź regułę obrotu dla dowolnego θ i powiedz, co geometrycznie robi to przekształcenie.
- 5 Do jakiego rodzaju (umiejscowione, ślizgające się, swobodne) należą w opisanych sytuacjach następujące wektory: (a) wektor położenia samolotu względem wieży kontrolnej, (b) siła, którą ciągniesz za linę przywiązaną do ciężkiej, sztywnej skrzyni stojącej na podłodze, gdy pytasz tylko o to, czy skrzynia się przewróci, (c) moment pary sił, którą kręcisz kierownicą, (d) prędkość kątowna koła obracającego się wokół osi?
- 6 Oszacuj, w układzie związanym ze Słońcem, długość wektora przemieszczenia Ziemi w ciągu pół roku i drogę, jaką Ziemia w tym czasie przebywa. Przyjmij orbitę kołową o promieniu $1,5 \cdot 10^{11}$ m. Ile wynosi przemieszczenie po pełnym roku?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

Więcej zadań: Leitner §21–23.

2 Dodawanie, odejmowanie, rozkład

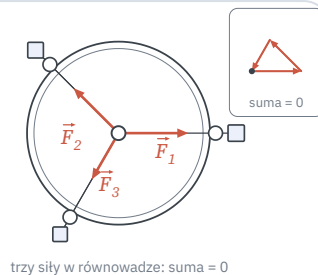
2.1 Dodawanie: po składowych i „głowa do ogona”

Sumę dwóch wektorów definiujemy po składowych: $\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$. Feynman zadaje od razu ważne pytanie: czy ta nowa trójka jest wektorem? Jest, bo reguła obrotu jest liniowa. Obrócone składowe sumy są sumą obróconych składowych. (FLP I-11-5)

Geometrycznie oznacza to, że początek $\vec{b}$ przykładamy do końca $\vec{a}$, a suma prowadzi od początku $\vec{a}$ do końca $\vec{b}$. Kolejność nie ma znaczenia, bo oba sposoby dają przekątną tego samego równoległoboku: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Mnożenie przez liczbę k zmienia długość $|k|$ razy. Gdy $k < 0$, zmienia też zwrot.

SKĄD TO WIEMY?

To, że siły dodają się jak przesunięcia, nie wynika z matematyki, tylko z doświadczenia. Najprostszy test to stolik sił. Pierścień trzymany przez trzy nici z odważnikami zostaje w spoczynku dokładnie wtedy, gdy strzałki sił trzech nici (o wartościach równych ciężarom odważników), ułożone głowa do ogona, zamykają się w trójkąt. Już w 1586 roku Simon Stevin doszedł do równowagi sił na równi bez żadnych wzorów, rysując zamknięty łańcuch kul przewieszony przez pryzmat (część 2.3). Prawo równoległoboku sił Newton zapisał jako wniosek I do zasad dynamiki.



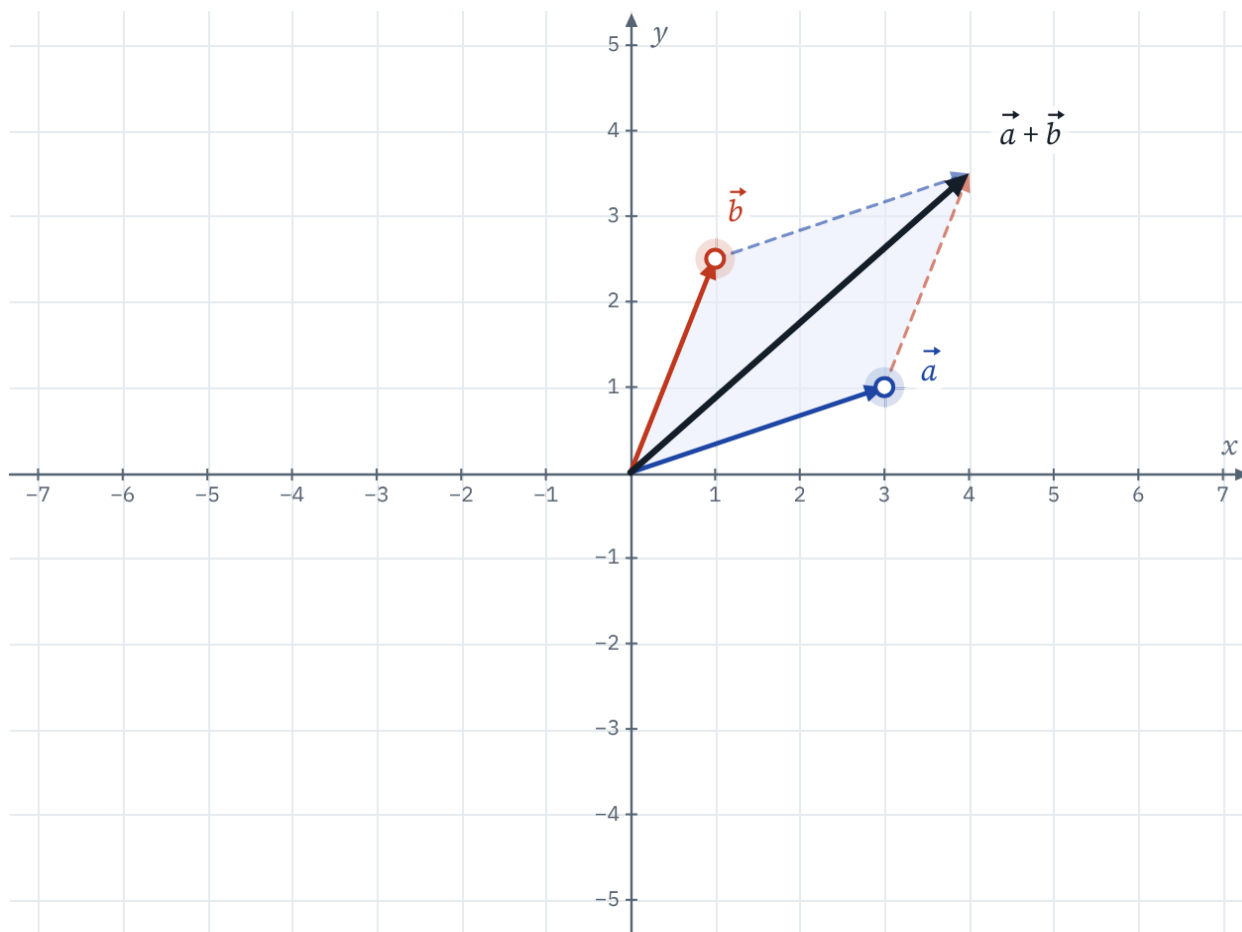
2.2 Odejmowanie: od końca $\vec{b}$ do końca $\vec{a}$

Różnica $\vec{a} - \vec{b}$ to taki wektor $\vec{d}$, że $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$. Na rysunku to strzałka od końca $\vec{b}$ do końca $\vec{a}$, gdy oba wektory wychodzą z tego samego punktu. Feynman zauważa, że różnicę rysuje się nawet łatwiej niż sumę. FLP I-11-5



SYMULACJA 2

Działania na wektorach. Przeciągaj końce $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przełączaj sumę, różnicę i mnożenie przez liczbę. Porównaj $|\vec{a} + \vec{b}|$ z $|\vec{a}| + |\vec{b}|$.



— a — b — wynik - - przesunięte kopie

a [3,00; 1,00], $|a| = 3,16$

b [1,00; 2,50], $|b| = 2,69$

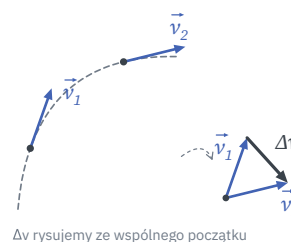
a + b [4,00; 3,50]

$|a + b|$ 5,32

$|a| + |b|$ 5,85

Suma: przyłóż początek b do końca a (albo początek a do końca b). Obie drogi kończą się w tym samym punkcie, to reguła równoległoboku.

Stan na rysunku: $a = [3,00; 1,00]$, $b = [1,00; 2,50]$; suma $a + b$ (reguła równoległoboku) = $[4,00; 3,50]$, $|a + b| = 5,32$, a $|a| + |b| = 5,85$.



Δv rysujemy ze wspólnego początku

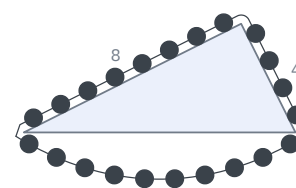
⚠ PUŁAPKA

Różnicę można odczytać z rysunku tylko wtedy, gdy oba wektory wychodzą z jednego punktu. Prędkość ciała na krzywym torze w dwóch chwilach to dwie strzałki w dwóch różnych punktach toru. Strzałka łącząca ich końce w tym miejscu nic nie znaczy. Feynman ostrzega przed tym wprost: trzeba narysować nowy rysunek, przenieść oba wektory do wspólnego początku i dopiero wtedy odczytać $\Delta \vec{v}$.

FLP I-11-6

2.3 Rozkład na składowe

Wektor o długości F nachylony pod kątem α do osi x ma składowe $F_x = F \cos \alpha$ i $F_y = F \sin \alpha$. W drugą stronę: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, a $\tan \alpha = F_y / F_x$, przy czym trzeba sprawdzić, w której ćwiartce leży wektor. Rozkład zamienia jedno zadanie dwuwymiarowe na dwa niezależne zadania jednowymiarowe. To najczęściej używany chwyt w całej mechanice.



Stevin 1586: łańcuch nie rusza się sam

Osie wybieramy tak, jak nam wygodnie, bo prawa fizyki od tego nie zależą (prolog). Na równi pochyłej kierujemy oś x wzdłuż zbocza. Ciężar ma wtedy składową $mg \sin \alpha$ wzdłuż równi i $mg \cos \alpha$ prostopadłe do niej. Stevin uzyskał to prawo bez żadnych wzorów. Gdyby łańcuch na przysmacie sam się przesunął, poruszałby się wiecznie, bo po przesunięciu wygląda tak samo. Dolna, zwisająca część łańcucha jest symetryczna, więc można ją odciąć bez zaburzania równowagi. Zostaje osiem kul na długim zboczu, które równoważą cztery kule na krótkim. Siła zsuwająca jest więc proporcjonalna do $h/L = \sin \alpha$.

2.4 Prędkości względne

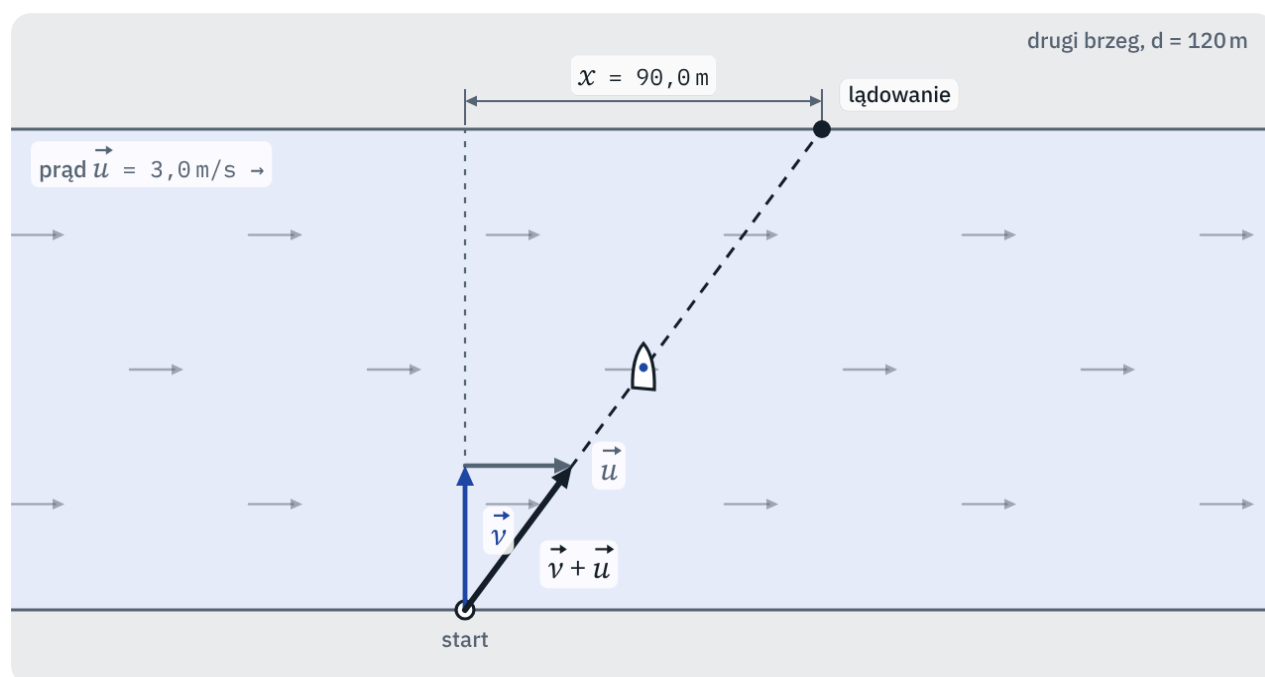
Prędkość łodzi względem brzegu jest sumą wektorów: prędkości łodzi względem wody i prędkości wody względem brzegu,

$$\vec{v}_{\text{brzeg}} = \vec{v}_{\text{wzgl. wody}} + \vec{u}_{\text{wody}}$$

Ten sam wzór opisuje samolot w wietrze i deszcz widziany z jadącego pociągu.

SYMULACJA 3

Przeprawa przez rzekę o szerokości 120 m, łódź płynie 4 m/s względem wody. Zmieniaj prąd u i kurs dzioba β . Czas przeprawy zależy tylko od składowej prędkości w poprzek rzeki, a znoszenie to składowa wzdłuż rzeki pomnożona przez ten czas.



— prędkość łodzi względem wody v — prąd u — prędkość względem brzegu

v względem brzegu $[3.00; 4.00] \text{ m/s}$, $|\cdot| = 5.00 \text{ m/s}$

czas t 30.0 s

znoszenie x 90.0 m

naprzeciw przy $\beta = \arcsin(u/v) = 48.6^\circ$

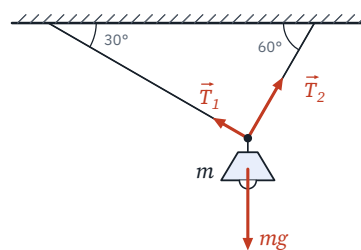
Stan na rysunku: $d = 120 \text{ m}$, $v = 4 \text{ m/s}$, $u = 3.0 \text{ m/s}$, $\beta = 0^\circ$; $t = 30.0 \text{ s}$, znoszenie $x = 90.0 \text{ m}$. Naprzeciw startu łódź przypływie przy $\beta = 48.6^\circ$.

Przykład 2.1

Lampa na dwóch linach

Lampa o masie 10 kg wisi na dwóch linach przymocowanych do sufitu. Lewa lina tworzy z poziomem kąt 30° , prawa 60° . Oblicz siły naciągu lin.

- 1 Lampa spoczywa, więc suma sił jest zerowa: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$. Rozkładamy ją na dwa równania.
- 2 Poziomo: $T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 60^\circ$, stąd $T_2 = \sqrt{3} T_1$.
- 3 Pionowo: $T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = mg$, czyli $\frac{1}{2}T_1 + \frac{3}{2}T_1 = 2T_1 = mg$.
- 4 $T_1 = \frac{1}{2}mg = 49,05 \text{ N}$, $T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \approx 84,96 \text{ N}$.



Siły działające na lampę

Wynik: $T_1 \approx 49,1 \text{ N}$, $T_2 \approx 85,0 \text{ N}$.

Sprawdzenie: bardziej stroma lina niesie więcej ciężaru ✓. Liny są prostopadłe ($30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$), więc $T_1^2 + T_2^2 = (mg)^2$: $49,05^2 + 84,96^2 = 98,1^2$ ✓

Przykład 2.2

Przyspieszenie przy stałej szybkości

Samochód jedzie na wschód z prędkością 20 m/s, a po 4 s jedzie na północ, też z prędkością 20 m/s. Oblicz zmianę prędkości i średnie przyspieszenie.

- 1 Oś x na wschód, y na północ: $\vec{v}_1 = [20, 0]$, $\vec{v}_2 = [0, 20]$ m/s. Oba wektory rysujemy ze wspólnego początku.
- 2 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = [-20, 20]$ m/s, $|\Delta\vec{v}| = 20\sqrt{2} \approx 28,3$ m/s, kierunek na północny zachód.
- 3 $\vec{a}_{\text{sr}} = \Delta\vec{v}/\Delta t = [-5, 5]$ m/s², wartość $\approx 7,07$ m/s².

Wynik: $|\Delta\vec{v}| \approx 28,3 \text{ m/s}$, $|\vec{a}_{\text{sr}}| \approx 7,07 \text{ m/s}^2$ na północny zachód, choć szybkość cały czas wynosi 20 m/s.

Sprawdzenie: szybkość się nie zmieniała, a przyspieszenie jest duże. Skręt to też przyspieszenie, bo zmienia się wektor, a nie tylko jego długość ✓ (zob. Dział 1: Ruch i jego przyczyny, §3).

- 1 Dla $\vec{a} = [2, -1, 3]$ i $\vec{b} = [-1, 4, 0]$ oblicz $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ oraz $3\vec{a} - 2\vec{b}$.
■ ■ ■
- 2 Walizkę ciągniesz siłą 80 N skierowaną pod kątem 25° do poziomu. Oblicz składową poziomą i pionową siły.
■ ■ ■
- 3 Lampę o masie 5 kg zawieszono na środku linki rozpiętej między dwoma słupami. Obie połowy linki tworzą z poziomem kąt α . Wyznacz naciąg linki dla $\alpha = 10^\circ$. Dlaczego linki z ciężarem nie da się napiąć idealnie poziomo?
■ ■ ■
- 4 Samolot leci względem powietrza z prędkością 200 km/h, a wiatr wieje z zachodu na wschód z prędkością 50 km/h. Jak pilot musi ustawić dziób, żeby lecieć dokładnie na północ? Jaka będzie prędkość względem ziemi?
■ ■ ■
- 5 Samochód jedzie po rondzie o promieniu 20 m ze stałą szybkością 10 m/s. Oblicz $|\Delta \vec{v}|$ i średnie przyspieszenie po przejechaniu ćwierci okręgu. Porównaj wynik z v^2/R i wyjaśnij różnicę.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Więcej zadań: Leitner §21–23.

3 Iloczyn skalarny

3.1 Pierwszy niezmiennik: długość

Składowe wektora zmieniają się przy obrocie, ale długość kroku w przestrzeni jest dla wszystkich taka sama. Feynman robi z tego narzędzie. Wielkość

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

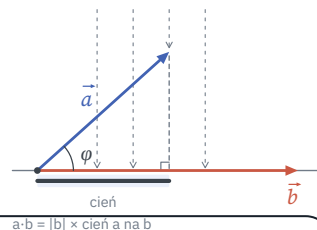
jest liczbą, która nie zależy od układu, czyli **skalarem**. Dla dwóch wektorów definiujemy **iloczyn skalarny**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Dlaczego to też jest niezmiennik? Suma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ jest wektorem, więc $\vec{c} \cdot \vec{c}$ jest niezmienniczy. Po rozpisaniu $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$. Wszystkie wyrazy poza środkowym są niezmiennicze, więc środkowy też musi być. FLP I-11-7

3.2 Znaczenie geometryczne

Skoro $\vec{a} \cdot \vec{b}$ nie zależy od osi, możemy go policzyć w najwygodniejszym układzie. Feynman wybiera oś x wzdłuż $\vec{a}$. Wtedy $\vec{a} = [a, 0, 0]$ i zostaje tylko $a b_x$, a $b_x = b \cos \varphi$ to składowa $\vec{b}$ wzdłuż $\vec{a}$. Wynik prawdziwy w jednym układzie jest prawdziwy w każdym:



WYNIK · ILOCZYN SKALARNY

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

To długość jednego wektora razy rzut drugiego na jego kierunek. Wynik jest dodatni dla kąta ostrego, zerowy dla prostego i ujemny dla rozwartego. W szczególności $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Dwa zastosowania wynikają od razu. Kąt między wektorami: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$. Składowa wektora w dowolnym kierunku: $a_{\parallel} = \vec{a} \cdot \hat{n}$, gdzie $\hat{n}$ to wersor tego kierunku. W szczególności $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}$. Wersory osi spełniają $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ oraz $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Cosinusy kierunkowe. Kąty α, β, γ , które niezerowy wektor tworzy z dodatnimi półosiami x, y, z (kąty od 0° do 180°), wynikają z iloczynów skalarnych z wersorami osi, np. $\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{i} / |\vec{a}|$:

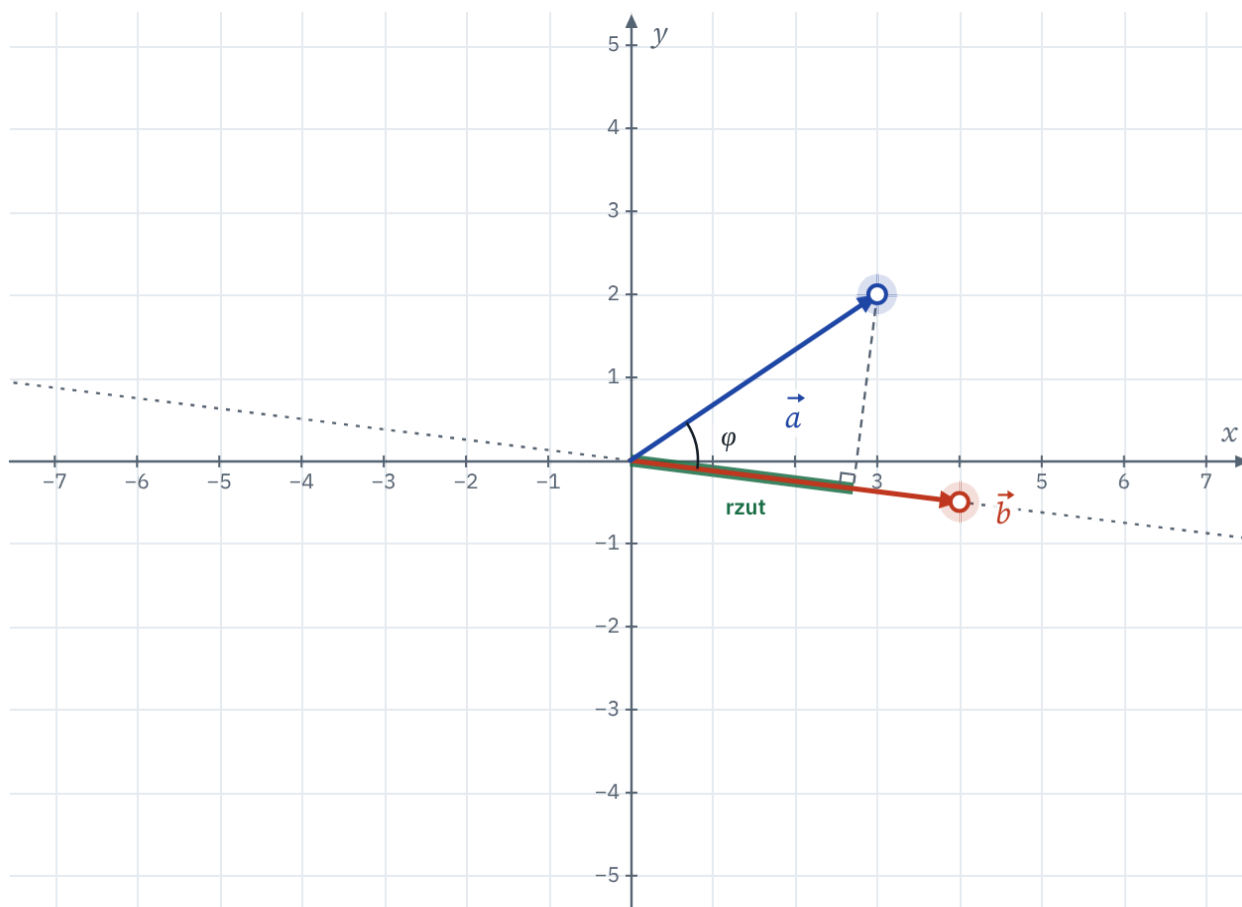
Leitner §25

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

To po prostu składowe wersora $\hat{a}$, a wersor ma długość 1, stąd suma kwadratów. Dwa kąty kierunkowe wyznaczają więc trzeci, z dokładnością do znaku cosinusa, o ile $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \leq 1$.

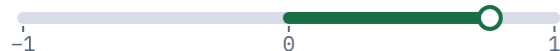
SYMULACJA 4

Iloczyn skalarny jako cień. Pogrubiony odcinek to rzut $\vec{a}$ na kierunek $\vec{b}$: zielony, gdy iloczyn jest dodatni, czerwony, gdy jest ujemny. Przy kącie rozwartym rzut wypada „do tyłu”. W trybie fizycznym ten sam rachunek daje pracę siły.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 11,00$$

$$\cos \varphi = 0,757$$



— pierwszy wektor — drugi wektor — rzut: dodatni — rzut: ujemny
 - - prosta wzdłuż drugiego wektora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 11,00$$

$$a_x b_x + a_y b_y = 11,00$$

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 11,00$$

$$\varphi = 40,8^\circ$$

$$\text{rzut } \vec{a} \text{ na kierunek } \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} / |\vec{b}| = 2,73$$

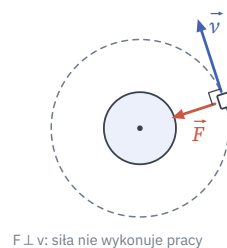
Stan na rysunku: $\vec{a} = [3,00; 2,00]$, $\vec{b} = [4,00; -0,50]$, $\varphi = 40,8^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 11,00$, rzut = 2,73.

3.3 Gdzie to jest w fizyce

Praca stałej siły na prostym odcinku to $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. Liczy się tylko składowa siły wzdłuż przesunięcia. Moc to $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Energia kinetyczna w trzech wymiarach to $\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Energia nie ma kierunku, więc w zapisie wektorowym musi być skalarem, a skalar z jednego wektora daje właśnie iloczyn skalarny. (FLP I-11-7)

SKĄD TO WIEMY?

Że siła prostopadła do ruchu nie zmienia szybkości, widać na każdej orbicie kołowej. Grawitacja Ziemi przez cały czas ciągnie satelitę do środka, prostopadle do jego prędkości. Satelita na orbicie kołowej krąży więc latami z niezmienną szybkością. Jego tor zakrzywia się, ale energia kinetyczna się nie zmienia, bo $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ i moc siły jest zerowa.



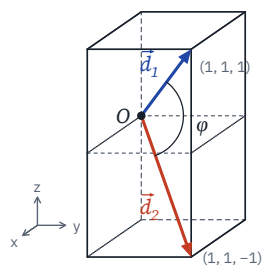
$F \perp v$: siła nie wykonuje pracy

Przykład 3.1

Kąt między przekątnymi sześcianu

Dwa sześciany jednostkowe stoją jeden na drugim. Z jednego z ich wspólnych wierzchołków, O , wychodzą przekątne $\vec{d}_1 = [1, 1, 1]$ (górnego sześcianu) i $\vec{d}_2 = [1, 1, -1]$ (dolnego). Jaki kąt tworzą? Jaki kąt tworzy przekątna z krawędzią?

- 1 $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 1 + 1 - 1 = 1$, a $|\vec{d}_1| = |\vec{d}_2| = \sqrt{3}$.
- 2 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, stąd $\varphi \approx 70,5^\circ$.
- 3 Krawędź $\vec{i} = [1, 0, 0]$: $\cos \psi = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{i}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, stąd $\psi \approx 54,7^\circ$.



Dwie przekątne wychodzące z punktu O

Wynik: $\varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5^\circ$, a przekątna z krawędzią tworzy kąt $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,7^\circ$.

Sprawdzenie: bez współrzędnych ten kąt trudno odgadnąć. Iloczyn skalarny zamienia geometrię przestrzenną w trzy mnożenia $\checkmark$. Kąt przyległy, $180^\circ - 70,5^\circ \approx 109,5^\circ$, to kąt między wiązaniami C-H w metanie (między $[1, 1, 1]$ a $[-1, -1, 1]$).

Przykład 3.2

Praca i moc przy ciągnięciu sanek

Na drodze 50 m po płaskim terenie ciągniemy sanki siłą 60 N skierowaną pod kątem 30° do poziomu. Oblicz pracę siły. Jaką moc rozwijamy, idąc z prędkością 2 m/s?

- 1 $\vec{F} = [60 \cos 30^\circ, 60 \sin 30^\circ] \approx [51,96, 30]$ N, $\Delta \vec{r} = [50, 0]$ m.
- 2 $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = 51,96 \cdot 50 + 30 \cdot 0 \approx 2598$ J. Składowa pionowa pracy nie wykonuje.
- 3 $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 51,96 \cdot 2 \approx 104$ W.

Wynik: $W \approx 2,6$ kJ, $P \approx 104$ W.

Sprawdzenie: $W = F s \cos \alpha = 60 \cdot 50 \cdot 0,866 \checkmark$. Składowa pionowa siły nie wykonuje pracy, ale ma znaczenie: zmniejsza nacisk sanek, a więc i tarcie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Oblicz $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i kąt między $\vec{a} = [2, -1, 3]$ i $\vec{b} = [-1, 4, 0]$.
■ ■ ■
- 2 Dla jakiego t wektory $[t, 2, 1]$ i $[3, -t, 4]$ są prostopadłe?
■ ■ ■
- 3 Gładka rynna opada wzdłuż kierunku $\vec{d} = [4, 0, -3]$ (oś z w górę). Oblicz składową przyspieszenia ziemskiego $\vec{g} = [0, 0, -9,81]$ m/s² wzdłuż rynny. Jakie jest przyspieszenie kulki zsuwającej się bez tarcia?
■ ■ ■
- 4 Rozpisz $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ i wyprowadź twierdzenie cosinusów dla trójkąta o bokach $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|$.
■ ■ ■
- 5 Orbita Ziemi jest prawie kołowa. Jaką pracę wykonuje grawitacja Słońca nad Ziemią w ciągu całego roku? Orbita nie jest jednak dokładnie kołowa: w peryhelium Ziemia ma prędkość ok. 30,29 km/s, a w aphelium ok. 29,29 km/s. Oszacuj pracę grawitacji Słońca w ciągu pół roku od peryhelium do aphelium ($M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg). Gdzie na orbicie $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$?
■ ■ ■
- 6 Dwa kąty kierunkowe pewnego niezerowego wektora wynoszą $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 120^\circ$. Jaki może być trzeci kąt γ ? Podaj wersor tego wektora dla każdego rozwiązania. (Według Leitnera, przykład 25.6.)
■ ■ ■

4 Iloczyn wektorowy

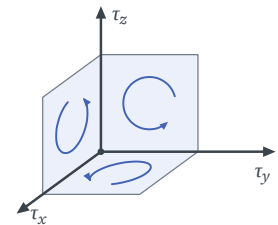
4.1 Skręt w płaszczyźnie

Feynman wprowadza iloczyn wektorowy od strony fizyki, a nie definicji. Zna już moment siły w płaszczyźnie xy : $\tau_{xy} = xF_y - yF_x$. To liczba, która mówi, jak mocno siła $\vec{F}$ przyłożona w punkcie (x, y) skręca ciało wokół osi z . W trzech wymiarach są trzy takie płaszczyzny i trzy takie liczby:

FLP I-20-1

$$\tau_{xy} = xF_y - yF_x, \quad \tau_{yz} = yF_z - zF_y, \quad \tau_{zx} = zF_x - xF_z.$$

A co z płaszczyzną ustawioną ukośnie? Czy każda nowa płaszczyzna wymaga nowego wzoru? Feynman sprawdza, co dzieje się z tymi trzema liczbami przy obrocie osi, i dostaje zaskakujący wynik. Przekształcają się *dokładnie* jak składowe wektora, jeśli skręt w płaszczyźnie yz nazwiemy składową x , skręt w zx składową y , a skręt w xy składową z . Każdemu skrętowi w płaszczyźnie odpowiada oś do niej prostopadła.



skręt w płaszczyźnie $\leftrightarrow$ oś prostopadła

To szczęśliwy cud, że z płaszczyzną możemy powiązać jedną oś, a więc z momentem siły wektor. Jest to szczególna własność przestrzeni trójwymiarowej.

R. Feynman, FLP I-20-1 (tłum. własne)

W dwóch wymiarach jest jedna płaszczyzna, więc moment siły to zwykła liczba. W czterech byłoby sześć płaszczyzn i sześć liczb, których nie da się zapisać jako jednego czterowymiarowego wektora. Tylko w trzech wymiarach liczba płaszczyzn równa się liczbie osi.

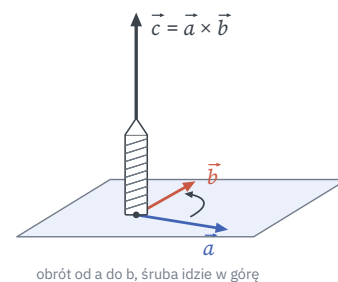
4.2 Definicja i własności

Ten sam przepis zastosowany do dowolnych dwóch wektorów daje nowy wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$:

DEFINICJA · ILOCZYN WEKTOROWY

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do $\vec{a}$ i do $\vec{b}$. Jego długość $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ to pole równoległoboku rozpiętego na obu wektorach. Zwrot wyznacza reguła śruby prawoskrętnej: obracamy $\vec{a}$ w stronę $\vec{b}$ o kąt mniejszy niż 180° , a śruba przesuwa się w kierunku $\vec{c}$.



Z wzoru na składowe wynikają od razu najważniejsze własności. Zamiana kolejności zmienia znak: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$, a więc $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Wektory równoległe dają zero, bo nie rozpinają żadnego pola. Dla wersorów osi $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. Kolejność cykliczna daje plus, odwrócona daje minus. Iloczyn wektorowy nie jest łączny, więc nawiasy mają znaczenie: $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$, ale $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = -\vec{j}$.

WARUNEK · RÓWNOLEGŁOŚĆ (KOLINEARNOŚĆ)

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} = k \vec{b} \text{ dla pewnego } k \text{ (gdy } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

W składowych (dla $\vec{b} \neq \vec{0}$): $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, o ile mianowniki są niezerowe. Gdy któraś składowa $\vec{b}$ jest zerem, odpowiadająca jej składowa $\vec{a}$ też musi być zerem. Prostopadłość sprawdzamy iloczynem skalarnym, równoległość iloczynem wektorowym.

Podwójny iloczyn wektorowy. Wektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ jest prostopadły do $\vec{b} \times \vec{c}$, więc (gdy $\vec{b} \nparallel \vec{c}$) jest równoległy do płaszczyzny rozpiętej na $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Da się go zapisać jako ich kombinację liniową:

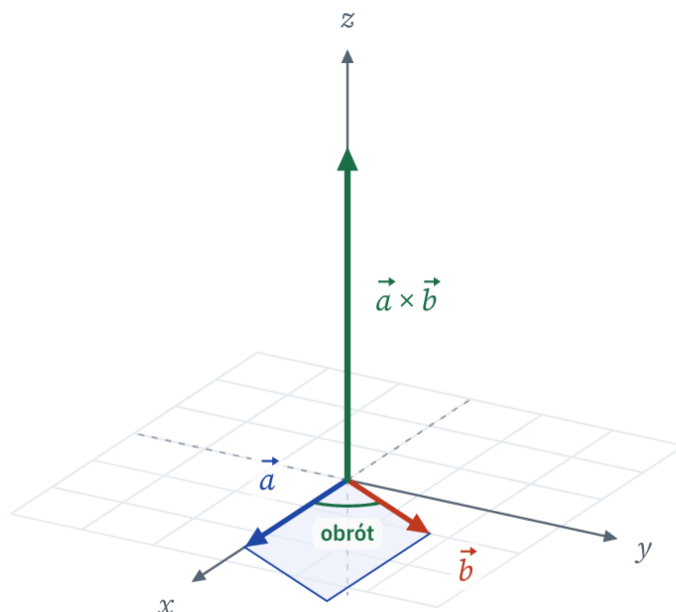
FLP I-20-1 · Leitner §24

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Mnemotechnika: „BAC minus CAB”. Wzór przydaje się w fizyce wszędzie tam, gdzie iloczyn wektorowy występuje dwa razy, na przykład w przyspieszeniu dośrodkowym punktu bryły wirującej ze stałą prędkością kątową (zadanie 7 w części 4).

SYMULACJA 5

Iloczyn wektorowy w przestrzeni. Zielona strzałka ma długość równą polu równoległoboku i jest do niego prostopadła. Zmień kąt φ powyżej 180° albo zamień kolejność czynników, a strzałka obróci się w dół. Przeciągnij wykres, żeby obejrzeć go z innej strony.



— a — b — iloczyn wektorowy

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| |\sin \varphi| = 4,33 = \text{pole równoległoboku}$

składowe $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ $[0,00; 0,00; 4,33]$

zwrot: w górę (+z)

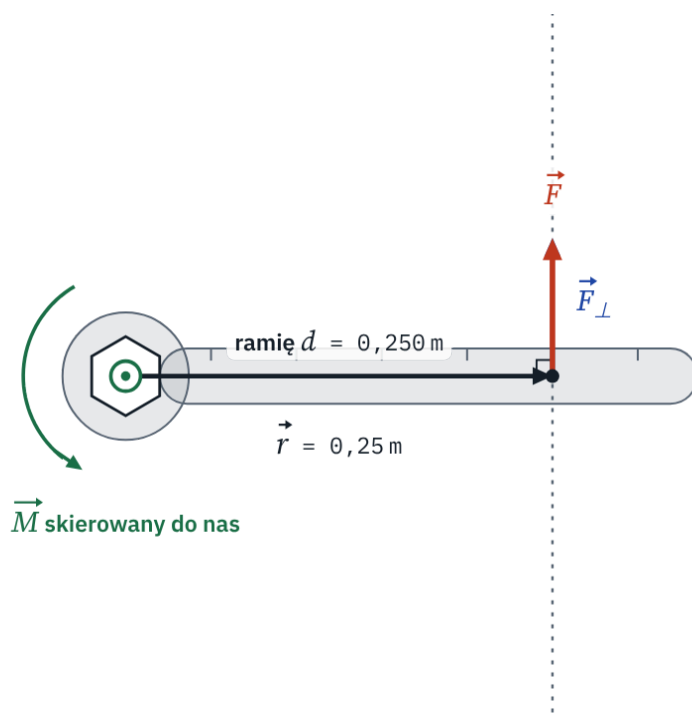
Stan na rysunku: $|\mathbf{a}| = 2,5$, $|\mathbf{b}| = 2,0$, $\varphi = 60^\circ$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [0,00; 0,00; 4,33]$; pole równoległoboku 4,33, zwrot w górę (+z).

4.3 Gdzie to jest w fizyce

Moment siły względem punktu O : $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, gdzie $\vec{r}$ prowadzi od O do punktu przyłożenia siły. Jego wartość $rF \sin \theta$ można czytać na dwa sposoby: siła razy ramię $d = r \sin \theta$ albo odległość r razy składowa siły prostopadła do $\vec{r}$. **Moment pędu**: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. **Siła Lorentza** na ładunek w polu magnetycznym: $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$. Prędkość punktu bryły obracającej się z prędkością kątową $\vec{\omega}$: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

SYMULACJA 6

Klucz i moment siły. Składowa siły wzdłuż klucza (szara) niczego nie odkręca, liczy się tylko składowa prostopadła (niebieska). Przesuń punkt przyłożenia i zmieniaj kąt, a zobaczysz, dlaczego klamka jest przy krawędzi drzwi, a nie przy zawiasach.



— r — siła F — $F_{\perp}$ (obraca) — $F_{\parallel}$ (nie obraca) — moment M

$$M = r F \sin \theta \quad 25,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$F_{\perp} = F \sin \theta \quad 100,0 \text{ N}$$

$$\text{ramię } d = r \sin \theta \quad 0,250 \text{ m}$$

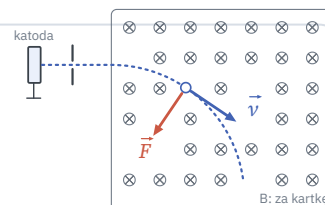
siła potrzebna na $M = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$ przy tym r i θ 120 N

Stan na rysunku: $r = 0,25 \text{ m}$, $F = 100 \text{ N}$, $\theta = 90^\circ$; ramię $d = 0,250 \text{ m}$, $M = r F \sin \theta = 25,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Na $M = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$ potrzeba 120 N.

SKĄD TO WIEMY?

Że siła magnetyczna jest prostopadła i do prędkości, i do pola, widać w każdej lampie z wiązką elektronów, takiej jak lampa Thomsona z 1897 roku. Wiązka biegnąca w polu magnetycznym skręca w bok, prostopadle do obu wektorów.

Gdy odwrócimy pole, skręca w przeciwną stronę. Gdy wiązka biegnie wzdłuż pola, nie skręca wcale, bo $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$. W polu skierowanym za ekran ($\otimes$) elektrony lecące w prawo skręcają w dół. Dodatni ładunek skręciłby w górę.



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (q = -e)$$

wiązka skręca prostopadle do $\vec{v}$ i do $\vec{B}$

⚠️ PUŁAPKA

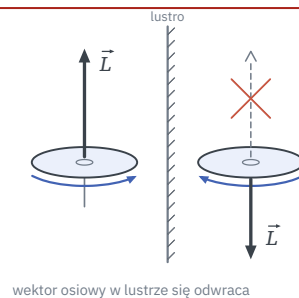
Reguła prawej dłoni to umowa, a nie prawo przyrody.

Feynman nazywa ją „wiecznym przypomnieniem”, że $\vec{a} \times \vec{b}$ jest trochę innym obiektem niż $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zwykle wektory, takie jak $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$ i $\vec{E}$, nazywamy **biegunowymi**. Wektory

zdefiniowane przez jeden iloczyn wektorowy, takie jak $\vec{M}$ i

$\vec{L}$, a także $\vec{\omega}$ i $\vec{B}$, to **wektory osiowe** (pseudowektory). W lustrze odbijają się „na odwrót”. Wzór $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ działa w lustrzanym świecie tylko dlatego, że $\vec{B}$ też jest osiowy i odwrócenie się znosi.

FLP I-20-1, I-52-5



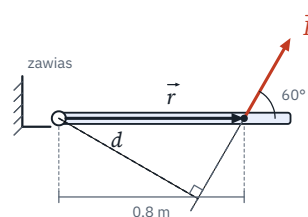
wektor osiowy w lustrze się odwraca

Przykład 4.1

Gdzie przyłożyć siłę do drzwi

Drzwi pchamy siłą 40 N przyłożoną 0,8 m od zawiasów, pod kątem 60° do płaszczyzny drzwi (widok z góry). Oblicz moment siły względem osi zawiasów. Jaka siła prostopadła do drzwi dałaby ten sam moment, gdyby przyłożyć ją 0,8 m od zawiasów, a jaka w odległości 0,2 m?

- 1 Oś x wzdłuż drzwi, y w płaszczyźnie podłogi (na rysunku do góry), z pionowo w górę, czyli w stronę patrzącego z góry: $\vec{r} = [0,8, 0, 0] \text{ m}$, $\vec{F} = [40 \cos 60^\circ, 40 \sin 60^\circ, 0] \approx [20, 34,64, 0] \text{ N}$.
- 2 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [0, 0, r_x F_y - r_y F_x] = [0, 0, 0,8 \cdot 34,64] \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 3 $M_z \approx 27,7 \text{ N} \cdot \text{m}$, czyli $rF \sin 60^\circ$. Składowa $F_x = 20 \text{ N}$ ciągnie wzdłuż drzwi i nic nie obraca.
- 4 Prostopadle w odległości 0,8 m: $F = 27,7/0,8 \approx 34,6 \text{ N}$. W odległości 0,2 m: $27,7/0,2 \approx 139 \text{ N}$.



Widok z góry: drzwi, $\vec{r}$ i $\vec{F}$

Wynik: $\vec{M} \approx [0, 0, 27,7] \text{ N} \cdot \text{m}$ (oś pionowa, w górę). Ten sam moment wymaga 34,6 N przy klamce i 139 N przy zawiasach.

Sprawdzenie: ramię siły $d = 0,8 \sin 60^\circ \approx 0,69 \text{ m}$, a $40 \cdot 0,69 \approx 27,7 \checkmark$. Moment rośnie liniowo z odległością od osi, więc klamkę montuje się przy krawędzi.

Przykład 4.2

Elektron w polu magnetycznym

Elektron ($q = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) leci z prędkością $\vec{v} = [3 \cdot 10^6, 0, 0] \text{ m/s}$ w polu $\vec{B} = [0, 0, 0,01] \text{ T}$. Oblicz siłę Lorentza i promień okręgu, po którym zacznie krążyć.

- $\vec{v} \times \vec{B} = v_x B_z (\vec{i} \times \vec{k}) = -v_x B_z \vec{j} = [0, -3 \cdot 10^4, 0]$ (w jednostkach SI).
- $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = (-1,60 \cdot 10^{-19}) \cdot (-3 \cdot 10^4) \vec{j} \approx [0, 4,8 \cdot 10^{-15}, 0] \text{ N}$. Ładunek ujemny odwraca kierunek.
- Siła jest prostopadła do $\vec{v}$, więc nie zmienia szybkości i działa jak siła dośrodkowa: $|q|vB = mv^2/r$, stąd $r = \frac{mv}{|q|B} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Wynik: $\vec{F} \approx [0, 4,8 \cdot 10^{-15}, 0] \text{ N}$, $r \approx 1,7 \text{ mm}$.

Sprawdzenie: $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ i $\vec{F} \cdot \vec{B} = 0 \checkmark$. Siła jest $\sim 10^{14}$ razy większa od ciężaru elektronu, $mg \approx 9 \cdot 10^{-30} \text{ N}$, dlatego w lampach grawitację pomija się bez wahania.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

7 zadań · ok. 55 min

- Oblicz $\vec{a} \times \vec{b}$ dla $\vec{a} = [2, -1, 3]$ i $\vec{b} = [-1, 4, 0]$. Sprawdź iloczynem skalarnym, że wynik jest prostopadły do obu wektorów. Ile wynosi pole równoległoboku rozpiętego na $\vec{a}$ i $\vec{b}$?
- Oblicz $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})$ oraz $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j}$. Co ten wynik mówi o nawiasach?
- Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 4)$.
- Ciało o masie 2 kg jest w punkcie $\vec{r} = [3, 0, 0] \text{ m}$. Oblicz moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ względem początku układu dla $\vec{v} = [0, 4, 0] \text{ m/s}$ oraz dla $\vec{v} = [2, 4, 0] \text{ m/s}$. Dlaczego wyniki są równe?
- W n -wymiarowej przestrzeni płaszczyzn współrzędnych (takich jak xy , yz , ...) jest tyle, ile par osi. Ile ich jest dla $n = 2, 3, 4$? Dla jakich n moment siły można opisać wektorem o n składowych? Co to mówi o iloczynie wektorowym?

- 6 Odbij w lustrze płaszczyzny yz , czyli zmień znak współrzędnej x każdego wektora biegunowego. Dla $\vec{r} = [1, 2, 3]$ i $\vec{F} = [4, -1, 2]$ oblicz $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ przed odbiciem i $\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}'$ po odbiciu. Porównaj $\vec{M}'$ z tym, co dałoby zwykłe odbicie wektora $\vec{M}$.

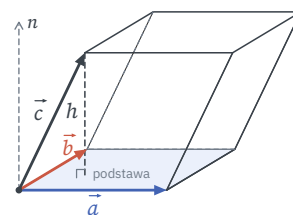
- 7 Bryła obraca się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = [0, 0, 2]$ rad/s wokół osi z . Punkt bryły ma położenie $\vec{r} = [3, 0, 4]$ m. Oblicz jego prędkość $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ i przyspieszenie $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, najpierw wprost, potem ze wzoru „BAC minus CAB”. Porównaj wynik z v^2/ρ , gdzie ρ to odległość punktu od osi.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

Więcej zadań: Leitner §24.

5 Iloczyn mieszany i objętość

Łącząc oba iloczyny, dostajemy kolejny niezmiennik. $\vec{a} \times \vec{b}$ to „pole podstawy ze strzałką” prostopadłą do podstawy. Mnożąc go skalarnie przez $\vec{c}$, bierzemy tylko tę część $\vec{c}$, która sterczy nad podstawą, czyli wysokość. Pole razy wysokość to objętość równoległościanu rozpiętego na trzech wektorach.



$V = \text{pole podstawy} \times \text{wysokość}$

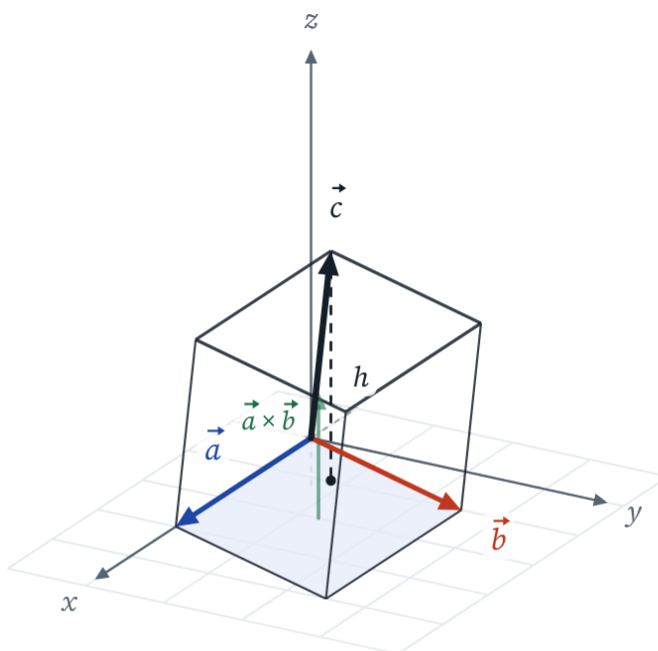
WYNIK · ILOCZYN MIESZANY

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \pm V.$$

Wartość bezwzględna to objętość równoległościanu. Czworoscian na tych samych krawędziach ma $\frac{1}{6}$ tej objętości. Iloczyn jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie (są **komplanarne**). Cykliczna zamiana $\vec{a} \rightarrow \vec{b} \rightarrow \vec{c} \rightarrow \vec{a}$ nie zmienia wyniku, zamiana dwóch wektorów zmienia znak.

SYMULACJA 7

Objętość jako iloczyn mieszany. Podstawa ($\vec{a}$, $\vec{b}$) jest stała. Zmieniaj azymut $\vec{c}$: wysokość h i objętość się nie zmieniają. Pochylaj $\vec{c}$: objętość maleje razem z h , aż przy odchyleniu 90° spada do zera.



— a — b — c — kierunek $\vec{a} \times \vec{b}$ - - wysokość h

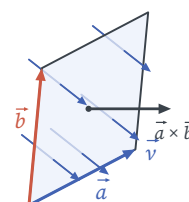
pole podstawy $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 7,50

wysokość $h = \vec{c} \cdot \hat{n}$ 2,72

$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ 20,39

Stan na rysunku: $\vec{a} = [3; 0; 0]$, $\vec{b} = [1; 2,5; 0]$, $\vec{c} = [0,97; 0,81; 2,72]$ ($|\vec{c}| = 3,0$, odchylenie 25° , azymut 40°). Pole podstawy 7,50, $h = 2,72$, $V = 20,39$.

Ten sam iloczyn ma znaczenie fizyczne. Woda płynie z prędkością $\vec{v}$ przez ramkę rozpiętą na $\vec{a}$ i $\vec{b}$. W czasie Δt przez ramkę przepływa woda wypełniająca ukośny równoległoscian o krawędziach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{v} \Delta t$. Objętość na sekundę, czyli strumień, wynosi $Q = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{v}|$. Przez ramkę ustawioną równolegle do prądu nic nie przepływa. Takie strumienie spotkasz znowu w elektryczności, w prawie Gaussa.



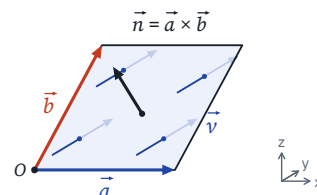
strumień: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{v}$

Przykład 5.1

Woda przez ukośną ramkę

Ramka jest rozpięta na wektorach $\vec{a} = [0,5; 0; 0]$ m i $\vec{b} = [0; 0,4; 0,3]$ m. Woda płynie z prędkością $\vec{v} = [0; 1,2; 0]$ m/s. Ile wody przepływa przez ramkę w ciągu sekundy? Ile przepływałoby, gdyby ramkę ustawić prostopadle do prądu?

- 1 $\vec{a} \times \vec{b} = [0 \cdot 0,3 - 0 \cdot 0,4, 0 \cdot 0 - 0,5 \cdot 0,3, 0,5 \cdot 0,4 - 0 \cdot 0] = [0, -0,15, 0,2]$ m². Pole ramki $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0,25$ m².
- 2 $Q = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{v}| = |-0,15 \cdot 1,2| = 0,18$ m³/s, czyli 180 litrów na sekundę.
- 3 Ramka prostopadła do prądu: $Q_{\perp} = 0,25 \cdot 1,2 = 0,30$ m³/s. Stosunek $0,18/0,30 = 0,6$ to cosinus kąta między normalną do ramki a prądem.



Ramka i strumień wody

Wynik: 0,18 m³/s (180 L/s), wobec 0,30 m³/s przy ustawieniu prostopadłym.

Sprawdzenie: ramka jest odchylona od pionu ($\vec{b}$ ma składową y , wzdłuż prądu), więc woda „widzi” mniejsze pole. Znak minus w $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{v}$ mówi tylko, że woda przepływa przez ramkę w kierunku przeciwnym do zwrotu $\vec{a} \times \vec{b}$ ✓

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 30 min

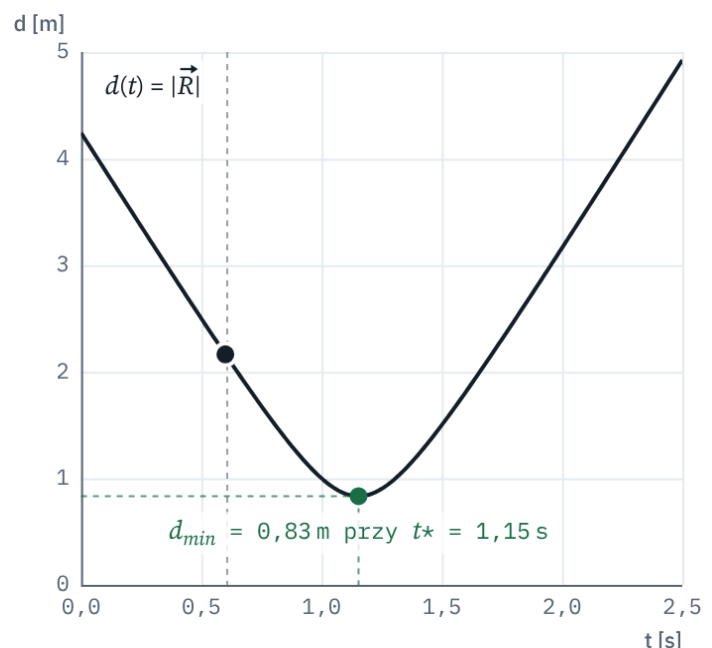
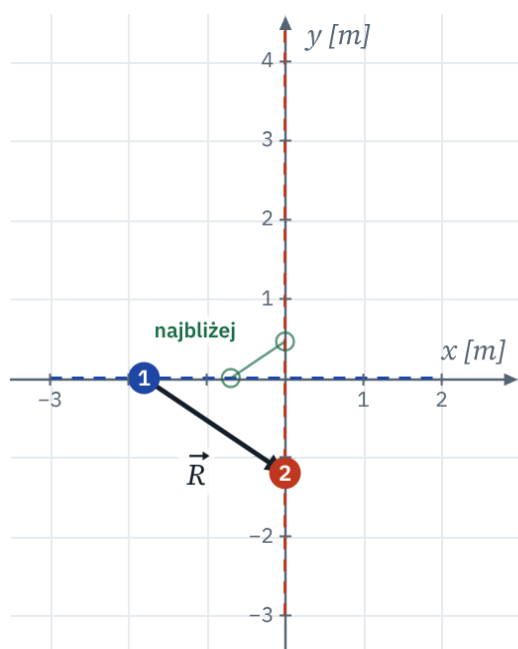
- 1 Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na $\vec{a} = [1, 2, 0]$, $\vec{b} = [0, 1, 3]$, $\vec{c} = [2, 0, 1]$.
- 2 Dla jakiego z wektory $[1, 1, 0]$, $[0, 1, 1]$, $[1, 0, z]$ leżą w jednej płaszczyźnie?
- 3 Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 3)$. Sprawdź wynik wzorem „ $\frac{1}{3}$ pola podstawy razy wysokość”.
- 4 Wykaż, że $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ dla dowolnych wektorów. Skorzystaj z wyznacznika albo z geometrii.
- 5 Oszacuj przepływ Wisły pod mostem w Warszawie. Przyjmij szerokość koryta ok. 300 m, średnią głębokość ok. 2 m i prędkość wody ok. 1 m/s. O ile zmieni się wynik, gdy przekrój, przez który liczysz przepływ, ustawisz ukośnie, pod kątem 30° do kierunku prostopadłego do nurtu? Dlaczego rzeka „nie wie”, jak ustawisz przekrój?

6 Wektory w ruchu

Położenie ciała w ruchu to wektor zależny od czasu, $\vec{r}(t)$. Dla ruchu ze stałą prędkością $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$. Pochodne wektorów i ich sens fizyczny omawia lekcja 1.3 Pochodne, a od strony fizyki Dział 1: Ruch i jego przyczyny. Tu wystarczy jedno narzędzie: odległość dwóch ciał to długość wektora $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, a jej kwadrat $R^2 = \vec{R} \cdot \vec{R}$ jest funkcją kwadratową czasu, jeśli oba ciała poruszają się jednostajnie.

Gdy ciała są najbliżej siebie, R^2 ma minimum, więc jego pochodna jest zerowa: $\frac{d}{dt}(\vec{R} \cdot \vec{R}) = 2 \vec{R} \cdot \vec{V} = 0$, gdzie $\vec{V} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ to prędkość względna. W chwili największego zbliżenia **położenie względne jest prostopadłe do prędkości względnej**. Gdy $\vec{R} \cdot \vec{V} < 0$, ciała się zbliżają, a gdy $\vec{R} \cdot \vec{V} > 0$, oddalają. Z warunku $(\vec{R}_0 + \vec{V}t) \cdot \vec{V} = 0$ dostajemy od razu $t^* = -\frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{V}}{\vec{V} \cdot \vec{V}}$.

SYMULACJA 8 Najbliższe zbliżenie. Przesuwaj czas albo uruchom ruch. Na wykresie odległość $d(t)$. W minimum strzałka $\vec{R}$ jest prostopadła do prędkości względnej, a $\vec{R} \cdot \vec{V}$ zmienia znak.



— cząstka 1 — cząstka 2 — $R = r_2 - r_1$ — największe zbliżenie

t 0,60 s

d(t) 2,163 m

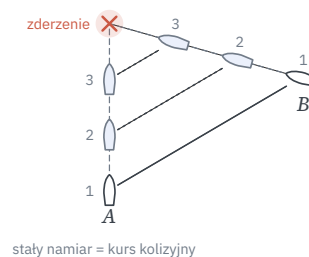
$R \cdot V -7,20 \text{ m}^2/\text{s}$: zbliżają się

$d_{\min} = 3/\sqrt{13} \approx 0,832 \text{ m}$

Stan na rysunku: $t = 0,60 \text{ s}$, $r_1 = [-1,80; 0,00] \text{ m}$, $r_2 = [0,00; -1,20] \text{ m}$, $R = [1,80; -1,20] \text{ m}$, $d = 2,163 \text{ m}$, $R \cdot V = -7,20 \text{ m}^2/\text{s}$ (zbliżają się). Minimum $d_{\min} = 3/\sqrt{13} \approx 0,832 \text{ m}$ przy $t^* = 15/13 \approx 1,15 \text{ s}$.

SKĄD TO WIEMY?

Marynarze i piloci korzystają z tego od dawna, choć bez wzorów. Jeśli namiar na inny statek, czyli kierunek, w którym go widzisz, się nie zmienia, a odległość maleje, jesteście na kursie kolizyjnym. Stały kierunek oznacza, że $\vec{R}$ zmienia tylko długość, a nie kierunek. Prędkość względna jest wtedy skierowana przeciwnie do $\vec{R}$, więc odległość spadnie do zera. Zasadę stałego namiaru zapisano wprost w Międzynarodowych przepisach o zapobieganiu zderzeniom na morzu (prawidło 7).



Przykład 6.1

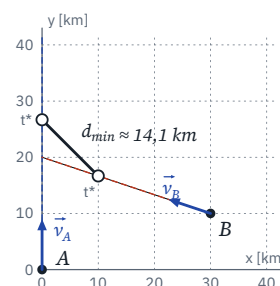
Dwa statki

Statek A wypływa z punktu (0, 0) km na północ z prędkością 20 km/h. W tej samej chwili statek B jest w punkcie (30, 10) km i płynie z prędkością $\vec{v}_B = [-15, 5]$ km/h. Kiedy statki będą najbliżej siebie i w jakiej odległości?

1. Położenie B względem A: $\vec{R}_0 = [30, 10]$ km, prędkość względna $\vec{V} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = [-15, 5] - [0, 20] = [-15, -15]$ km/h.

2. $t^* = -\frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{V}}{\vec{V} \cdot \vec{V}} = -\frac{-450 - 150}{450} = \frac{4}{3}$ h, czyli 1 h 20 min.

3. $\vec{R}(t^*) = [30 - 20, 10 - 20] = [10, -10]$ km, $d_{\min} = 10\sqrt{2} \approx 14,1$ km.



Tory statków i największe zbliżenie

Wynik: po 1 h 20 min, w odległości ok. 14,1 km. Kolizji nie będzie.

Sprawdzenie: $\vec{R}(t^*) \cdot \vec{V} = 10 \cdot (-15) + (-10)(-15) = 0 \checkmark$. Położenia: A (0; 26,7) km, B (10; 16,7) km, różnica $[10, -10] \checkmark$

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

4 zadania · ok. 30 min

1. Dwie cząstki poruszają się ze stałymi prędkościami $\vec{v}_1 = 2\vec{i}$ m/s i $\vec{v}_2 = 3\vec{j}$ m/s. W chwili $t = 0$ są w punktach $\vec{r}_1 = -3\vec{i}$ m i $\vec{r}_2 = -3\vec{j}$ m. Kiedy są najbliżej siebie i w jakiej odległości? Sprawdź w symulacji 8.

- 2 Ptak leci względem ziemi z prędkością $[8, 6]$ m/s, a wiatr wieje z prędkością $[-2, 1]$ m/s. Jaka jest prędkość ptaka względem powietrza i jej wartość?

- 3 Wykaż, że $\frac{d}{dt}(\vec{R} \cdot \vec{R}) = 2 \vec{R} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}$, różniczkując sumę składowych. Wywnioskuj, że wektor o stałej długości jest zawsze prostopadły do swojej pochodnej. Gdzie spotkałeś ten fakt w ruchu po okręgu?

- 4 Dwa samoloty lecą na tej samej wysokości. A startuje z $(0, 0)$ km z prędkością $[600, 0]$ km/h, a B z $(100, -100)$ km z prędkością $[0, 600]$ km/h. Czy grozi im kolizja? Pokaż, że kierunek, w którym pilot A widzi samolot B, przez cały czas jest taki sam.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

7 Błędne intuicje

Większość błędów w rachunkach wektorowych nie bierze się z rachunku, tylko z obrazu w głowie. Oto najczęstsze.

- × „Długości wektorów się dodają: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.”

Tylko gdy wektory mają ten sam kierunek i zwrot. W ogólności $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (nierówność trójkąta), a dla przeciwnych zwrotów suma może być nawet zerowa. Dwie siły po 10 N mogą dać wypadkową od 0 do 20 N.

- × „Składowe to własność wektora.”

Składowe to opis wektora w wybranym układzie osi. Po obrocie osi się zmieniają. Własnością samego wektora jest długość, a dla pary wektorów kąt między nimi (symulacja 1).

- × „Różnicę dwóch strzałek odczytuję tam, gdzie je narysowano.”

Tylko gdy wychodzą z tego samego punktu. Prędkości w dwóch punktach toru trzeba najpierw przenieść do wspólnego początku (FLP I-11-6).

- × „ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$, tak jak przy mnożeniu liczb.”

Zamiana kolejności zmienia zwrot: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Iloczyn wektorowy nie jest też łączny. Iloczyn skalarny jest przemienny.

× „Siła, która działa na poruszające się ciało, zawsze wykonuje pracę.”

Praca to $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. Siła prostopadła do ruchu, na przykład dośrodkowa albo magnetyczna, nie wykonuje pracy i nie zmienia szybkości, choć zmienia kierunek ruchu.

× „Moment siły zależy tylko od siły.”

Zależy od siły, od punktu przyłożenia i od punktu, względem którego go liczymy: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Ta sama siła przyłożona przy zawiasach prawie nie obraca drzwi.

× „Wektor osiowy odbija się w lustrze jak zwykła strzałka.”

Nie odbija się. Moment pędu wirującego koła po odbiciu wskazuje w przeciwną stronę, niż wskazywałaby odbita strzałka. To skutek reguły prawej dłoni (FLP I-52-5).

8

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź. Żadne z tych pytań nie wymaga długiego liczenia.

1 Czy trójka (masa, objętość, temperatura) ciała jest wektorem?

Nie. To trzy skalary. Przy obrocie osi żadna z tych liczb się nie zmienia, a składowe wektora muszą się zmieniać według reguły obrotu.

2 Dwie siły po 3 N i 4 N działają na ten sam punkt. Jaką największą, a jaką najmniejszą wypadkową mogą dać? Kiedy wypadkowa wynosi 5 N?

Największa to 7 N (ten sam zwrot), najmniejsza 1 N (zwroty przeciwne). 5 N wychodzi wtedy, gdy siły są prostopadłe ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

3 Iloczyn skalarny dwóch niezerowych wektorów jest ujemny. Co wiesz o kącie między nimi?

Kąt jest rozwarty, większy niż 90° . Rzut jednego wektora na drugi wypada „do tyłu”.

4 Ile wynosi $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ i dlaczego bez liczenia?

Zero, bo $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do $\vec{a}$. Inaczej: to objętość bryły, której dwie krawędzie się pokrywają.

5 Satelita krąży po orbicie kołowej. Jaką moc ma siła grawitacji?

Zero, bo $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, a siła jest prostopadła do prędkości. Dlatego szybkość satelity się nie zmienia.

6 Dlaczego w dwóch wymiarach moment siły jest liczbą, a w trzech wektorem?

W 2D jest jedna płaszczyzna obrotu, więc jedna liczba $x F_y - y F_x$. W 3D są trzy płaszczyzny i trzy takie liczby, które przekształcają się jak składowe wektora prostopadłego do płaszczyzny skrętu (FLP I-20-1).

7 Trzy wektory mają iloczyn mieszany równy zero. Co to znaczy geometrycznie?

Leżą w jednej płaszczyźnie, więc rozpinają równoległoscian o zerowej objętości. Jeden z nich da się zapisać jako kombinację dwóch pozostałych.

8 Dwa statki się zbliżają, a kierunek, w którym jeden widzi drugi, się nie zmienia. Czy jest się czego bać?

Tak. Stały namiar przy malejącej odległości oznacza, że $\vec{R}$ zmienia tylko długość, a prędkość względna jest do niego równoległa. Odległość spadnie do zera.

WEKTOR I DZIAŁANIA

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{AB} = B - A, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\hat{a} = \vec{a}/|\vec{a}| = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$$

$$\text{obrót osi: } a_{x'} = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta$$

$$a_{y'} = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta$$

$$\text{rozkład: } F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \sin \alpha$$

$$\vec{v}_{\text{brzeg}} = \vec{v}_{\text{wzgl. wody}} + \vec{u}_{\text{wody}}$$

ILOCZYN

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi \text{ (pole)}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \pm V$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}, \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad E_k = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{zbliżenie: } t^* = -\frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{V}}{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 11 (całość, szczególnie 11-4...11-7).
- **Dla chętnych:** 20-1 (moment siły jako wektor i iloczyn wektorowy), 52-4...52-6 (odbicia lustrzane, wektory biegunowe i osiowe).

Do przeczytania u Leitnera

- **Definicje i twierdzenia:** R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych*, cz. I, rozdz. 4: §21 (definicja wektora, rodzaje wektorów), §23 (rozkład na składowe, wersory), §24 (iloczyn skalarny, wektorowy, mieszany i podwójny), §25 (działania na współrzędnych, cosinusy kierunkowe).
- **Dla chętnych:** §27 (obroty i zmiana układu współrzędnych, współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne).

Wektory wrócą w lekcji 1.3 Pochodne. Wektor położenia zależny od czasu różniczkujemy po składowych i dostajemy prędkość. Zobaczmy, dlaczego wektor o stałej długości zawsze jest prostopadły do swojej pochodnej i jak z tego jednego faktu wynika przyspieszenie dośrodkowe.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$, $\hat{a} = [\frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13}]$.
- $\vec{PQ} = [6, -8, 0]$, $|\vec{PQ}| = 10$, środek $\frac{1}{2}(\vec{P} + \vec{Q}) = (2, 0, 2)$.
- $a_{x'} = 2 \cos 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \approx 2,73$, $a_{y'} = -2 \sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ \approx 0,73$. Długość $\sqrt{2,73^2 + 0,73^2} \approx 2,83 = 2\sqrt{2} \checkmark$. Składowa y' znika dla $\tan \theta = a_y/a_x = 1$, czyli $\theta = 45^\circ$.
- Tak. Po obrocie osi $w_{x'} = w_x \cos \theta + w_y \sin \theta = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta = v_{y'}$ i podobnie $w_{y'} = -v_{x'}$. Para $[v_{y'}, -v_{x'}]$ powstaje z nowych składowych tym samym przepisem, więc $\vec{w}$ jest wektorem. To obrót $\vec{v}$ o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Obroty w płaszczyźnie są przemienne, dlatego przepis nie zależy od układu.
- (a) umiejscowiony, bo zaczepiony w wieży; (b) ślizgający się, bo dla sztywnej skrzyni liczy się tylko prosta działania siły; (c) swobodny; (d) ślizgający się, bo leży na osi obrotu, a jego początek może być w dowolnym punkcie tej osi. Przesunięty poza oś opisywałby obrót wokół innej osi.
- Po pół roku Ziemia jest po przeciwnej stronie Słońca: $|\Delta \vec{r}| = 2R \approx 3,0 \cdot 10^{11}$ m. Droga to pół okręgu, $\pi R \approx 4,7 \cdot 10^{11}$ m. Po roku przemieszczenie wynosi zero, a droga $2\pi R \approx 9,4 \cdot 10^{11}$ m. Przemieszczenie jest wektorem, droga jest liczbą, która tylko rośnie.

Zadania • część 2

- $[1, 3, 3], [3, -5, 3], [8, -11, 9]$.
- $F_x = 80 \cos 25^\circ \approx 72,5$ N, $F_y = 80 \sin 25^\circ \approx 33,8$ N.
- Pionowo: $2T \sin \alpha = mg$, więc $T = \frac{mg}{2 \sin \alpha} \approx 141$ N. Dla $\alpha \rightarrow 0$ naciąg rośnie bez ograniczeń, bo składowe pionowe muszą unieść ciężar, a $\sin \alpha \rightarrow 0$. Każda linka w końcu się zerwie albo zwiśnie.
- $200 \sin \beta = 50$, więc $\beta \approx 14,5^\circ$ na zachód od północy. Prędkość względem ziemi $\sqrt{200^2 - 50^2} \approx 194$ km/h.
- Wektory prędkości są prostopadłe: $|\Delta \vec{v}| = 10\sqrt{2} \approx 14,1$ m/s. Czas $t = \frac{\pi R/2}{v} = \pi s \approx 3,14$ s, więc $|\vec{a}_{\text{śr}}| \approx 4,50$ m/s². Wartość chwilowa $v^2/R = 5$ m/s² jest większa, bo średnia z wektorów obracających się o 90° jest krótsza od każdego z nich. Dla coraz krótszych łuków średnia dąży do v^2/R .

Zadania • część 3

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 - 4 + 0 = -6$; $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{17}$; $\cos \varphi = -6/\sqrt{238} \approx -0,389$, $\varphi \approx 112,9^\circ$ (kąt rozwarty, bo iloczyn ujemny).
- $3t - 2t + 4 = 0$, więc $t = -4$.
- $\hat{d} = \frac{1}{5}[4, 0, -3]$, $\vec{g} \cdot \hat{d} = \frac{3}{5} \cdot 9,81 \approx 5,89$ m/s². To $g \sin \alpha$ z $\sin \alpha = 3/5$, czyli wynik z części 2.3 bez rysowania trójkątów.
- $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, gdzie γ to kąt między $\vec{a}$ i $\vec{b}$, czyli kąt trójkąta naprzeciw boku $|\vec{a} - \vec{b}|$. Dla $\gamma = 90^\circ$ zostaje twierdzenie Pitagorasa.

5. Po pełnym roku Ziemia wraca do tego samego punktu z tą samą prędkością, więc praca wynosi 0. Od peryhelium do aphelium $W = \frac{1}{2}M(v_a^2 - v_p^2) \approx -1,8 \cdot 10^{32}$ J. Ziemia oddala się wtedy od Słońca, prędkość ma składową od Słońca, a siła ciągnie do Słońca, więc $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$. W drugiej połowie roku jest odwrotnie.

6. $\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, więc $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$: $\gamma = 60^\circ$ albo $\gamma = 120^\circ$. Wersory: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ i $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Zadania • część 4

1. $\vec{a} \times \vec{b} = [(-1) \cdot 0 - 3 \cdot 4, 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0, 2 \cdot 4 - (-1)(-1)] = [-12, -3, 7]$. Iloczyn z $\vec{a}$: $-24 + 3 + 21 = 0$, z $\vec{b}$: $12 - 12 + 0 = 0$ ✓. Pole $\sqrt{144 + 9 + 49} = \sqrt{202} \approx 14,2$.

2. $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ oraz $\vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$. Wyniki są różne, więc iloczyn wektorowy nie jest łączny.

3. $\vec{AB} \times \vec{AC} = [2, 0, 0] \times [0, 3, 4] = [0, -8, 6]$, długość 10, pole trójkąta to połowa: 5.

4. W obu przypadkach $\vec{L} = [0, 0, 24]$ kg · m²/s. Składowa prędkości wzdłuż $\vec{r}$, czyli ruch prosto od początku, nie daje momentu pędu, bo $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$.

5. Par osi jest $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$: 1, 3 i 6. Równość $\frac{n(n-1)}{2} = n$ zachodzi tylko dla $n = 3$ (pomijając $n = 0$). W 2D moment siły to jedna liczba, a w 4D sześć liczb, których nie da się zapisać jako wektora o czterech składowych. Iloczyn wektorowy w tej postaci istnieje tylko w trzech wymiarach, co jest „szczęśliwym cudem” Feynmana.

6. $\vec{M} = [7, 10, -9]$. Po odbiciu $\vec{r}' = [-1, 2, 3]$, $\vec{F}' = [-4, -1, 2]$, $\vec{M}' = [7, -10, 9]$. Zwykle odbicie $\vec{M}$ dałoby $[-7, 10, -9]$, dokładnie przeciwny wektor. Tak zachowuje się wektor osiowy: w lustrze dostaje dodatkowy minus.

7. $\vec{v} = [0, 6, 0]$ m/s. Wprost: $\vec{a} = [0, 0, 2] \times [0, 6, 0] = [-12, 0, 0]$ m/s². Ze wzoru: $8[0, 0, 2] - 4[3, 0, 4] = [-12, 0, 0]$ ✓. To $-\omega^2 \vec{r}_\perp$, gdzie $\vec{r}_\perp = [3, 0, 0]$: skierowane do osi, o wartości $\omega^2 \rho = 12$, a $v^2/\rho = 36/3 = 12$ m/s² ✓. Składowa z położenia nie ma znaczenia.

Zadania • część 5

1. $\det = 1(1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + 0 = 1 + 12 = 13$, więc $V = 13$.

2. $\det = 1(z - 0) - 1(0 - 1) + 0 = z + 1 = 0$, więc $z = -1$. Sprawdzenie: $[1, 0, -1] = [1, 1, 0] - [0, 1, 1]$ ✓

3. $\det \text{diag}(1, 2, 3) = 6$, $V = 6/6 = 1$. Podstawa ABC ma pole $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$, wysokość 3, więc $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1$ ✓

4. Wyznacznik z dwoma jednakowymi wierszami jest zerowy. Geometrycznie: $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie podstawy, więc nie ma żadnej wysokości. To jest też dowód, że $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$.

5. Przekrój prostopadły: $Q \approx 300 \cdot 2 \cdot 1 = 600$ m³/s. To rząd wielkości zgodny z pomiarami, bo średni przepływ Wisły w Warszawie to kilkaset m³/s. Przekrój ukośny ma pole $600/\cos 30^\circ \approx 693$ m², ale normalna tworzy z nurtem kąt 30° , więc $Q = 693 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 600$ m³/s. Wynik się nie zmienia. Ta sama woda, która przeszła przez jeden przekrój, musi przejść przez drugi, a iloczyn mieszany sam to uwzględnia.

Zadania · część 6

1. $\vec{R}_0 = [3, -3]$, $\vec{V} = [-2, 3]$; $t^* = -\frac{-6-9}{13} = \frac{15}{13} \approx 1,15$ s; $d_{\min} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0,83$ m.
2. $\vec{v}_{\text{wzgl. powietrza}} = \vec{v}_{\text{ziemia}} - \vec{u}_{\text{wiatru}} = [10, 5]$ m/s, wartość $\approx 11,2$ m/s.
3. $\frac{d}{dt}(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2) = 2(R_x \dot{R}_x + R_y \dot{R}_y + R_z \dot{R}_z)$. Stała długość oznacza zerową pochodną, więc $\vec{R} \perp \dot{\vec{R}}$. W ruchu po okręgu $|\vec{r}| = R$ jest stałe, więc $\vec{v} \perp \vec{r}$. Przy stałej szybkości także $\vec{a} \perp \vec{v}$.
4. $\vec{R}_0 = [100, -100]$, $\vec{V} = [-600, 600]$, więc $\vec{R}(t) = (100 - 600t)[1, -1]$. Kierunek $[1, -1]$ się nie zmienia, a długość maleje do zera w chwili $t = \frac{1}{6}$ h, czyli po 10 minutach. Oba samoloty są wtedy w punkcie $(100, 0)$ km. To kurs kolizyjny: stały namiar i malejąca odległość.

Matematyka · Rachunek wektorowy. Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 11, 20-1, 52-4...52-6; R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych*, cz. I, rozdz. 4. Cytaty w tłumaczeniu własnym, odnośniki w formacie tom-rozdział-podrozdział.